

Principios de **cinemática** de partículas para **ingenieros**



Principios de **cinemática** de partículas para **ingenieros**



Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Luiza Alves Batista

Nataly Evilin Gayde

Thamires Camili Gayde

Capa e contracapa

Santiago Vanegas Serna

2025 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2025 O autor

Copyright da edição © 2025 Atena

Editora

Direitos para esta edição cedidos à

Atena Editora pelo autor.

Open access publication by Atena

Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo da obra e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva do autor, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos ao autor, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Os manuscritos nacionais foram previamente submetidos à avaliação cega por pares, realizada pelos membros do Conselho Editorial desta editora, enquanto os manuscritos internacionais foram avaliados por pares externos. Ambos foram aprovados para publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Colégio Militar Dr. José Aluisio da Silva Luz / Colégio Santa Cruz de Araguaína/TO

Profª Drª Cristina Aledi Felsemburgh – Universidade Federal do Oeste do Pará
 Prof. Dr. Diogo Peixoto Cordova – Universidade Federal do Pampa, Campus Caçapava do Sul
 Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
 Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
 Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
 Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
 Prof. Dr. Fabrício Moraes de Almeida – Universidade Federal de Rondônia
 Profª Drª Glécilla Colombelli de Souza Nunes – Universidade Estadual de Maringá
 Prof. Dr. Hauster Maximiler Campos de Paula – Universidade Federal de Viçosa
 Profª Drª Iara Margolis Ribeiro – Universidade Federal de Pernambuco
 Profª Drª Jéssica Barbosa da Silva do Nascimento – Universidade Estadual de Santa Cruz
 Profª Drª Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
 Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense
 Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
 Prof. Dr. Leonardo França da Silva – Universidade Federal de Viçosa
 Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
 Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
 Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
 Prof. Dr. Marcos Vinicius Winckler Caldeira – Universidade Federal do Espírito Santo
 Profª Drª Maria Iaponeide Fernandes Macêdo – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
 Profª Drª Maria José de Holanda Leite – Universidade Federal de Alagoas
 Profª Drª Mariana Natale Fiorelli Fabiche – Universidade Estadual de Maringá
 Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
 Prof. Dr. Milson dos Santos Barbosa – Universidade Tiradentes
 Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
 Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
 Prof. Dr. Nilzo Ivo Ladwig – Universidade do Extremo Sul Catarinense
 Profª Drª Priscila Natasha Kinas – Universidade do Estado de Santa Catarina
 Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
 Prof. Dr. Rafael Pacheco dos Santos – Universidade do Estado de Santa Catarina
 Prof. Dr. Ramiro Picoli Nippes – Universidade Estadual de Maringá
 Profª Drª Regina Célia da Silva Barros Allil – Universidade Federal do Rio de Janeiro
 Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
 Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Princípios de cinemática de partículas para engenheiros

Autores: Germán Leonardo García-Monsalve
Nelson Antonio Vanegas-Molina

Revisão: Os autores

Diagramação: Camila Alves de Cremo

Correção: Maiara Ferreira

Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)	
P957	Princípios de cinemática de partículas para engenheiros / Germán Leonardo García-Monsalve, Nelson Antonio Vanegas-Molina. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2025. Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-65-258-3154-1 DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.541251103 1. Cinemática. I. García-Monsalve, Germán Leonardo. II. Vanegas-Molina, Nelson Antonio. III. Título. CDD 531.1
Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166	

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil

Telefone: +55 (42) 3323-5493

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DO AUTOR

Para fins desta declaração, o termo 'autor' será utilizado de forma neutra, sem distinção de gênero ou número, salvo indicação em contrário. Da mesma forma, o termo 'obra' refere-se a qualquer versão ou formato da criação literária, incluindo, mas não se limitando a artigos, e-books, conteúdos on-line, acesso aberto, impressos e/ou comercializados, independentemente do número de títulos ou volumes. O autor desta obra: 1. Atesta não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação à obra publicada; 2. Declara que participou ativamente da elaboração da obra, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final da obra para submissão; 3. Certifica que a obra publicada está completamente isenta de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirma a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhece ter informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autoriza a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação da obra publicada, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. A editora pode disponibilizar a obra em seu site ou aplicativo, e o autor também pode fazê-lo por seus próprios meios. Este direito se aplica apenas nos casos em que a obra não estiver sendo comercializada por meio de livrarias, distribuidores ou plataformas parceiras. Quando a obra for comercializada, o repasse dos direitos autorais ao autor será de 30% do valor da capa de cada exemplar vendido; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Em conformidade com a Lei Geral de Proteção de Dados (LGPD), a editora não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como quaisquer outros dados dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

Dedico este libro de “Principios de cinemática de partículas para ingenieros” de manera especial a mi padre José Guillermo García Parada, quien ha sido el primer interesado en leerlo y quien dedicó más de 45 años a la labor docente y formación de múltiples generaciones de profesionales. Además, me ha dejado el legado de mantener por encima de cualquier interés particular, los valores de familia y la ética profesional.

También, hago dedicación a todos los estudiantes de pregrado en ingeniería mecánica, áreas afines y a cualquier otro lector interesado en mejorar el proceso de aprendizaje metódico, de la cinemática de los cuerpos materiales no deformables con comportamiento de partícula. En especial, porque en este escrito encontrarán una metodología que se diferencia de los textos tradicionales donde se hace un gran esfuerzo para que el aprendizaje sea de tipo creativo y se evite el aprendizaje de tipo memorístico.

Germán Leonardo García Monsalve

El libro “Principios de cinemática de partículas para ingenieros”, está dirigido principalmente a los estudiantes de pregrado en ingeniería mecánica, o de alguna disciplina afín, o para cualquier profesional interesado en disponer de una herramienta metodológica que apoye la comprensión, solución y validación de resultados en problemas de ingeniería relacionados con el movimiento de los cuerpos, sin detallar las causas que lo producen. El libro incluye la descripción de la cinemática de un cuerpo o un conjunto de cuerpos, con enfoque vectorial, cuyo comportamiento dinámico podría tratarse como el de una partícula o de un cuerpo rígido, con movimiento lineal, curvilíneo, o combinación de ambos, para diferentes intervalos de tiempo. Para la solución de los problemas, se requiere de la selección adecuada de un sistema de referencia fijo o en movimiento: cartesiano, normal-tangencial, polar-cilíndrico, utilizando diferentes herramientas del cálculo, álgebra lineal, geometría, trigonometría y física, considerando los principios de Newton.

Como valor agregado que propone el libro en la solución de los problemas de cinemática, se presenta una metodología desarrollada en varios pasos secuenciales que caracterizan la cinemática del cuerpo: 1) un primer paso inicia con la comprensión, análisis e interpretación detallada de los requerimientos del problema; 2) un segundo paso plantea un modelo físico o modelo gráfico del comportamiento dinámico, que describe el movimiento simplificado del cuerpo; 3) un tercer paso formula y resuelve de manera analítica, mediante ecuaciones matemáticas, el movimiento del cuerpo; 4) un cuarto paso, para la metodología propuesta, permite realizar la interpretación y validación de los resultados obtenidos, de acuerdo con el modelo físico y con las ecuaciones analíticas planteadas para la solución del problema.

Se resalta que, la metodología propuesta enfatiza en la necesidad de describir gráficamente y mediante un modelo cinemático, la geometría que caracteriza el movimiento del cuerpo, durante el intervalo de tiempo, para una situación particular, utilizando un sistema de referencia específico. De esta manera, se evita en una primera instancia la aplicación memorística de ecuaciones cinemáticas aisladas, sin un análisis detallado y la construcción previa de un modelo descriptivo que sintetice el comportamiento del cuerpo. En este sentido, las ecuaciones analíticas utilizadas para la solución del problema deben representar de manera coherente el movimiento del cuerpo material en armonía con el modelo físico (cinemático), y simultáneamente permite fortalecer la capacidad crítica deductiva y/o inductiva para la solución de problemas de ingeniería.

Finalmente, se menciona que las variables de interés para abordar los problemas de cinemática de la partícula, corresponden a: desplazamiento,

velocidad y aceleración en función del tiempo. Dicha variación permite caracterizar el movimiento lineal, curvilíneo, tridimensional, del cuerpo material para diferentes intervalos de tiempo con aceleración constante, aceleración variable (acelerado, desacelerado). Esta caracterización del movimiento se presenta en una dirección (un solo eje, $1D$), dos direcciones (dos ejes, en un plano, $2D$) o tres direcciones (tres ejes, en el espacio, $3D$), dependiendo del sistema de referencia elegido (cartesiano, polar-esférico, normal-tangencial o cilíndrico).

INTRODUCCIÓN	1
1. CONCEPTOS DE LA PARTÍCULA Y DEL CUERPO RÍGIDO.....	4
1.1 Conceptos básicos del cuerpo material.....	4
1.1.1 Consideraciones generales para abordar problemas de la dinámica.....	4
1.1.2 Metodología propuesta para la solución de problemas de dinámica ...	7
2. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA. MOVIMIENTO RECTILÍNEO	11
2.1 Movimiento rectilíneo	11
2.1.1 Conceptos básicos para el movimiento rectilíneo.....	11
2.1.2 Ejemplo ilustrativo para el movimiento rectilíneo	15
3. MOVIMIENTO CURVILÍNEO UTILIZANDO COORDENADAS CON COM- PONENTES RECTANGULARES.....	23
3.1 Conceptos previos para el movimiento curvilíneo.....	23
3.1.1 Ecuación de la posición	23
3.1.2 Ecuación vectorial de la velocidad	24
3.1.3 Ecuación de la aceleración	25
3.2 Ejemplo ilustrativo para el movimiento curvilíneo utilizando coordenadas rec- tangulares (x, y)	27
3.2.1 Solución	27
3.2.2 Etapa 1. Comprensión del caso de estudio.....	27
3.2.3 Etapa 2. Planteamiento de un modelo físico para el movimiento de la pelota	28
3.2.4 Etapa 3. Planteamiento analítico para el movimiento de la pelota	29
3.2.5 Etapa 4. Interpretación y validación de los resultados obtenidos	33
4. MOVIMIENTO CURVILÍNEO GENERAL UTILIZANDO COORDENADAS NORMAL TANGENCIAL (n, t).....	36
4.1 Conocimientos previos para el movimiento curvilíneo.....	36
4.1.1 Características del sistema de coordenadas normal tangencial (n, t) ...	36
4.1.2 Posición en coordenadas (n, t)	37
4.1.3 Radio de curvatura (ρ)	37

4.1.4 Vector de velocidad	38
4.1.5 Vector de aceleración	39
4.2 Ejemplo ilustrativo para el movimiento curvilíneo utilizando coordenadas (n, t)	42
4.2.1 Solución	42
4.2.2 Etapa 1. Comprensión del problema de estudio	42
4.2.3 Algunos datos para el estudio	42
4.2.4 Etapa 2. Planteamiento de un modelo físico	43
4.2.5 Etapa 3. Planteamiento analítico	43
4.2.6 Etapa 4. Interpretación y validación de los resultados obtenidos	45
4.3 Ejercicio propuesto en coordenadas (n, t)	46
5. MOVIMIENTO CURVILÍNEO EN EL PLANO UTILIZANDO EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES (r, θ)	47
5.1 Conocimientos previos para el movimiento curvilíneo en el sistema de coordenadas polares (r, θ)	47
5.1.1 Establecimiento del sistema de coordenadas (r, θ)	47
5.1.2 Ecuaciones que rigen el comportamiento de la partícula en el sistema de coordenadas (r, θ)	48
5.1.3 Coordenadas cilíndricas	51
5.1.4 Aplicaciones típicas para el uso de coordenadas (r, θ)	52
5.2 Ejemplo ilustrativo para aplicación del sistema de coordenadas polares (r, θ)	54
5.2.1 Solución	54
5.2.2 Etapa 1. Comprensión del problema	54
5.2.3 Etapa 2. Planteamiento de un modelo físico	55
5.2.4 Etapa 3. Planteamiento analítico	55
5.2.5 Etapa 4. Interpretación y validación de los resultados obtenidos	57
5.3 Ejercicios propuestos para su solución por coordenadas polares (Hibbeler, 2004-2010-2016)	58

6. MOVIMIENTO DEPENDIENTE ABSOLUTO DE PARTÍCULAS.....	60
6.1 Conocimientos previos para el movimiento absoluto de partículas.....	60
6.1.1 Aspectos teóricos	60
6.1.2 Aplicaciones típicas de sistemas de cables y poleas articulados con otros elementos	61
6.2 Ejemplo ilustrativo para aplicación del movimiento absoluto y dependiente de partículas.....	63
6.2.1 Solución	63
6.2.2 Etapa 1. Comprensión del problema	63
6.2.3 Etapa 2. Planteamiento de los modelos físicos para el movimiento de las poleas A, B y C	64
6.2.4 Etapa 3. Planteamiento de la ecuación de longitud de cuerda	65
6.2.5 Etapa 4. Análisis y validación de resultados	68
6.3 Problemas propuestos con movimiento dependiente	69
REFERENCIAS	70
SOBRE LOS AUTORES.....	71

INTRODUCCIÓN

La dinámica es una rama de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos materiales (objetos de estudio), en función del tiempo. Si el movimiento del cuerpo se lleva a cabo con variaciones de velocidad constantes en el tiempo, se trata de un movimiento uniforme o movimiento con aceleración constante, pero si el movimiento ocurre con variaciones de velocidad no constantes en el tiempo, se trata de un movimiento uniformemente acelerado, desacelerado o movimiento con aceleración variable. Adicionalmente, el comportamiento dinámico puede ser tratado como el de una partícula, representado por un único vector de velocidad en su centro de masa y sin rotación alrededor de su centro de masa; sin embargo, si dicho movimiento implica la rotación de un punto cualquiera del cuerpo material alrededor de su centro de masa, el comportamiento dinámico corresponde al de un cuerpo rígido. En este último caso, la velocidad en cualquier punto del cuerpo rígido no puede representarse por un único vector de velocidad, y por lo tanto su magnitud, dirección y sentido para un mismo instante de tiempo podrían ser diferentes.

De manera global, el estudio de la dinámica de los cuerpos materiales suele dividirse en dos grandes áreas: una relacionada con la descripción del movimiento de los cuerpos sin importar las causas que lo ocasionan, denominada cinemática; mientras que la segunda gran área de la dinámica, está relacionada con el efecto de las fuerzas y momentos externos que causan el movimiento del cuerpo, denominada cinética.

En el libro “Principios de cinemática de partículas para ingenieros” se trata la primera área, donde se destaca que la cinemática permite obtener las diferentes variables y/o parámetros presentes en el movimiento como: desplazamientos (trayectorias), velocidades, aceleraciones y/o la combinación de ellas en función del tiempo, partiendo de las definiciones establecidas en la mecánica del movimiento estudiada por Newton, bien sea en trayectorias lineales como en trayectorias curvilíneas. En este sentido, dependiendo del tipo de problema a resolver y de las variables que se deseen evaluar, de acuerdo con el tipo de problema y/o aplicación de ingeniería, se opta por un método particular o una combinación para dar solución a los problemas. Estos métodos y/o combinación de estos utilizando diferentes sistemas de referencia, se detallarán en el desarrollo de este libro introductorio de “Principios de cinemática de partícula para ingenieros”.

Con el fin de establecer resultados de aprendizaje para la cinemática de partícula de manera comparativa con la cinemática del cuerpo rígido, el libro “Principios de cinemática de partículas para ingenieros” considera de manera específica los siguientes capítulos:

- El capítulo 1, presenta un comparativo del comportamiento dinámico de la partícula y del cuerpo rígido, y una breve metodología para resolver los problemas de cinemática de partícula.
- Los capítulos 2 al 6, abordan la cinemática de partícula considerando los tres sistemas de coordenadas y/o de referencia: cartesiano o rectangular (x, y, z);

normal-tangencial (n, t) y el polar-cilíndrico (r, θ, z) . En estos capítulos, se evalúan los diferentes parámetros de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo para algunos componentes de sistemas mecánicos y/o elementos de máquinas.

Es importante advertir al lector que, para cada uno de los temas específicos en cinemática, que conforman los seis capítulos mencionados se desarrolla un ejemplo ilustrativo aplicando la metodología propuesta, con el fin de adquirir competencias y habilidades para la solución de cualquier problema que se plantee de los autores reconocidos y/o de los textos tradicionales que se recomiendan en las instituciones de educación superior a nivel global.

No sobra mencionar que los problemas de cinemática se resuelven considerando los sistemas de referencia universales: cartesiano (x, y, z) ; el normal-tangencial (n, t) y el polar-cilíndrico (r, θ, z) , los cuales se espera que los estudiantes y/o lectores tengan los conocimientos suficientes adquiridos en cursos previos de cálculo diferencial e integral, álgebra, trigonometría y física mecánica.

Finalmente, es importante mencionar que en la solución de los problemas se implementa una metodología detallada y secuencial conformada por cuatro etapas, la cual se sintetiza a continuación:

- Etapa 1, de comprensión y entendimiento del problema, identifica y caracteriza el comportamiento del cuerpo material (partícula o cuerpo rígido); establece las variables, parámetros e incógnitas del problema; plantea suposiciones y/o posibles hipótesis a utilizar durante las etapas posteriores, en particular en la analítica; identifica e interpreta la información y datos que entrega el problema; discute sobre un posible método de solución al problema, de acuerdo con las especificaciones de cada caso. De acuerdo con el grado de claridad que se le dé al problema en esta etapa es muy posible que se brinden elementos para establecer modelos físicos simplificados de la situación problema y/o para posibles planteamientos analíticos que apoyaran las siguientes etapas de la metodología.
- Etapa 2, contempla el planteamiento de un modelo físico que sintetiza el problema, considerando un sistema de referencia que permita establecer los parámetros cinemáticos que representan el comportamiento del cuerpo material. En esta etapa, se establecen los diferentes modelos y/o esquemas gráficos considerando geometría, dimensiones, niveles de referencia, parámetros y/o variables específicas del problema.
- Etapa 3, desarrolla el planteamiento matemático y/o analítico que se soporta en el modelo gráfico cinemático y en los demás esquemas posibles que sintetizan la situación física del problema. Entre la Etapa 3 y la Etapa 2, debe existir 100% de coherencia, dado que una explica a la otra o da respuesta a la otra. Es decir, el planteamiento analítico se realiza a partir de los modelos gráficos y de los

principios y/o ecuaciones de cinemática que se aplican específicamente a ese modelo y no a otro. Los modelos gráficos son específicos y tienen validez plena con el planteamiento analítico de la Etapa 3.

- Etapa 4, permite ampliar el entendimiento y comprensión de un problema determinado, incluso proyectarlo a otras dimensiones y/o aplicaciones. Esta etapa es muy importante porque no cierra el aprendizaje, sino que lo abre a nuevas posibilidades y permite fortalecer los conocimientos y fundamentos. No solo acá es importante la interpretación de los resultados, también es posible la exploración de estos en otras aplicaciones similares, incluso plantearse nuevas hipótesis, nuevas formas de solucionar el problema, comparar métodos, comparar e interpretar resultados entre tantas posibilidades.

1. CONCEPTOS DE LA PARTÍCULA Y DEL CUERPO RÍGIDO

1.1 Conceptos básicos del cuerpo material

- **Resultado de aprendizaje**

Desarrollar capacidades y habilidades conceptuales para establecer y diferenciar el comportamiento entre una partícula y un cuerpo rígido y sentar las bases para implementar una metodología de solución de problemas que pueda extenderse al curso de dinámica.

1.1.1 Consideraciones generales para abordar problemas de la dinámica

- **Concepto base de partícula**

En la cinemática de partícula, se considera que el objeto material de estudio, independiente de su tamaño, peso y geometría, no sufre cambios estructurales en ninguno de sus puntos materiales. Además, se considera que ningún punto del cuerpo material presenta una rotación alrededor de su Centro de Masa (CM); es decir, el movimiento del cuerpo material puede representarse por el movimiento del CM del cuerpo de estudio y viceversa.

- **Paralelo entre la estática y la dinámica**

En un curso previo de estática en ingeniería y/o de física mecánica se logra identificar, comprender y describir las características del comportamiento del cuerpo material: el de una partícula o de un cuerpo rígido, en función de las fuerzas y momentos externos que provocan el movimiento del cuerpo material, en estado de equilibrio, en ausencia de aceleración.

- **Ejemplo 1**

Si se aplica la Segunda Ley de Newton y el cuerpo material no se desplaza, la velocidad en cada instante es cero y por lo tanto no existe aceleración, de manera que la Segunda Ley de Newton es cero:

$$(\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0) \quad ; \quad (\sum \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0)$$

- **Ejemplo 2**

Si un cuerpo material se desplaza con velocidad constante en el tiempo, su aceleración, debida al cambio de la velocidad en el tiempo, es nula y por lo tanto aplicando la Segunda Ley de Newton al movimiento del cuerpo es cero.

La diferencia entre ambos casos radica en que en el primero de ellos el cuerpo material permanece en reposo y en el segundo se desplaza con velocidad constante. Lo común entre ambos casos es que no existe aceleración porque no hay cambios de velocidad en función del tiempo.

Para el caso de la dinámica, el cuerpo material siempre se desplaza, con algún movimiento característico: lineal, relativo, absoluto, oscilatorio, pendular, parabólico, circular y/o curvilíneo general, pero dicho desplazamiento ocurre con variaciones de la velocidad para cualquier instante de tiempo de interés particular. Es decir, siempre existe una aceleración resultante durante su desplazamiento y por lo tanto la Segunda Ley de Newton es diferente de cero.

• **Consideraciones sobre condiciones cinemáticas de los cuerpos materiales**

- **Podrían acelerarse.** Situación en la cual la velocidad incrementa con el tiempo.
- **Podrían desacelerarse.** Situación en la cual la velocidad disminuye con el tiempo.
- **Podrían moverse inicialmente con una velocidad diferente de cero y en otro instante cualquiera podrían llegar a una velocidad nula.** Movimiento ascendente o tiro vertical; movimiento lineal oscilatorio (alternativo).
- **Podrían partir de una velocidad nula y acelerar un instante posterior.** Movimiento vertical de un ascensor, golpe a una pelota, lanzamiento de un plato volador, el movimiento lineal y alternativo de un pistón, lanzamiento de un proyectil en un sistema inercial, entre múltiples casos.

• **Caracterización de los cuerpos materiales: Partícula o cuerpo rígido**

Es importante considerar que, en la caracterización cinemática de un cuerpo material, dentro de un sistema de referencia, existen restricciones de movimiento bien sea en el desplazamiento en una o varias direcciones e incluso en la rotación sobre alguno de los ejes, lo cual implica que la aplicación de la Segunda Ley de Newton sobre los ejes con restricción es cero. Para las demás direcciones, donde no existe la restricción del movimiento lineal acelerado o para movimiento con rotación acelerado, la Segunda Ley de Newton es diferente de cero, por lo tanto, las variables cinemáticas del cuerpo material podrían cambiar en función del tiempo.

Cuerpo con movimiento acelerado:

$$(\sum \vec{F} = m\vec{a} \neq 0) \quad ; \quad (\sum \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \neq 0)$$

En el caso particular, del movimiento del cuerpo material que incluye rotación alrededor de un eje cualquiera que atraviesa al cuerpo, incluido su centro de masa, el

comportamiento del cuerpo es de un cuerpo rígido. Esto implica que tanto las magnitudes de la velocidad sobre los diferentes puntos materiales del cuerpo rígido como sus direcciones podrían ser diferentes. Esta diferencia es evidente cuando varía la velocidad angular de rotación y por lo tanto la aceleración angular varía en el tiempo.

A diferencia del movimiento de traslación lineal, donde la dirección y sentido de las velocidades se mantiene constante, durante el movimiento rotacional los cuerpos sufren variaciones en sus direcciones en los diferentes puntos materiales del cuerpo rígido.

Una clave importante para caracterizar el movimiento de un cuerpo material es identificar como se mueve un punto cualquiera dentro del cuerpo con relación a su centro de masa y si existe una rotación de este punto con relación al centro de masa, el comportamiento del cuerpo material se estudia como el comportamiento de un cuerpo rígido. Por lo tanto, las ecuaciones que evalúan el movimiento del cuerpo rígido, son las ecuaciones que consideran rotación.

• **Aplicaciones de la dinámica**

Es importante tener presente que de acuerdo con las exigencias funcionales en las cuales debe operar un componente, sistema, mecanismo o máquina en un área cualquiera de la industria, se decide el tipo de diseño bien sea mediante los cálculos estáticos o dinámicos. Por ejemplo, para el caso de máquinas y estructuras que operan con altas velocidades y aceleraciones los cálculos son fundados en los principios de la dinámica, más que en la estática (Meriam y Kraige, 2012-2014).

Algunas aplicaciones en las cuales prima el diseño mediante los cálculos dinámicos, más que los cálculos por la estática, son las siguientes (Meriam y Kraige, 2012-2014):

- Diseño de estructuras móviles, cohetes, misiles, naves espaciales, aviones, vehículos de transporte terrestre.
- Diseño de estructuras fijas sometidas a cargas de choque y/o de impacto.
- Dispositivos para robots, sistemas de control automático, balística, electrónica, sistemas eléctricos.
- Diseño de turbinas, bombas, motores eléctricos, motores alternativos, polipastos, máquinas herramienta, entre otros.
- Diseño de maquinaria para el procesamiento y empaque de alimentos y bebidas, entre otros.

Otras aplicaciones importantes del diseño de equipos y sistemas en las industrias están asociadas con:

- Diseño del tren de aterrizaje de aviones.
- Diseño de los elementos mecánicos para una grúa.

- Diseño de compresores para diferentes aplicaciones en la industria del petróleo, cemento, alimentos, ente otras.
- Diseño de suspensiones y direcciones de ruedas en vehículos automotores.

1.1.2 Metodología propuesta para la solución de problemas de dinámica

Se propone un procedimiento metodológico que facilita la comprensión del problema a partir del entendimiento del enunciado y la interpretación de la información de los datos que se entregan y, en consecuencia, abstraer del mismo una posible solución.

Este procedimiento metodológico contempla varias etapas secuenciales:

- ***Etapas 1***

Inicia con un proceso de comprensión y entendimiento del problema.

- ***Etapas 2***

Continúa con el planteamiento de un modelo o modelos gráficos y físicos que sintetiza el problema.

- ***Etapas 3***

Se realiza el planteamiento analítico del problema, aplicando las herramientas matemáticas, las ecuaciones características y/o las definiciones básicas que rigen el comportamiento dinámico de los cuerpos.

- ***Etapas 4***

Se cierra el ciclo con un proceso de validación, retroalimentación, síntesis y/o ampliación de los resultados obtenidos, con fines de fortalecimiento argumentativo.

Con fines de ampliar y detallar la metodología propuesta, para cada una de las etapas se desglosan las actividades a desarrollar, considerando que cada problema, es un caso específico y para el mismo, pueden existir múltiples soluciones, de acuerdo con los métodos y herramientas que se utilicen.

Ampliamos el procedimiento metodológico de cada una de las etapas:

- ***Etapas 1. Comprensión y entendimiento detallado del problema***

Durante esta etapa se requiere desarrollar los siguientes propósitos, con fines de avanzar la solución coherente del problema de estudio:

- Interpretar y comprender la naturaleza física y analítica del problema mediante la lectura crítica, estableciendo las posibles variables, parámetros y/o incógnitas que se requieren para una posible solución.
- Contextualizar coherentemente a partir de la formulación del problema, las hipótesis y los datos entregados, con fines de proyectarla en los posibles modelos físicos y analíticos que la puedan explicar.
- Establecer el tipo de comportamiento del cuerpo o cuerpos materiales de estudio mediante los fundamentos de la dinámica: comportamiento de partícula o de cuerpo rígido.
- Determinar y clasificar los parámetros dinámicos en el tiempo para cada punto de la trayectoria, al menos se requiere caracterizar dos puntos: una condición inicial y una condición final; sin embargo, hay condiciones intermedias (comunes) que también requieren de información.
- Plantear otras posibles hipótesis en caso de ser necesarias de acuerdo con la información específica del caso de estudio.

• ***Etapla 2. Planteamiento de un modelo o modelos físicos dinámicos que sintetizan la situación física del problema***

Similar a la etapa anterior, durante esta etapa se requiere cumplir con diferentes exigencias con fines de avanzar en la solución secuencial del problema:

- Plantear un posible modelo o modelos físicos, gráficos y/o esquemas detallados, con la información contextualizada y procesada en la etapa anterior, que la vez, permita el avance coherente y secuencial del problema en las posteriores etapas.
- Establecer claramente un sistema de referencia vectorial y/o escalar detallado y completo, con especificaciones geométricas, según la información y datos del problema, contextualizando la situación particular con fines de facilitar el procedimiento analítico posterior de solución.
- Identificar y ubicar los parámetros cinemáticos y/o cinéticos, las variables, las cotas, los niveles de referencia, las incógnitas y demás información pertinente sobre el modelo físico construido, que son necesarios y/o intervienen en la solución del problema.
- Plantear diferentes esquemas y gráficos necesarios para describir la geometría y/o la topología de las posiciones del cuerpo durante la trayectoria en el tiempo, con fines de ofrecer un mayor grado de detalle y/o complementar.

- ***Etapla 3. Desarrollo de un modelo o modelos matemático(s) y/o analíticos que expliquen los modelos físicos y permitan avanzar en los cálculos solicitados***

Conforme se ha mencionado en las etapas anteriores, es necesario la aplicación de los fundamentos de la dinámica, mediante ecuaciones analíticas que expliquen el planteamiento físico y brinden un procedimiento adecuado para la solución. A continuación, se detallan algunas actividades que deben desarrollarse:

- Establecer la formulación matemática y/o el planteamiento de las ecuaciones analíticas necesarias para resolver el problema, evidenciando el uso de herramientas matemáticas viables, que den solución y expliquen adecuadamente los modelos físicos planteados, en la etapa anterior.
- Realizar los cálculos matemáticos en concordancia con las ecuaciones planteadas, considerando la información del modelo físico, utilizando las hipótesis y los datos que entrega el problema. Este procedimiento debe garantizar la coherencia con el sistema de referencia y sus convenciones, con el fin de que los resultados obtenidos en esta etapa, brinden soporte adecuado a los modelos físicos y geométricos planteados, previamente.
- Utilizar adecuadamente los principios y fundamentos de la dinámica a cada caso particular, de acuerdo con la caracterización específica que se ha dado a los cuerpos materiales de estudio (partícula, cuerpo rígido); al tipo de movimiento que presentan; los efectos externos que originan el movimiento y sus consecuencias; las ecuaciones y métodos característicos que se utilizan para los cálculos matemáticos; el uso adecuado de hipótesis, las consideraciones a las restricciones de movimiento que tienen los cuerpos; el soporte de conocimientos previos y/o la utilización de información complementaria de apoyo, entre otras, que faciliten la búsqueda de las soluciones al problema planteado.
- Utilización de herramientas computacionales y/o de modelamiento gráfico y/o matemático que satisfagan completamente y guarden la coherencia con los modelos físicos establecidos.

- ***Etapla 4. Interpretación y validación de los resultados obtenidos***

Se establece como una etapa vital para la retroalimentación de resultados, de autoaprendizaje, de interpretación, de comparación y/o de proyección, de los resultados obtenidos. Se considera una etapa con gran potencial para fortalecer los fundamentos y conocimientos de la dinámica de los cuerpos materiales y proyectarlos a otras áreas que los requieren como insumo de cálculo previo para su implementación como: el diseño de componentes, de sistemas, de máquinas, de procesos; el diseño y desarrollo de materiales, el desempeño, mantenibilidad, y confiabilidad de elementos en sistemas y máquinas; entre múltiples posibilidades. En esta etapa se proponen actividades que brindan un valor agregado a los resultados y proyección de estos:

- Interpretar y validar los resultados obtenidos para los diferentes parámetros e incógnitas formuladas, considerando el uso adecuado de hipótesis, información, datos y modelos físicos utilizados. Nota: debe validarse la coherencia integral del proceso llevado a cabo para la solución del problema.
- Evaluar de manera crítica y/o autocrítica los resultados obtenidos con relación a los diferentes métodos y herramientas analíticas utilizadas: ecuaciones y modelos analíticos de la dinámica; herramientas de cálculo; herramientas de modelación gráfica; herramientas de simulación; herramientas computacionales, entre múltiples herramientas. Nota: toda evaluación, comparación, retroalimentación crítica y/o autocrítica debe considerar el rigor establecido en los principios y formulaciones de la dinámica para el comportamiento particular del cuerpo y/o cuerpos materiales de estudio.
- Realizar proyecciones de los resultados de acuerdo con los problemas específicos planteados a otras áreas de interés en la ingeniería, con fines de mejorar procesos de fundamentación, de retroalimentar conocimientos, entre otros. Es común potenciar a partir de los datos y resultados obtenidos para el problema, modificar, agregar, plantear otros posibles problemas para fortalecer y/o ampliar, conocimientos modificando la perspectiva del problema inicial, con fines de autoaprendizaje y de mejora continua.
- Realizar comparaciones y establecer conclusiones prácticas a partir de los resultados obtenidos con el problema específico y/o estudio de los casos planteados para potenciar conocimiento, con fines de autoaprendizaje activo y de mejoramiento continuo de la dinámica.

- ***Referencia general sobre Galileo Galilei y de Isaac Newton en relación con la dinámica***

- ***Galileo Galilei (1564-1642)***. Astrónomo Italiano (1609). Formuló las primeras leyes sobre el movimiento de los cuerpos. Metodología experimental en caída libre de cuerpos en torre de Pisa (“todos llegan al suelo con el mismo tiempo”) y movimiento pendular (1602). Inicio de la metodología científica moderna y argumentativa. Construcción de un plano inclinado de 6 metros pulido para reducir fricción. Sentó las bases para la caída de cuerpos en el vacío y el disparo de proyectiles.
- ***Isaac Newton (1642-1727)***. Científico y matemático británico. Tomo los fundamentos que dejaron Galileo y Kepler. Estableció las tres leyes fundamentales de la Dinámica (Ley de inercia, Ley de proporcionalidad y Ley de acción-reacción), publicadas en 1687. Formuló la Ley de atracción gravitatoria universal compitiendo con Robert Hooke en 1679. En 1685 comprobó su validez con la aplicación a la Luna.

2. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA. MOVIMIENTO RECTILÍNEO

- **Resultado de aprendizaje**

Desarrollar capacidades y habilidades para caracterizar el movimiento lineal (unidireccional, lineal oscilatorio, tiro vertical, caída libre, relativo, absoluto) o curvilíneo (parabólico, pendular, general $2D$, general $3D$), del cuerpo material independiente o haciendo parte de un sistema mecánico dentro de un sistema de referencia en función del tiempo, y utilizando los principios de la cinemática para el movimiento rectilíneo en $1D$, $2D$ o $3D$, soportado en las herramientas básicas de física mecánica, trigonometría, estática y/o de cálculo integral y diferencial.

2.1 Movimiento rectilíneo

- **Resultado de aprendizaje**

Desarrollar capacidades y habilidades para caracterizar el movimiento lineal del cuerpo material independiente o haciendo parte de un sistema mecánico para el sistema de referencia unidireccional, y utilizando los principios de la cinemática para el movimiento en $1D$, soportado en las herramientas básicas de física mecánica, trigonometría, estática y/o de cálculo integral y diferencial.

2.1.1 Conceptos básicos para el movimiento rectilíneo

Corresponde al movimiento de los objetos materiales que no rotan y que solo se trasladan; es decir, su centro de masa se desplaza en la misma dirección del objeto, por lo tanto, no hay cambios ni en la magnitud ni en la dirección de los vectores y/o variables cinemáticas de cualquier punto material del objeto en movimiento.

El movimiento de la partícula puede realizarse en una dimensión (una línea recta, rectilíneo), y corresponde al movimiento rectilíneo sobre una coordenada de un sistema de referencia y se denomina movimiento de traslación unidimensional (unidireccional o en un eje). Si se lleva a cabo en dos coordenadas simultáneamente o sobre plano de un sistema de referencia, se denomina movimiento de traslación bidimensional (bidireccional o en el plano). Si el movimiento rectilíneo ocurre en tres direcciones o en tres coordenadas simultáneas de un sistema de referencia, el movimiento se denomina movimiento de traslación tridimensional (tridireccional o espacial).

Se considera el concepto de partícula material ideal como un punto matemático sin extensión espacial, sin tamaño, que hace referencia al centro de masa del objeto. En este sentido, conforme se mueve el centro de masa se caracteriza el movimiento del objeto.

Con frecuencia, el modelo de partícula se considera práctico para representar situaciones donde se evalúa únicamente el movimiento de traslación sin importar el tamaño y la geometría del objeto. Por ejemplo, el movimiento de una bola de billar, de un disco volador (*frisbee*), de un vehículo de transporte, de un avión, de un cohete espacial, podría considerarse como el movimiento de una partícula, pero depende de la situación particular de dinámica y/o propiedad del cuerpo que se desee evaluar.

Es importante recordar algunos conceptos cinemáticos relacionados con las ecuaciones del movimiento de los cuerpos materiales en traslación como son: la posición, la velocidad y la aceleración, todas en función del tiempo; con fines de caracterización del comportamiento cinemático del cuerpo en un sistema de referencia.

• **Posición**

Se representa mediante un vector de posición que corresponde a la trayectoria rectilínea que realiza una partícula con relación a un origen y/o a un sistema de referencia. La posición es una cantidad vectorial, con magnitud y dirección (positiva, negativa) de acuerdo con el origen y/o el sistema de referencia que se utilice.

- **La posición como una función del tiempo.** Si se requiere obtener una ecuación para la posición de un cuerpo material como una función del tiempo, se lleva a cabo el siguiente procedimiento:

- A partir de la definición de velocidad instantánea (ecuación diferencial):

$$v = \frac{ds}{dt} = v_i + a_c t$$

- Integrando los diferenciales de posición y del tiempo :

$$\int_{s_i}^{s_f} ds = \int_0^{t_f} (v_i + a_c t) dt$$

Asumiendo que: $s=s_i$, cuando $t=0$

- Resolviendo las funciones diferenciales de posición (ds) y de tiempo (dt), se obtiene la ecuación para la posición de la partícula en función del tiempo:

$$s_f = s_i + v_i t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

- **Desplazamiento.** Analíticamente, corresponde al cambio en la posición que presenta una partícula entre una posición final y una posición inicial. De acuerdo con el sistema de referencia, el desplazamiento puede tener el sentido positivo (desplazamiento positivo) o el sentido negativo (desplazamiento negativo).

Se representa mediante la siguiente ecuación:

$$\Delta s = s_f - s_i$$

• **Velocidad**

Vector que representa el cambio en el vector posición con respecto al tiempo. A la magnitud de la velocidad se le conoce como rapidez o módulo y siempre es un valor (escalar) positivo. El sentido del vector de velocidad depende del sistema de referencia.

- **Rapidez promedio.** Escalar positivo que define la distancia total recorrida por una partícula (S_{total}) con relación al intervalo de tiempo transcurrido. Se define mediante la siguiente ecuación:

$$(v_{rap})_{prom} = \frac{S_{total}}{\Delta t}$$

- **Velocidad promedio** (v_{prom}). Distancia recorrida por una partícula (Δs) durante un intervalo de tiempo (Δt). Puede ser positiva o negativa dependiendo de las coordenadas de posición (s_f) y (s_i) y se representa mediante la siguiente ecuación:

$$v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- **Velocidad instantánea.** Vector definido por el límite de la velocidad promedio cuando el incremento de tiempo es muy pequeño ($\Delta t \rightarrow 0$); es decir, representa el diferencial del desplazamiento con respecto al diferencial del tiempo, según la siguiente ecuación:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{prom}$$

$$\rightarrow v = \frac{ds}{dt}$$

- **Velocidad como una función de la posición y de la aceleración.** Puede obtenerse una relación diferencial entre el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, combinando las ecuaciones diferenciales de velocidad y aceleración instantáneas, y eliminando de estas el diferencial del tiempo (dt) con el siguiente procedimiento:

- A partir de la definición de aceleración instantánea (ecuación diferencial):

$$a_c = \frac{dv}{dt}$$

- Igualando el diferencial de tiempo (dt) en la ecuación de velocidad con el diferencial de tiempo en la ecuación de aceleración, se tiene:

$$\frac{ds}{v} = \frac{dv}{a_c}$$

- Organizando los términos diferenciales de la igualdad anterior, se obtiene la ecuación diferencial que relaciona la aceleración, el desplazamiento y la velocidad:

$$a ds = v dv$$

- **Velocidad como una función del tiempo y de la aceleración.** Si se requiere obtener una ecuación para la velocidad como una función del tiempo y de la aceleración, se lleva a cabo el siguiente procedimiento:

- A partir de la ecuación diferencial para la aceleración constante dada por:

$$a_c = \frac{dv}{dt}$$

- Integrando los diferenciales de velocidad (dv) y de tiempo (dt):

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = \int_0^{t_f} a_c dt$$

- Considerando que los límites de integración corresponden a:

$$v = v_i, \quad \text{cuando } t = 0$$

$$v = v_f, \quad \text{cuando } t = t_f$$

- Resolviendo las diferenciales de velocidad (dv) y de tiempo (dt), se obtiene la ecuación de la velocidad en función del tiempo:

$$v_f = v_i + a_c t$$

$$a_c = \text{aceleración constante}$$

• Aceleración

Vector que representa el cambio de la velocidad en el tiempo.

- **Aceleración promedio** (a_{prom}). Representa el incremento de la velocidad (Δv) durante el intervalo de tiempo (Δt).
- **Aceleración instantánea.** Vector definido por el límite de la aceleración promedio cuando el incremento de tiempo es muy pequeño ($\Delta t \rightarrow 0$); es decir, representa el diferencial de la velocidad con respecto al diferencial del tiempo, según la siguiente ecuación:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{prom}$$

$$\rightarrow a = \frac{dv}{dt}$$

Nota: El vector de aceleración, similar al vector de velocidad y al vector de desplazamiento puede tener sentido positivo o negativo, de acuerdo con el sistema de referencia.

2.1.2 Ejemplo ilustrativo para el movimiento rectilíneo

Ejemplo ilustrativo para el movimiento rectilíneo

Una bola (*A*) es liberada del reposo a una altura de (40 *pies*), al mismo tiempo que una segunda bola (*B*) es lanzada hacia arriba desde (5 *pies*) con respecto al suelo. Si las bolas pasan una frente a la otra a una altura de (20 *pies*), determine la rapidez con que la bola (*B*) fue lanzada hacia arriba (Hibbeler, 2004-2010-2016).

• Solución

De acuerdo con la metodología propuesta en el libro se expondrán las diferentes etapas y se introducirán algunas reflexiones para que el estudiante se familiarice con la misma.

• Etapa 1. Comprensión del caso de estudio

- **Reflexión 1.** Identifique de manera general el comportamiento de cada una de las bolas y trate de describir y detallar las características del movimiento de cada una de ellas, contextualizando los siguientes cuestionamientos:
 - ¿Identifica la información general del movimiento de cada una de las bolas de acuerdo con la información que entrega el problema?
 - ¿Puede establecer y determinar qué tipo de movimiento rige a cada una de las bolas durante su trayectoria?
 - ¿Puede identificar y comprender las variables cinemáticas iniciales, durante y al final de la trayectoria de cada bola?
 - ¿Puede determinar y explicar brevemente con detalle el tipo de comportamiento que presenta cada una de las bolas (*A* y *B*) durante su trayectoria?

¿De acuerdo con el problema previamente comprendido, está de acuerdo con los siguientes planteamientos generales?

- El movimiento de la bola (*A*) es independiente de la bola (*B*), por lo tanto, puede plantearse un modelo para cada una de ellas.
- Los objetos de estudio denominados bola (*A*) y bola (*B*), presentan un movimiento de traslación en direcciones verticales y opuestas.
- La bola (*A*), presenta un movimiento en caída libre bajo la acción de la gravedad únicamente.

- La bola (*B*), presenta un movimiento vertical lineal ascendente en contra de la gravedad.
- Se puede establecer un sistema de referencia coordinado fijo y externo para cada una de las bolas, útil para la construcción de un modelo cinemático.
- Se identifican algunos parámetros cinemáticos al inicio, durante y al final de cada una de las trayectorias de las bolas.
- Se identifican parámetros y se establecen incógnitas cinemáticas para diferentes intervalos de tiempo durante la trayectoria de las bolas, incluido un punto común de encuentro cuando una bola pasa al frente de la otra.
- **Caracterización del movimiento para la bola (*A*)**
 - Describe una trayectoria rectilínea vertical hacia abajo en caída libre (traslación vertical descendente). Movimiento en una sola dirección.
 - Ninguno de sus puntos presenta una rotación sobre su centro de masa; es decir, el movimiento de su centro de masa representa el movimiento de la bola.
 - Su comportamiento se considera el de una partícula ideal, independiente de su tamaño, geometría, peso u otra característica topológica, dado que ningún punto del cuerpo de la bola presenta un cambio en la magnitud ni en la dirección de la velocidad, ni presenta una rotación.
- **Caracterización del movimiento para la bola (*B*)**
 - Describe una trayectoria rectilínea vertical hacia arriba en contra de la gravedad (traslación vertical ascendente).
 - Ninguno de sus puntos presenta una rotación sobre su centro de masa, similar al movimiento que se evidencia para la bola (*A*).
 - Su comportamiento se considera como el de una partícula ideal, similar al comportamiento de la bola (*A*).

Nota: las bolas (*A*) y (*B*) se desplazan de manera independiente una de la otra, es decir, que el movimiento de la bola (*B*), no depende del movimiento de la bola (*A*) y viceversa.

- **Etapa 2. Describir el movimiento de cada una de las bolas mediante un modelo físico independiente**
 - **Reflexión 2.** De acuerdo con la comprensión que tiene del problema para cada una de las bolas, establezca y describa mediante un modelo o modelos físicos las trayectorias de la bola (*A*) y la bola (*B*) contextualizando los siguientes cuestionamientos:
 - ¿Se establece con claridad un sistema de referencia y su ubicación?

- ¿Se identifica el sentido positivo y/o negativo de los vectores posición, desplazamiento y aceleración, definidos para cada instante durante la trayectoria de las bolas (A) y (B)?
- ¿Se define con detalle la geometría de la trayectoria para cada bola (A) y (B): forma, dimensiones, variables geométricas?
- ¿Se pueden establecer los parámetros y definir las variables cinemáticas durante la trayectoria del movimiento para cada una de las bolas (A) y (B):
¿durante el instante inicial, en el instante final y en instante de encuentro para cada una de las bolas?
- ¿Es posible identificar y seleccionar algunas de las ecuaciones de movimiento para describir y explicar el movimiento de las bolas (A) y (B)?

¿Considerando los cuestionamientos y reflexiones anteriores está de acuerdo con los siguientes modelos establecidos para las bolas (A) y (B), respectivamente? y ¿Qué otra consideración podría establecer?

- **Modelo físico cinemático para la bola (A).** La Figura 1, ilustra el modelo físico cinemático que representa el movimiento vertical en caída libre para la bola (A) bajo un sistema de referencia de un solo eje (y) vertical con dirección positiva hacia abajo. En particular se establecen los parámetros cinemáticos para la posición inicial (o) y para una posición intermedia de encuentro (e) para la bola (B).

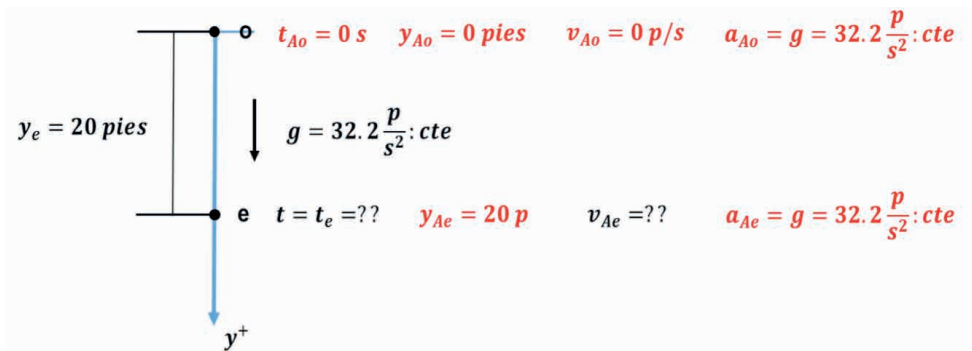


Figura 1. Modelo cinemático para el movimiento en caída libre de la bola (A) en un eje vertical (y), ilustrando los parámetros cinemáticos en los puntos inicial (o) y en el punto intermedio (e)

- **Modelo físico cinemático para la bola (B).** La Figura 2, ilustra el modelo físico cinemático que representa el movimiento vertical ascendente para la bola (B) en contra de la gravedad, bajo un sistema de referencia de un solo eje (y) vertical con dirección positiva hacia arriba. En particular se establecen los parámetros cinemáticos para la posición inicial (o) y para una posición intermedia de encuentro (e) con la bola (A).

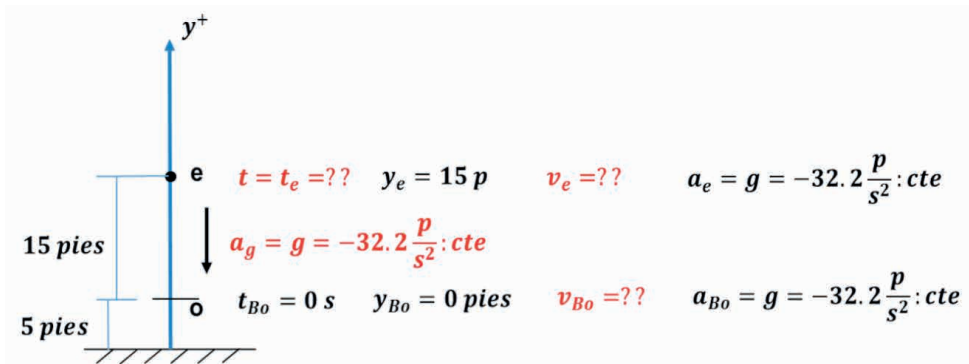


Figura 2. Modelo cinemático para el movimiento ascendente vertical en contra de la gravedad para la bola (B) en un eje vertical (y), ilustrando los parámetros cinemáticos en los puntos inicial (o) y en el punto intermedio (e) de encuentro con la bola (A)

• **Etapas 3. Planteamiento analítico del movimiento para las bolas A y B**

- **Reflexión 3.** De acuerdo con los modelos físicos planteados para cada una de las trayectorias de las bolas establezca las posibles ecuaciones de movimiento que expliquen analíticamente el comportamiento cinético, contextualizando los siguientes argumentos:
 - El planteamiento analítico explica con coherencia el modelo físico planteado para cada bola: utiliza la nomenclatura de los modelos, utiliza las variables y datos del problema, tiene coherencia con el sistema de referencia y con la geometría del problema.
 - Las ecuaciones analíticas planteadas no son memorísticas, guardan coherencia con el modelo y evidencian una posible solución a las incógnitas establecidas.

¿Considerando los cuestionamientos y reflexiones anteriores está de acuerdo con los siguientes planteamientos analíticos a fin de obtener las incógnitas planteadas en las Etapas 1 y 2, anteriores?

- **Planteamiento analítico para el movimiento de la bola (A) en el intervalo inicial y de encuentro ($o - e$).** De acuerdo con los parámetros cinemáticos establecidos para la posición, velocidad y aceleración en el instante inicial (tiempo cero) de la bola (A) y los parámetros cinemáticos de posición y aceleración para el instante en el punto de encuentro, se debe establecer ecuaciones diferenciales que relacionen dichas variables cinemáticas.

En particular, podría utilizarse la ecuación diferencial ($a_y d_y = v_y dv_y$), que relaciona la aceleración, la velocidad y el desplazamiento, siendo la velocidad de encuentro una de las incógnitas requeridas.

$$a_y d_y = v_y dv_y$$

De acuerdo con el modelo de la Figura 1 para la bola (A) y considerando los límites de integración para las variables cinemáticas de velocidad y desplazamiento en los puntos inicial (o) y de encuentro (e) con la bola (B) que se derivan del mismo, se replantean en la Figura 3.

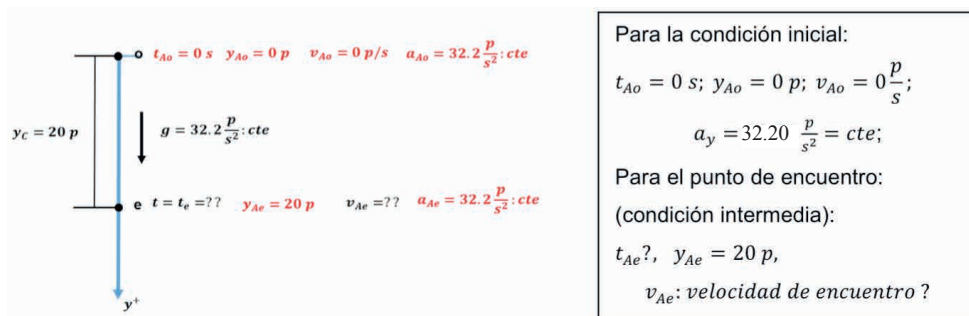


Figura 3. Modelo cinemático para el movimiento en caída libre de la bola (A) en un eje vertical (y), ilustrando los parámetros cinemáticos en los puntos inicial (o) y en el punto intermedio (e). Además, presenta las condiciones iniciales para el proceso de integración

- **Planteando la integración definida entre el tramo inicial y el punto de encuentro (tramo o-e) para la bola (A).** De acuerdo con el modelo para la bola (A), estableciendo los límites de integración para las variables cinemáticas de velocidad y desplazamiento que se derivan del mismo, se tiene:

$$\int_0^{20} a_y dy = \int_0^{v_{Ae}} v_y dv_y$$

Donde v_{Ae} es incógnita para la bola A en el punto de encuentro con $a_y = \text{cte}(+)$.

Con este procedimiento no se obliga a memorizar ni a utilizar una ecuación en particular, sino que la misma se construye a partir de las diferentes condiciones cinemáticas del problema y las relaciones existentes entre ellas. En este caso, se presenta una posición común (punto de encuentro), en el cual el tiempo de trayectoria es común y posteriormente requerido para el cálculo de velocidades en este punto. En particular, se solicita la rapidez de lanzamiento para la bola (B); es decir, la magnitud de la velocidad en el instante cero (condición inicial de velocidad).

Resolviendo la integral definida establecida, se tiene:

$$(32.20) * 20 = \frac{1}{2} v_{Ae}^2$$

$$\rightarrow v_{Ae} = 35.89 \frac{\text{p}}{\text{s}}$$

A continuación, utilizando la ecuación diferencial de aceleración $\left(a_y = \frac{dv_y}{dt}\right)$, que relaciona el cambio de la velocidad en el tiempo, puede plantearse la ecuación diferencial

para el tiempo de encuentro y la velocidad de encuentro de la bola (A):

$$\int_0^{t_e} a_y dt = \int_0^{v_{Ae}} dv_y \quad ; \quad \text{en } t = t_e, \quad v = v_{Ae}$$

Como la aceleración ($a_y = cte$), correspondiente a la gravedad es constante:

$$\rightarrow a_y \int_0^{t_e} dt = \int_0^{v_{Ae}} dv_y \quad ; \quad \text{con } a_y = 32.20 \frac{p}{s^2}$$

Se despeja el tiempo de encuentro (t_e):

$$t_e = \frac{v_{Ae}}{32.2} \quad ; \quad \text{con } v_{Ae} = 35.89 \frac{p}{s}$$

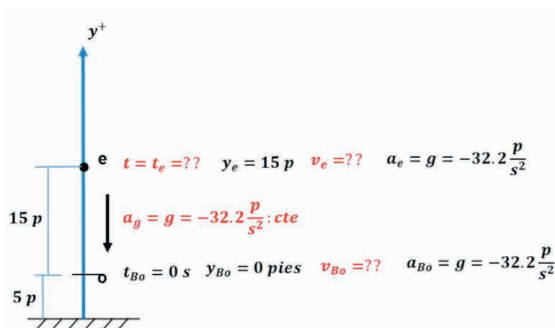
Realizado los cálculos, se obtiene (t_e), común a ambas bolas (A) y (B) en el punto de encuentro:

$$\rightarrow t_e = 1.11 \text{ s}$$

- **Planteamiento analítico para el movimiento de la bola (B) entre el intervalo inicial y el punto de encuentro (o - e).** Similar al procedimiento llevado a cabo para la bola (A), se realiza el planteamiento de ecuaciones analíticas para la bola (B), considerando que los parámetros cinemáticos de interés, son similares. Para el caso particular de la bola (B) que está ascendiendo, conforme al modelo y su sistema de referencia establecido, se seleccionan las condiciones tanto para el instante inicial (tiempo cero) como para el instante de encuentro, donde el tiempo común es el mismo para las trayectorias de ambas bolas.

Con la ecuación diferencial ($A_y d_y = v_y dv_y$), que relaciona la aceleración, la velocidad y el desplazamiento para la bola (B), en el tramo (o-e), con la velocidad inicial ($v_{Bo}=?$) y la velocidad de encuentro ($v_{Be}=?$) como incógnita del proceso. Por lo tanto, se requieren dos ecuaciones para obtener la solución de dichos parámetros cinemáticos.

En la Figura 4. Se presenta nuevamente la Figura 2, incorporando las condiciones iniciales en el punto (o) y de encuentro (e) para la bola (B) en su movimiento ascendente vertical.



Para la condición inicial:

$$t_{Bo} = 0 \text{ s}; \quad y_{Bo} = 0 \text{ p}; \quad v_{Ao} = 0 \frac{p}{s};$$

$$a_y = -32.20 \frac{p}{s^2} = cte;$$

Para el punto de encuentro:

(condición intermedia):

$$t_{Be} = 1.11 \text{ s}, \quad y_{Be} = 15 \text{ p},$$

$$v_{Be}: \text{velocidad de encuentro}$$

Figura 4. Modelo cinemático para el movimiento en caída libre de la bola (B) en un eje vertical (y), ilustrando los parámetros cinemáticos en los puntos inicial (o) y en el punto intermedio (e). Además, se complementa con las condiciones iniciales para el proceso de integración

- **Planteamiento de la integral definida en el intervalo inicial-punto de encuentro (tramo o-e) para la bola (B).** De acuerdo con el modelo planteado para la bola (B), estableciendo los límites de integración para las variables cinemáticas de velocidad y desplazamiento que se derivan del mismo, se plantea la integral:

$$\int_0^{15} a_y dy = \int_{v_{Bo}}^{v_{Be}} v_y dv_y$$

Donde (v_{Bo}) y (v_{Be}) son incógnitas para la bola (B) en el punto de encuentro y $[a_y = cte(-)]$.

Reemplazando los valores conocidos para la ecuación de movimiento de la bola (B), se tiene:

$$(-32.20) * 15 = \frac{1}{2} (v_{Be}^2 - v_{Bo}^2) \quad (1)$$

Similar al procedimiento utilizado para la bola (A), integrando la ecuación diferencial $(a_y = \frac{dv_y}{dt})$, para la bola (B) en el tramo (o-e) con sus respectivos límites de integración para la velocidad y el tiempo, considerando el parámetro tiempo de encuentro (t_e) común para ambas bolas, se plantea la integral:

$$\int_0^{t_e} a_y dt = \int_{v_{Bo}}^{v_{Be}} dv_y \quad ; \quad \text{en } t = t_e, \quad v = v_{Be}$$

Donde (v_{Bo}) y (v_{Be}) son incógnitas para la bola (B) en el punto de encuentro y $[a_y = cte(-)]$.

$$\rightarrow -(32.20) * t_e = v_{Be} - v_{Bo} \quad (2)$$

Despejando (v_{Be}) en la ecuación (2) y reemplazando en la ecuación (1), se encuentran los valores para (v_{Bo}) dado que la ecuación es cuadrática:

$$\rightarrow v_{Bo} = 4.34 \frac{p}{s} \text{ y } v_{Bo} = 66.50 \frac{p}{s}$$

• **Etapa 4. Interpretación y validación de los resultados obtenidos**

- **Reflexión 4.** Una vez se obtengan resultados coherentes con el modelamiento físico y analítico que sintetizan el problema de estudio, es necesario validar su pertinencia y de qué manera explican y/o dan solución a los problemas y/o incógnitas planteadas.

En particular, para el problema resuelto se cuestiona: ¿cuál debe ser es el valor correcto que satisface la pregunta problema, dado que por la naturaleza del problema se obtuvieron dos valores para la velocidad inicial (v_{Bo}) , la cual representa la incógnita principal?

Con los valores anteriormente obtenidos para (v_{Bo}) , realizando un análisis sobre la ecuación (2), al reemplazar dichos valores, el valor de $(v_{Bo}=4.34 \frac{p}{s})$, no satisface la ecuación, dado que se obtendría un valor de (v_{Be}) negativo (dirección) que tampoco satisface el modelo planteado para la bola (B), ni es coherente con el sistema de referencia utilizado. En este sentido se concluye que el valor de (v_{Bo}) , no podrá ser negativo para satisfacer analíticamente la ecuación (2). Por otro lado, si se considera el valor de $(v_{Bo}=66.50 \frac{p}{s})$, y si se reemplaza en la ecuación (2) el valor obtenido para (v_{Be}) , es positivo y menor que (v_{Bo}) , lo cual es racional, dado que de acuerdo con el modelo establecido y el sistema de referencia, la acción de la gravedad disminuye el valor de la velocidad durante el movimiento ascendente de la bola (B). En este sentido, dicho valor es coherente con el modelo físico establecido y se valida analíticamente con la ecuación (2).

Se concluye que el valor correcto para (v_{Be}) , es:

$$v_{Be} = 31.38 \frac{p}{s}$$

Que corresponde con la velocidad para el punto de encuentro de las (A) y (B) para un tiempo común $(t_e=1.11s)$.

3. MOVIMIENTO CURVILÍNEO UTILIZANDO COORDENADAS CON COMPONENTES RECTANGULARES

• Resultado de aprendizaje

Desarrollar capacidades y habilidades para caracterizar el movimiento curvilíneo en 2D del cuerpo material independiente o haciendo parte de un sistema mecánico con el sistema de referencia en coordenadas rectangulares, y utilizando los principios de la cinemática para el movimiento en el plano 2D, soportado en las herramientas básicas de física mecánica, trigonometría, estática y/o de cálculo integral y diferencial.

3.1 Conceptos previos para el movimiento curvilíneo

3.1.1 Ecuación de la posición

La posición de la partícula se establece mediante un sistema de coordenadas rectangulares (x, y, z) en función del tiempo, que representan individualmente la posición unidireccional de la partícula sobre cada eje coordenado. En la Figura 5, la trayectoria de la partícula se representa por la curva espacial “s”, sobre un sistema de referencia (x, y, z) . La posición para cualquier instante de tiempo en cada eje coordenado, se especifica mediante las coordenadas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

Coordenadas de posición en función del tiempo

$$x=x(t); y=y(t); z=z(t)$$

El vector de posición está representado por la suma vectorial de cada una de las componentes unidireccionales.

$$\text{Vector posición: } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\text{Vector posición en función del tiempo: } \vec{r} = \vec{r}(t)$$

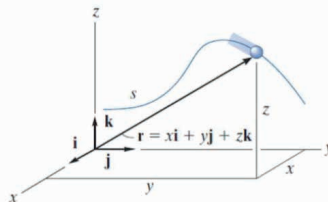


Figura 5. Curva en el espacio para representar el vector de posición ($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$), en función del tiempo $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Adaptada de (Hibbeler, 2004-2010-2016)

Su magnitud se obtiene mediante el cálculo de la raíz cuadrada de la sumatoria de las magnitudes de sus componentes elevadas al cuadrado.

Magnitud del vector posición: $|\vec{r}| = |x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}|$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

La dirección del vector de posición $\vec{r}$ se especifica mediante las componentes del vector unitario:

Magnitud del vector unitario de posición:

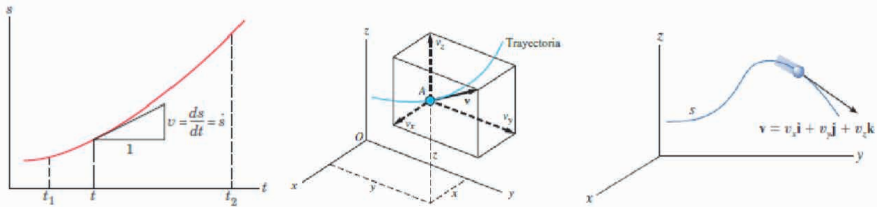
$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

3.1.2 Ecuación vectorial de la velocidad

La velocidad de la partícula se establece mediante la sumatoria vectorial de las derivadas en el tiempo de cada una de las componentes de posición (x, y, z); las cuales, individualmente, representan la componente unidireccional de velocidad de la partícula en cada eje coordenado. La ecuación característica para el vector de velocidad, considerando los vectores unitarios, está dada por la expresión siguiente y en la Figura 6, se ilustran diferentes trayectorias en el plano (2D) y en el espacio (3D) en coordenadas cartesianas, utilizadas por diferentes autores. (Meriam y Kraige, 2012-2014; Hibbeler, 2004-2010-2016; Pytel y Kiusalaas, 2012).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i}) + \frac{d}{dt}(y\vec{j}) + \frac{d}{dt}(z\vec{k})$$

Ecuación vectorial de la velocidad para trayectorias 2D y 3D



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i}) + \frac{d}{dt}(y\vec{j}) + \frac{d}{dt}(z\vec{k})$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} ; \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$

Figura 6. Representación del vector de velocidad para trayectorias en 2D y 3D, considerando sus componentes direccionales en los diferentes sistemas de referencia cartesiano. Adaptada de (Meriam y Kraige, 2012-2014; Hibbeler, 2004-2010-2016; Pytel y Kiusalaas, 2012)

Al derivar la primera componente vectorial $\frac{d}{dt}(x\vec{i})$ se tiene:

Componente vectorial de la velocidad en la coordenada x :

$$\frac{d}{dt}(x\vec{i}) = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{Magnitud}} \underbrace{(\vec{i})}_{\text{Dirección}} + x \frac{d\vec{i}}{dt}$$

En esta derivada, el segundo término de la derecha es cero (derivada del vector unitario), dado que los ejes de referencia son fijos y no rotan con relación al tiempo, por lo tanto, la dirección del vector unitario $\vec{i}$ no cambian con el tiempo. Igual ocurre con las demás componentes direccionales para los vectores unitarios $\vec{j}$, $\vec{k}$, correspondientes a las coordenadas y , z , respectivamente.

De esta manera el vector de velocidad, se representa por la ecuación siguiente:

Representación vectorial de la velocidad de la partícula:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Mientras que, la representación escalar, del vector de velocidad para cada una de las componentes cartesianas (ortogonales, rectangulares), corresponde a la magnitud de la derivada en cada eje coordenado expresado de la siguiente manera:

La magnitud del vector velocidad se obtiene mediante la raíz cuadrada de la sumatoria de sus componentes elevadas al cuadrado, según la ecuación:

La dirección del vector de velocidad $\vec{v}$, se especifica mediante las diferentes componentes del vector unitario $\vec{u}_v$:

Magnitud del vector velocidad para cada eje coordenado:

$$v_x = \dot{x} , \quad v_y = \dot{y} , \quad v_z = \dot{z}$$

Vector posición en función del tiempo: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Magnitud del vector velocidad: $|\vec{v}| = |\vec{v}_i + \vec{v}_j + \vec{v}_k|$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Magnitud del vector unitario de velocidad:

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{v}$$

3.1.3 Ecuación de la aceleración

La aceleración de la partícula se establece mediante la sumatoria de las derivadas en el tiempo de cada una de las componentes de velocidad $\dot{v}_x$, $\dot{v}_y$, $\dot{v}_z$, o la sumatoria de las segundas derivadas de la posición con respecto al tiempo, las cuales individualmente

representan a la componente unidireccional de velocidad de la partícula para cada eje coordenado. La ecuación característica para el vector de aceleración, considerando las componentes direccionales utilizadas por diferentes autores para sistemas cartesianos, se representa por la siguiente expresión, y en la Figura 7, se ilustran diferentes trayectorias en el plano (2D) y en el espacio (3D) en sistemas cartesianos, utilizadas por diferentes autores (Meriam y Kraige, 2012-2014; Hibbeler, 2004-2010-2016; Pytel y Kiusalaas, 2012).

Ecuación vectorial de la aceleración

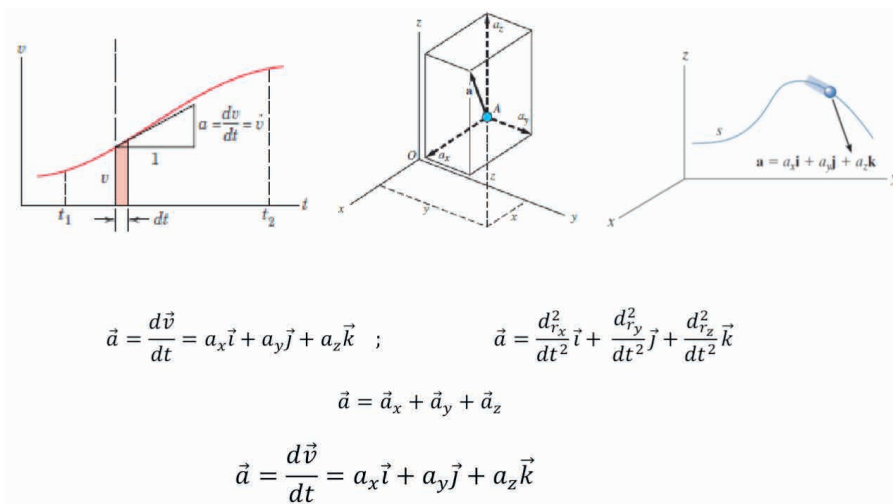


Figura 7. Representación del vector de aceleración para trayectorias en 2D y 3D, considerando sus componentes direccionales en los diferentes sistemas de referencia cartesiano. Adaptada de (Meriam y Kraige, 2012-2014; Hibbeler, 2004-2010-2016; Pytel y Kiusalaas, 2012)

Mientras que, las componentes escalares del vector de aceleración en el sistema cartesiano (ortogonal, rectangular), corresponde a la magnitud de la derivada en cada eje coordenado expresado de la siguiente manera:

Componentes escalares del vector aceleración para cada eje coordenado:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} , \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} , \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

La magnitud del vector aceleración se obtiene mediante la raíz cuadrada de la sumatoria de sus componentes elevadas al cuadrado, según la ecuación:

Magnitud del vector aceleración: $|\vec{a}| = |\vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z|$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

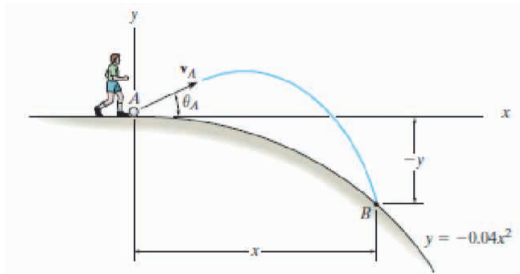
La dirección del vector de aceleración ($\vec{a}$) se especifica mediante las componentes del vector unitario ($\vec{u}_a$):

Magnitud del vector unitario de velocidad:

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{a}$$

3.2 Ejemplo ilustrativo para el movimiento curvilíneo utilizando coordenadas rectangulares (x, y)

Una pelota situada en A es pateada de forma tal que ($\theta_A=30^\circ$). Si toca el suelo en el punto B en ($x=15$ pies), ($y=-9$ pies). Determinar la rapidez con que es pateada y la rapidez con que toca el suelo (Hibbeler, 2004-2010-2016).



3.2.1 Solución

Se utilizará la metodología descrita en el capítulo 2 cinemática de la partícula. movimiento rectilíneo en cada uno de los ejes (x) e (y).

3.2.2 Etapa 1. Comprensión del caso de estudio

Considerando que el movimiento de la pelota describe una trayectoria parabólica a partir de un sistema de referencia (x, y), según se ilustra en el esquema gráfico y en la información que entrega el enunciado del problema. Para una mayor comprensión del problema se realiza la siguiente caracterización del movimiento de la pelota:

- Se asume que la pelota sigue una trayectoria parabólica a partir del sistema de referencia (x, y), previamente establecido, con un ángulo de elevación ($\theta_A=30^\circ$), y una velocidad inicial (v_A desconocida). El movimiento se realiza en el plano vertical (x, y).
- Se asume que, durante el movimiento, la pelota no gira sobre su centro de masa; por lo tanto, su trayectoria podría considerarse completamente curvilínea. Además, su comportamiento es propio de una partícula.
- Como la pelota no realiza una parábola completa dado el origen de donde inicia su movimiento la posición final en la ordenada vertical (y) está por debajo del nivel de referencia y de ahí el sentido negativo que se refleja en los datos.

- Como es bien conocido por las características del movimiento parabólico el movimiento horizontal en (x) se realiza con velocidad constante ($v_x = cte$), mientras que el movimiento vertical (y) se lleva a cabo bajo la acción de la gravedad, situación que debe considerarse en los sistemas de referencia que se establezcan para los puntos inicial, final del movimiento y durante su recorrido.
- También es conocido que el cálculo del parámetro cinemático “tiempo” (tiempo de vuelo), durante el movimiento parabólico es necesario para el cálculo de velocidades y/o distancias recorridas tanto horizontales como verticales, además este siempre es positivo.
- Finalmente, para proceder con la descripción de un modelo físico, es necesario establecer parámetros cinemáticos al inicio, durante y al final de la trayectoria, con miras a evaluar las ecuaciones de movimiento que se establezcan.

3.2.3 Etapa 2. Planteamiento de un modelo físico para el movimiento de la pelota

Tomando como base para el establecimiento del modelo el esquema inicial que presenta el problema, se ratifican los ejes coordenados positivos (x), y (y) a lo largo de la trayectoria parabólica, según se ilustra en la Figura 8, donde se establecen las condiciones cinemáticas para los puntos inicial (A) y final (B), bajo el sistema cartesiano (x, y). Estas direcciones positiva y negativa, deben considerarse en las ecuaciones que se establezcan durante el procedimiento analítico.

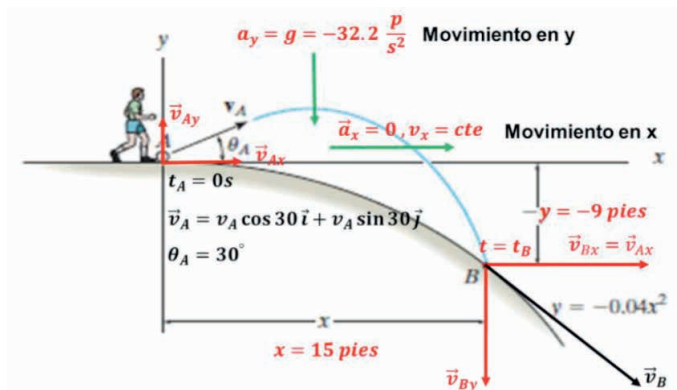


Figura 8. Modelo general para la trayectoria parabólica de la pelota entre (A) y (B) bajo el sistema de referencia (x, y), que ilustra los parámetros cinemáticos para dichos puntos. Adaptado de (Hibbeler, 2004-2010-2016)

- En la posición inicial se identifican y establecen los parámetros cinemáticos: $t_A = 0s$, $\vec{v}_A = v_A \cos 30^\circ \vec{i} + v_A \sin 30^\circ \vec{j}$, $\theta_A = 30^\circ$, $\vec{x}_A = 0p$, $\vec{y}_A = 0p$
- Durante la trayectoria entre A y B , se establece la gravedad $g = -32.20 \frac{p}{s^2}$, negativa puesto que va en dirección contraria a la dirección positiva del eje y .
- En la dirección x , de $\vec{v}_x = cte$, la $\vec{a}_x = 0$

- En el punto B , se consideran los sentidos positivos para los ejes de referencia establecidos: hacia arriba, el sentido positivo del *eje* y ; hacia la derecha, el sentido positivo del *eje* x . Además, en B , se establecen las demás variables cinemáticas: tiempo t_B ?, $\vec{v}_{Ax} = \vec{v}_{Bx}$, $y_B = -9 \text{ p}$, $x_B = 15 \text{ p}$

3.2.4 Etapa 3. Planteamiento analítico para el movimiento de la pelota

Es importante anotar que el problema solicita obtener las magnitudes de la velocidad tanto al inicio de la trayectoria (v_A), como al final de la trayectoria (v_B), y dado que el movimiento parabólico se realiza en dos ejes coordenados al tiempo (x , y), es necesario plantear dos modelos independientes en la dirección x como en la dirección y . Además, con las características del movimiento en cada uno de los ejes coordenados, en el eje horizontal, movimiento uniforme, sin aceleración, y en la dirección vertical, movimiento en caída libre, se realizan los diferentes planteamientos analíticos de las ecuaciones diferenciales que rigen dichos movimientos y se resuelven. Muy importante en el procedimiento el cálculo del tiempo de vuelo (t_B), el cual se utiliza en el planteamiento analítico para las diferentes ecuaciones.

- Planteamiento analítico para el movimiento de la pelota con velocidad constante sobre el eje horizontal (x).** Partiendo del esquema gráfico e ilustrativo que entrega el problema a resolver, considerando un modelo físico para describir el movimiento lineal sobre el eje coordenado horizontal x , se realiza el planteamiento analítico para el movimiento horizontal (dirección x), apoyado en el modelo físico de la Figura 9, donde se establecen las condiciones cinemáticas para los puntos inicial (A) y final (B), en la dirección (x).

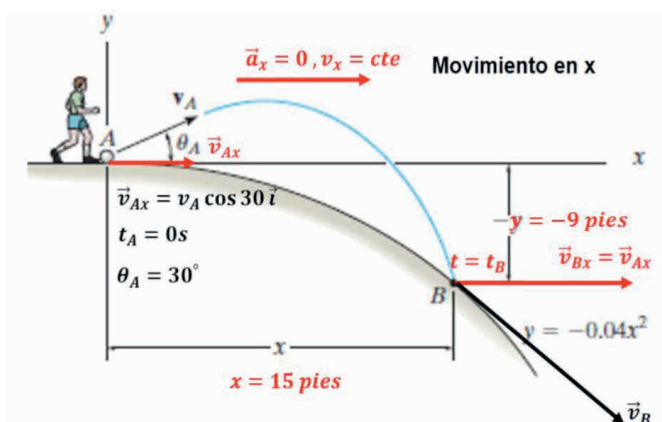


Figura 9. Modelo físico para apoyar el modelo analítico que describe el movimiento horizontal de la pelota en el eje (x) durante la trayectoria parabólica. Adaptado de (Hibbeler, 2004-2010-2016)

Partiendo del modelo físico que representa el movimiento horizontal, en el eje (x) según se esquematiza en la Figura 9, se inicia el planteamiento analítico.

Suposición: por las características del movimiento parabólico, en el movimiento horizontal, se despreja la fricción y por lo tanto la velocidad se mantiene constante durante la trayectoria.

→ $v_{Ax} = cte$, *despreciando fricción del viento con la pelota*

$$\rightarrow v_{Ax} = v_A \cos 30^\circ = v_{Bx} \quad (1), \text{ luego } v_{Ax} = v_{Bx}$$

Utilizando la ecuación diferencial de velocidad (definición de velocidad instantánea), donde la trayectoria es función del tiempo y dado que (v_{Ax}) y el tiempo de vuelo (t_B), desde el punto A hasta B se desconocen, se debe plantear otra ecuación que involucre a ambas incógnitas para su solución:

$$\text{Como } v_x = \frac{dx}{dt} = v_{Ax} = v_A \cos 30^\circ$$

Realizando un proceso de integración para la ecuación diferencial de velocidad, se tiene:

$$\int_0^{15} dx = \int_0^{t_B} v_A \cos 30^\circ dt$$

$$\text{en } t = 0s, \quad x = 0p$$

$$\text{en } t = t_B, \quad x = 15p$$

Resolviendo:

$$\rightarrow 15 = v_A t_B \cos 30^\circ \quad (2)$$

- **Planteamiento analítico para el movimiento de la pelota con aceleración de la gravedad sobre el eje vertical (y).** Partiendo del modelo gráfico general del movimiento parabólico para la pelota ilustrado en la Figura 8, se plantea el modelo específico de la Figura 10 para el movimiento vertical de la pelota sobre el eje (y), considerando la acción de la gravedad durante el movimiento desde el punto inicial (A) hasta el punto final (B). A partir del modelo de la Figura 10, que establece los parámetros cinemáticos de posición, velocidad, aceleración y tiempo para los puntos (A) y (B), se inicia el planteamiento analítico para el movimiento de la pelota sobre el eje (y).

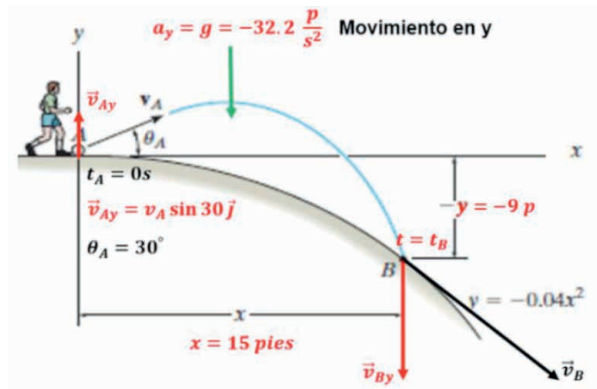


Figura 10. Modelo físico para describir el movimiento vertical sobre el eje (y) de la pelota durante la trayectoria parabólica desde (A) hasta (B), donde se ilustran los parámetros cinemáticos de posición, velocidad, aceleración y tiempo

Durante el movimiento descendente vertical conforme se ha establecido en el sistema de referencia sobre el eje (y) se tiene para la aceleración:

$$a_y = cte = -g \text{ (sentido negativo).}$$

Como el tiempo es un parámetro cinemático común tanto al movimiento horizontal en el eje (x) como al vertical en el eje (y), y dado que la aceleración de la gravedad es conocida y además constante, podría utilizarse la ecuación diferencial de aceleración que relaciona la velocidad en función del tiempo:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Realizando un proceso de integración sobre la ecuación diferencial de aceleración se tiene:

$$\int_{v_A \text{ sen } 30^\circ}^{-v_{By}} dv_y = \int_0^{t_B} a_y dt$$

$$\text{en } t = 0s, \quad v_{Ay} = v_A \text{ sen } 30^\circ \frac{p}{s}$$

$$\text{en } t = t_B, \quad v_{By} = -? \frac{p}{s}$$

Resolviendo:

$$-v_{By} - v_A \text{ sen } 30^\circ = -32.20 t_B \quad (3)$$

Como se desconocen (v_A), (v_{By}) y (t_B), podría utilizarse la ecuación diferencial que relaciona el desplazamiento, la velocidad y la aceleración constante:

Con $a_y = cte = -g$, utilizando $a_y dy = v_y dv_y$

Integrando la ecuación diferencial anterior:

$$\int_0^{-9} a_y dy = \int_{v_A \text{ sen } 30^\circ}^{-v_{By}} v_y dv_y$$

$$\text{en } y = 0p, \quad v_{Ay} = v_A \text{ sen } 30^\circ \frac{p}{s}$$

$$\text{en } y = -9, \quad v_{By} = -? \frac{p}{s}$$

Resolviendo:

$$-32.20 * (-9) = \frac{v_{By}^2}{2} - \frac{v_A^2 \text{ sen}^2 30^\circ}{2} \quad (4)$$

Despejando t_B de la ecuación (2), se tiene:

$$\rightarrow t_B = \frac{15}{v_A \cos 30^\circ} \quad (2')$$

Despejando v_{By} de la ecuación (3), se tiene:

$$\rightarrow v_{By} = 32.20 t_B - v_A \text{ sen } 30^\circ \quad (3')$$

Reemplazando (2') en (3'):

$$\rightarrow v_{By} = 32.20 \frac{15}{v_A \cos 30^\circ} - v_A \text{ sen } 30^\circ \quad (5)$$

• **Obtención de la magnitud de la velocidad para el punto inicial (v_A):**

Reemplazando (5) en (4):

$$(32.20 * 9) = \frac{\left(32.20 \frac{15}{v_A \cos 30^\circ} - v_A \text{ sen } 30^\circ\right)^2}{2} - \frac{v_A^2 \text{ sen}^2 30^\circ}{2}$$

$$(32.20 * 9) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{(32.20 * 15)^2}{(v_A \cos 30^\circ)^2} \right] - \left[\frac{2 * [(32.20) * (15) * (v_A \text{ sen } 30^\circ)]}{v_A \cos 30^\circ} \right] \right\}$$

$$(289.80) = \frac{1}{2} \left[\frac{(483)^2}{(0.75 v_A^2)} - (278.86) \right]$$

$$\frac{(483)^2}{(568.66) * (0.75) * (2)} = v_A^2$$

$$\rightarrow v_A = 16.54 \frac{p}{s}$$

• **Cálculo de la magnitud de la velocidad al final de la trayectoria (v_B):**

Para obtener dicha magnitud, es necesario obtener cada una de las componentes de velocidad en la dirección (x) y en la dirección y en el punto (B).

Como ya se ha obtenido el valor (v_A) se utilizará la ecuación (2') y se calcula el valor de (t_B) para obtener la magnitud de la velocidad vertical al final de la trayectoria (v_{By})

• **Obtención del valor del tiempo de vuelo (t_B):**

Con este valor de (v_A), reemplazamos en (2') y obtenemos el tiempo de vuelo (t_B):

$$\rightarrow t_B = 1.047s$$

Con el valor obtenido para (t_B), y de (v_A) reemplazando en (3'), se calcula la magnitud de (v_{By}):

$$\rightarrow v_{By} = (32.20) * 1.047 - 16.54 \text{ sen } 30^\circ$$

$$\rightarrow v_{By} = 25.44 \frac{p}{s}$$

• **Obtención de la rapidez para la velocidad al final de la trayectoria (v_B):**

Conocido el valor de ($v_{Ax} = v_{Bx}$), dado que la velocidad horizontal en el eje x es constante en todo el recorrido y conocido el valor para (v_{By}), en la dirección y en el punto B , es simple calcular la magnitud para la velocidad en el punto final (v_B) de la trayectoria:

Como:

$$v_{Ax} = v_{Bx} = v_A \cos 30^\circ$$

$$\rightarrow v_{Bx} = 16.54 \cos 30^\circ$$

$$\rightarrow v_{Bx} = 14.32 \frac{p}{s}$$

Como el valor obtenido de v_{By} es:

$$v_{By} = 25.44 \frac{p}{s}$$

$$\rightarrow v_B = \sqrt{(v_{Bx})^2 + (v_{By})^2}$$

$$\rightarrow v_B = \sqrt{(14.32)^2 + (25.44)^2}$$

$$\rightarrow v_B = 29.19 \frac{p}{s}$$

3.2.5 Etapa 4. Interpretación y validación de los resultados obtenidos

Comparando la magnitud de (v_B) > (v_A), dada la geometría de la trayectoria, donde se observa que el punto de partida de la pelota (posición A), se encuentra en un nivel superior al punto de llegada (posición B), de acuerdo con la ordenada vertical ($y = -9p$). Además, en concordancia con el sistema de referencia, se evidencia que la aceleración de la gravedad favorece de manera directa este incremento en la velocidad lineal vertical, dado que se trata de un movimiento en caída libre.

Al realizar un cálculo simple para validar la diferencia de las magnitudes de velocidad vertical se tiene:

Para la componente vertical de la velocidad en la posición inicial A:

$$v_{Ay} = v_A \sen 30^\circ$$

$$\rightarrow v_{Ay} = 8.27 \frac{p}{s}$$

y dado que la componente vertical de la velocidad calculada en la posición final B es:

$$v_{By} = 25.44 \frac{p}{s}$$

Se evidencia que la magnitud de velocidad $(v_{By}) > (v_{Ay})$:

$$\rightarrow 25.44 \frac{p}{s} > 8.27 \frac{p}{s}$$

Por otro lado, como las magnitudes de las componentes de la velocidad para la dirección x se mantienen constantes; es decir $(v_{Ax} = v_{Bx} = 14.32 \frac{p}{s})$, la diferencia en la magnitud de (v_B) y (v_A) se debe al incremento de la suma cuadrática en el valor de la componente vertical de la velocidad.

$$\rightarrow v_B = 29.19 \frac{p}{s} > v_A = 16.54 \frac{p}{s}$$

$$\rightarrow \sqrt{(14.32)^2 + (25.44)^2} = 29.19 \frac{p}{s} > \sqrt{(14.32)^2 + (8.27)^2} = 16.54 \frac{p}{s}$$

Se concluye que hay concordancia con el resultado encontrado.

También podría verificarse con la ecuación diferencial de la aceleración, con aceleración constante:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = cte = -g$$

Integrando la ecuación diferencial se tiene:

$$\int_0^{1.047s} a dt = \int_{8.27}^{v_{By}} dv_y$$

$$\text{en } t = 0s, \quad v_{Ay} = 8.27 \frac{p}{s}$$

$$\text{en } t = t_B = 1.047s, \quad v_{By} = -? \frac{p}{s}$$

$$\rightarrow -(32.20) * (1.047) = v_{By} - 8.27$$

$$\rightarrow -(32.20) * (1.047) = v_{By} - 8.27$$

$$\rightarrow v_{By} = -25.52 \frac{p}{s}$$

Donde el signo (-) significa que la dirección (v_{By}) es negativa; es decir, hacia abajo, como efectivamente está indicada en el modelo físico.

El obtenido para (v_{B_y}) es comparable con el obtenido mediante la ecuación (3') en los cálculos previos, el cual corresponde a: $(v_{B_y} = -25.44 \frac{p}{s})$. Por consiguiente, se concluye que:

$$\rightarrow v_{B_y} = -25.44 \frac{p}{s} \cong -25.52 \frac{p}{s}$$

4. MOVIMIENTO CURVILÍNEO GENERAL UTILIZANDO COORDENADAS NORMAL TANGENCIAL (n, t)

• **Resultado de aprendizaje**

Desarrollar capacidades y habilidades para caracterizar el movimiento curvilíneo en $2D$ del cuerpo material independiente o haciendo parte de un sistema mecánico con el sistema de referencia en coordenadas circulares (n, t) , y utilizando los principios de la cinemática para el movimiento en el plano $2D$, soportado en las herramientas básicas de física mecánica, trigonometría, estática y/o de cálculo integral y diferencial.

4.1 Conocimientos previos para el movimiento curvilíneo

4.1.1 Características del sistema de coordenadas normal tangencial (n, t)

- Sistema de dos componentes ortogonales usualmente utilizado cuando se conoce la trayectoria curvilínea de la partícula.
- Las coordenadas de los ejes (n, t) actúan en las direcciones normal y tangencial a la trayectoria y entre ellas son perpendiculares.
- La dirección positiva del eje (n) es hacia el centro de curvatura (lado cóncavo) y la dirección positiva del eje (t) es en la dirección de la trayectoria.
- Su origen está ubicado sobre la partícula, diferente a lo que sucede con el sistema cartesiano (x, y, z) que es externo a la partícula.
- Las coordenadas de los ejes (n, t) no son fijas, se trasladan con la partícula, es decir para cada punto de la trayectoria existe una referencia de ejes (n, t) sobre la partícula.
- El plano formado por los ejes (n, t) corresponde al plano osculador (curva con tres puntos próximos incluido el centro).
- El eje perpendicular al plano osculador corresponde al eje binormal (b) .
- Para establecer las direcciones vectoriales en cada eje (n, t, b) , se definen vectores unitarios $(\vec{u}_n)$, $(\vec{u}_t)$ y $(\vec{u}_b)$, los cuales son perpendiculares entre ellos.

En la Figura 11, se ilustra la trayectoria espacial (s) de una partícula sobre un sistema de coordenadas (n, t, b) , que ilustra el plano osculador en el plano conformado por los ejes (n, t) . Adicionalmente, para cada eje ortogonal se ilustran los vectores unitarios $(\vec{u}_n)$, $(\vec{u}_t)$ y $(\vec{u}_b)$ que permiten establecer las direcciones de los vectores de posición, velocidad y aceleración en el sistema de coordenadas normal, tangencial y el eje perpendicular (n, t, b) :

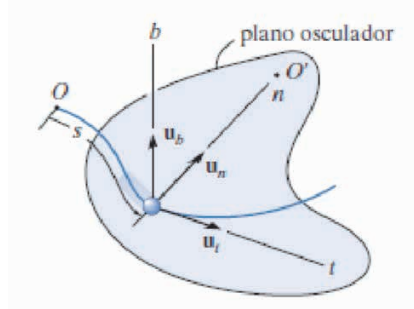


Figura 11. Ilustración de la trayectoria espacial (s) de una partícula que se desplaza desde (O) sobre un sistema de coordenadas (n, t, b) con vectores unitarios ($\vec{u}_n$), ($\vec{u}_t$), ($\vec{u}_b$) que se fija sobre la partícula para establecer su posición en el tiempo. Se resalta el plano osculador conformado por los ejes (n, t) (Hibbeler, 2004-2010-2016)

4.1.2 Posición en coordenadas (n, t)

La Figura 12, ilustra la posición de una partícula que se desplaza en el tiempo como una función de la trayectoria [$s=s(t)$], mediante un sistema de coordenadas ortogonales (n, t) con sus respectivos vectores unitarios ($\vec{u}_n$) y ($\vec{u}_t$). El sistema se fija sobre la partícula para cada instante de tiempo, donde se requiere analizar la posición de la partícula.

La dirección positiva para la trayectoria de la partícula [$s=s(t)$] se indica por el vector unitario ($\vec{u}_t$), tangente a la trayectoria y en la dirección creciente de [$s=s(t)$], mientras que el vector unitario normal ($\vec{u}_n$) se fija en la dirección perpendicular a ($\vec{u}_t$) hacia el centro de curvatura (ρ), sobre la concavidad de la curva de trayectoria.

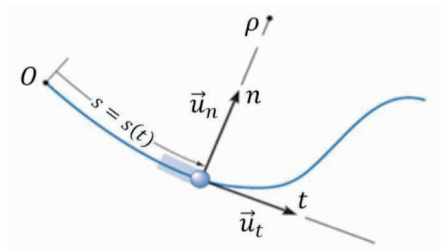


Figura 12. Ilustración para la posición de una partícula en el tiempo [$s=s(t)$] con un sistema de coordenadas (n, t) y vectores unitarios ($\vec{u}_n$) y ($\vec{u}_t$), que se fijan a la partícula. La dirección positiva para la trayectoria se indica por el vector ($\vec{u}_t$) y la dirección positiva de ($\vec{u}_n$) corresponde hacia el radio de curvatura (ρ). Adaptada de (Hibbeler, 2004-2010-2016)

4.1.3 Radio de curvatura (ρ)

Corresponde a la distancia perpendicular a la trayectoria definida entre dos puntos muy cercanos de un sector circular con una curvatura diferencial (ds). En la Figura 13, se ilustran del radio de curvatura (ρ) para diferentes posiciones de una partícula que se desplaza en el tiempo con una función de trayectoria [$s=s(t)$].

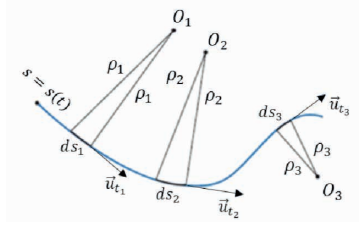


Figura 13. Ilustración del radio de curvatura (ρ) para la función de trayectoria [$s=s(t)$] de una partícula para diferentes instantes de tiempo. Adaptada de (Hibbeler, 2004-2010-2016)

Si la trayectoria es expresada como una función [$y=f(x)$], el radio de curvatura (ρ) en cualquier punto sobre la trayectoria y para cualquier instante de tiempo (t) se determina mediante la relación siguiente:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}$$

4.1.4 Vector de velocidad

Similar a los demás sistemas de coordenadas, el vector de velocidad, corresponde al vector tangente y en la dirección a la trayectoria; por lo tanto, es perpendicular al radio de curvatura de esta.

- **Magnitud del vector velocidad.** Derivada con respecto al tiempo de la función trayectoria.

$$v = \frac{ds}{dt} ; v = \dot{s}$$

- **Dirección del vector de velocidad.** La dirección está determinada por el vector unitario tangencial ($\vec{u}_t$) en el sentido de la trayectoria, ver Figura 14.

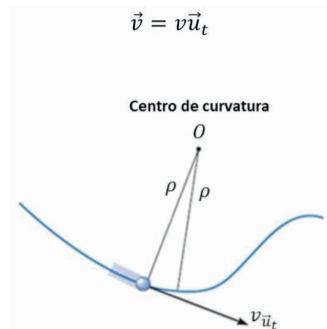


Figura 14. Ilustración del vector de velocidad cuya dirección corresponde a la dirección del vector tangencial ($\vec{u}_t$). Adaptada de (Hibbeler, 2004-2010-2016)

4.1.5 Vector de aceleración

El vector de aceleración representa la variación de la velocidad en el tiempo en la dirección del vector unitario ($\vec{u}_t$).

- **Dirección del vector de aceleración.** Partiendo de la ecuación de aceleración, correspondiente a la derivada de la velocidad en el tiempo y en la dirección del vector unitario ($\vec{u}_t$):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_t)$$

Realizando la derivada de la magnitud de velocidad multiplicada por su vector dirección $[\frac{d}{dt}(v\vec{u}_t)]$ en función del tiempo se tiene:

$$\vec{a} = \dot{v} = \underbrace{\dot{v}}_{\substack{\text{derivada} \\ \text{de la} \\ \text{velocidad}}} \underbrace{u_t + v}_{\substack{\text{derivada} \\ \text{del vector} \\ \text{unitario} \\ \text{tangencial}}} \dot{\vec{u}}_t$$

- **Componentes del vector de aceleración.** Partiendo de la ecuación de la aceleración donde una de las componentes está relacionada con la derivada del vector unitario ($\vec{u}_t$) se tiene:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}u_t + v\dot{\vec{u}}_t \quad (1)$$

Con el fin de establecer la dirección de la derivada del vector unitario ($\dot{\vec{u}}_t$), se presenta el modelo gráfico de la Figura 15 que ilustra los vectores unitarios tangenciales incrementales ($\vec{u}_t'$), ($\vec{u}_t$) y ($d\vec{u}_t$) para un diferencial de la trayectoria (ds), en donde:

Segmento diferencial de trayectoria (ds)

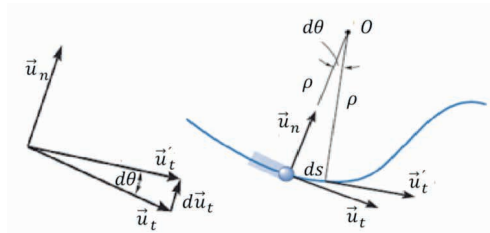


Figura 15. Modelo para establecer la dirección de la derivada del vector unitario ($\vec{u}_t$). Adaptada de (Hibbeler, 2004-2010-2016)

$$\vec{u}_t' = \vec{u}_t + d\vec{u}_t$$

La magnitud de $|d\vec{u}_t|$ es:

$$|d\vec{u}_t| = 1 * d\theta$$

$$\rightarrow |d\vec{u}_t| = d\theta$$

La dirección de $d\vec{u}_t$ está definida por $\vec{u}_n$:

$$\rightarrow d\vec{u}_t = d\theta \vec{u}_n$$

La derivada con respecto al tiempo de $d\vec{u}_t$ es:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_n$$

$$\rightarrow d\vec{u}_t = d\theta \vec{u}_n$$

$$\rightarrow \dot{u}_t = \dot{\theta} u_n \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + v \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_n \quad (3)$$

Por propiedades geométricas de longitud de un arco (ds):

$$ds = \rho d\theta \quad y \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{\rho}$$

$$\rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\rho} \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (3):

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n$$

Concluyendo para la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n$$

$$\rightarrow \vec{a} = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n$$

Donde:

$\vec{u}_t$: componente tangencial.

$\vec{u}_n$: componente normal.

Componentes de aceleración en trayectoria curva con sistema de referencia (n, t)

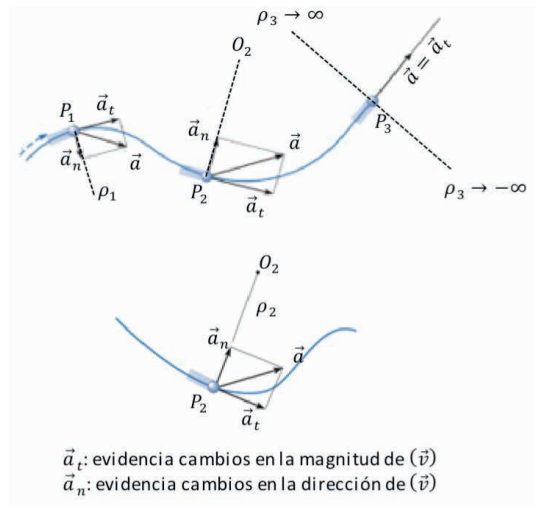


Figura 16. Ilustración de las componentes del vector de aceleración normal y tangencial para una partícula se mueve sobre una trayectoria curva considerando un sistema de referencia (n, t) . Adaptada de (Hibbeler, 2004-2010-2016)

En la Figura 16, se presenta el vector de aceleración para una partícula que se mueve en una trayectoria curva con velocidad variable en función del tiempo en el sistema de coordenadas (n, t) . Para diferentes instantes sobre la curva de velocidad se detalla la componente normal de aceleración que evidencia el cambio en la dirección de la velocidad y la componente tangencial que evidencia la variación en la magnitud de la velocidad.

La magnitud de la aceleración:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Donde:

La magnitud de la aceleración normal está representada por:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

y la magnitud de la aceleración tangencial por:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

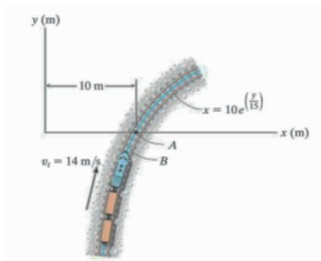
Además, se conserva la relación diferencial entre la aceleración tangencial (a_t), el desplazamiento angular (ds) y la velocidad tangencial (v) angular representada por la siguiente expresión:

$$a_t ds = v dv$$

4.2 Ejemplo ilustrativo para el movimiento curvilíneo utilizando coordenadas (n, t)

Ejemplo ilustrativo para el movimiento curvilíneo utilizando coordenadas (n, t)

Un tren viaja con rapidez constante de $(14 \frac{m}{s})$ por la trayectoria curva ilustrada en la Figura. Determinar la magnitud de la aceleración del frente del tren (B) en el instante en que alcanza el punto A ($y=0$) (Hibbeler, 2004-2010-2016).



4.2.1 Solución

4.2.2 Etapa 1. Comprensión del problema de estudio

- Se identifica que el objeto de estudio es un tren viajando sobre una trayectoria conocida $x=f(y)$.
- El movimiento es curvilíneo en el plano.
- Ningún punto del tren tiene rotación sobre su CM.
- El movimiento del tren puede considerarse el de una partícula que viaja con velocidad lineal.
- La velocidad lineal se considera tangente a la trayectoria.
- El sistema de referencia dada la trayectoria conocida del tren puede modelarse con un sistema de coordenadas $(n-t)$ móviles con el tren.

4.2.3 Algunos datos para el estudio

- La velocidad tangencial en A : $v_{tB} = 14 \frac{m}{s} = cte$
- Dada la función de trayectoria $x=f(y)$, es necesario calcular el radio de curvatura (ρ) para cada punto de la trayectoria obteniendo la función $y=f(x)$.
- De acuerdo con la trayectoria curvilínea y dado que la incógnita hace referencia a la aceleración en el frente B del tren, es necesario calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración en componentes $(n-t)$: $\vec{a}_B = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n$ en el punto A cuando $y=0$, según el sistema de referencia $(x-y)$ externo y fijo.

4.2.4 Etapa 2. Planteamiento de un modelo físico

Considerando la trayectoria circular del tren y asumiendo un sistema de coordenadas (n, t) se establecen los vectores de velocidad tangencial, aceleración tangencial y aceleración normal. El sistema fijo de coordenadas (x, y) externo al tren, se utiliza para establecer la posición inicial (B) y final (A) de la trayectoria del frente del tren, con el fin calcular el radio de curvatura (ρ) y las componentes de aceleración en el sistema de coordenadas (n, t) , ver la Figura 17.

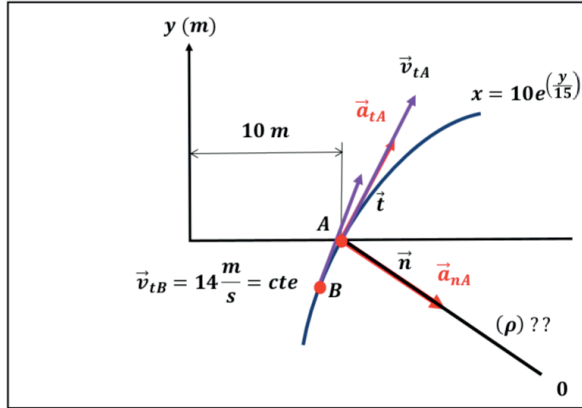


Figura 17. Modelo cinemático para el movimiento del frente del tren sobre la trayectoria curvilínea $[x=10e^{(\frac{y}{15})}]$, considerando coordenadas (n, t) y estableciendo los parámetros para la posición inicial (B) y la final (A)

4.2.5 Etapa 3. Planteamiento analítico

- **Cálculo del radio de curvatura (ρ) .** Como $x=f(y)$, es necesario obtener $y=f(x)$ para cálculo del radio de curvatura (ρ) en cualquier punto sobre la trayectoria según la expresión siguiente:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

Conocida la función de la trayectoria según la ecuación: $[x=10e^{(\frac{y}{15})}]$
Reorganizando:

$$\rightarrow e^{(\frac{y}{15})} = \frac{x}{10}$$

Aplicando propiedad de la exponencial:

$$\begin{aligned} \frac{y}{15} &= \ln\left(\frac{x}{10}\right) \\ \rightarrow y &= 15\ln\left(\frac{x}{10}\right) \end{aligned}$$

Para el proceso de derivada, se toma el argumento del logaritmo como la variable (u):

$$u = \left(\frac{x}{10}\right),$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{10}$$

Como: $y = 15 \ln\left(\frac{x}{10}\right)$

$$\rightarrow y = 15 \ln(u);$$

Derivando con respecto a la variable (x), la función (y) con fines de avanzar en el cálculo del radio de curvatura:

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 15 \frac{d}{dx} \ln(u) = 15 \frac{1}{u} \left(\frac{du}{dx}\right)$$

Reemplazando los valores de ($u, \frac{du}{dx}$):

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 15 \left(\frac{10}{x}\right) \left(\frac{1}{10}\right)$$

Se obtiene, la primera derivada de la función ($\frac{dy}{dx}$):

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{15}{x} = 15x^{-1}$$

Derivando nuevamente, se obtiene ($\frac{d^2y}{dx^2}$):

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -1 * 15x^{-2} = -15x^{-2}$$

Evaluando la primera y segunda derivada para ($x=10m$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15}{10}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{15}{100}$$

Reemplazando en la ecuación de (ρ), se tiene:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{15}{10}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{15}{100}\right|}$$

Se obtiene la magnitud del radio de curvatura (ρ):

$$\rightarrow \rho = 39.1m$$

Cálculo de la magnitud de la aceleración. Utilizando la ecuación general de la aceleración en movimiento plano:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n$$

Donde:

$$\frac{dv}{dt} \vec{u}_t = 0, \quad \text{dado que } v_{tA} = cte$$

$$\rightarrow a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{14^2}{39.1}$$

Por lo tanto, se obtiene la magnitud de la aceleración:

$$\rightarrow a = a_n = 5 \frac{m}{s^2}$$

Su dirección se da sobre la componente radial (normal), la cual mantiene el tren en su trayectoria curvilínea.

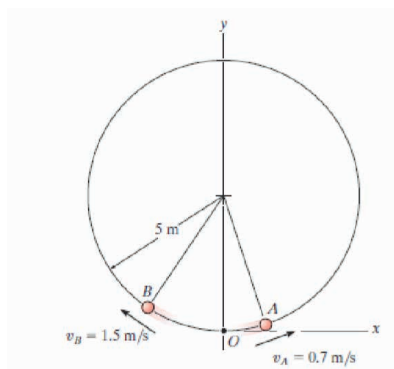
4.2.6 Etapa 4. Interpretación y validación de los resultados obtenidos

- Es simple comprobar analíticamente que para la función de trayectoria $x=10e^{\left(\frac{y}{15}\right)}$, cuando $y=0m$, $x=10m$.
- De manera similar para $y=f(x)=15\ln\left(\frac{x}{10}\right)$, cuando $x=10m$, $y=0m$.
- El radio de curvatura ($\rho=39.1m$) calculado con la ecuación característica para el movimiento circular en coordenadas ($n-t$) considerando la ecuación de la trayectoria dada por el problema ofrece una idea de la geometría de dicha trayectoria curvilínea y del posible tamaño del tren.
- La magnitud de la aceleración se debe solo a la componente normal, debido a que la velocidad tangencial del tren es constante. Su valor de $\left(5 \frac{m}{s^2}\right)$, es acorde con el valor de velocidad tangencial ($v_{tA}=14 \frac{m}{s}$) y depende del radio de curvatura (ρ) para una posición determinada.

4.3 Ejercicio propuesto en coordenadas (n, t)

Ejercicio propuesto en coordenadas (n, t) :

Las dos partículas (A) y (B) parten del origen (O) y viajan en direcciones opuestas por una trayectoria constante ($v_A = 0.7 \frac{m}{s}$) y ($v_B = 1.5 \frac{m}{s}$) respectivamente. Determine el tiempo en que entran en colisión y la magnitud de la aceleración de (B) justo antes de que esto pase (Hibbeler, 2004-2010-2016).



5. MOVIMIENTO CURVILÍNEO EN EL PLANO UTILIZANDO EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES (r, θ)

• Resultado de aprendizaje

Desarrollar capacidades y habilidades para la describir mediante modelos físicos y analíticos los parámetros cinemáticos de una partícula independiente o dentro un sistema mecánico en movimiento curvilíneo en el plano $2D$ bajo el sistema de coordenadas (r, θ), y utilizando los principios de la cinemática para el movimiento en el plano $2D$, soportado en las herramientas básicas de física mecánica, trigonometría, estática y/o de cálculo integral y diferencial.

5.1 Conocimientos previos para el movimiento curvilíneo en el sistema de coordenadas polares (r, θ)

5.1.1 Establecimiento del sistema de coordenadas (r, θ)

La Figura 18 a la izquierda, ilustra el establecimiento de un sistema de referencia en el plano (izquierda) con coordenadas (r, θ), en el cual se resalta un origen fijo externo; el eje de referencia fijo externo a partir del cual se mide el cambio angular; el vector de posición (r) que parte del origen externo; y los ejes ortogonales (r) y (θ) con sus correspondientes vectores unitarios ($\vec{u}_r$) y ($\vec{u}_\theta$) indicando el sentido positivo. La Figura 18 a la derecha, ilustra las relaciones geométricas que tienen los sistemas de referencia rectangular (x, y, z) el normal- tangencial o circular y el (r, θ) que trata este numeral que son abordados por los autores (Meriam y Kraige, 2012-2014).

Establecimiento del sistema de coordenadas (r, θ) y relación con los demás sistemas de referencia (Meriam y Kraige, 2012-2014; Hibbeler, 2004-2010-2016)

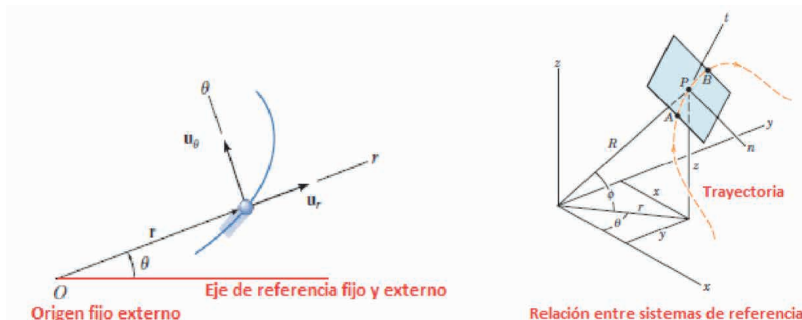


Figura 18. Izquierda: Establecimiento del sistema de referencia (r, θ) con sus correspondientes características. Derecha: relaciones geométricas entre los sistemas de referencia que son reportados por (Meriam y Kraige, 2012-2014)

A continuación, se describe el proceso de construcción de un sistema de referencia de coordenadas (r, θ) :

- Se requiere de un origen fijo externo al cuerpo que considera un eje base a partir del cual se puede referenciar la posición angular $(d\theta)$ en el sentido positivo concordante con la dirección de la trayectoria.
- El sistema de coordenadas (r, θ) , está conformado por dos coordenadas ortogonales. La coordenada (r) define el vector de posición de la partícula a partir del origen externo y su sentido positivo es radial partiendo del origen externo. La coordenada (θ) , define el vector transversal que se establece perpendicular a (r) con dirección positiva en el sentido de la trayectoria.
- El sentido positivo de los ejes (r, θ) se establece mediante los vectores unitarios $(\vec{u}_r)$ y $(\vec{u}_\theta)$ para las componentes radial y transversal respectivamente, tanto de la velocidad como de la aceleración.
- Por definición el vector de velocidad es perpendicular a la trayectoria y sus componentes vectoriales se establecen en las respectivas direcciones de los vectores unitarios $(\vec{u}_r)$ y $(\vec{u}_\theta)$.

5.1.2 Ecuaciones que rigen el comportamiento de la partícula en el sistema de coordenadas (r, θ)

- **Posición.** Definida por el vector de posición en función del tiempo $[\vec{r} = \vec{r}(t)]$, establecido en el sistema (r, θ) :

$$\rightarrow \vec{r} = r\vec{u}_r \quad (1)$$

Dónde:

$\vec{u}_r$: vector unitario en la dirección radial.

$\vec{u}_\theta$: vector unitario en la dirección transversal.

θ : ángulo en la dirección del movimiento a partir del eje fijo externo de referencia.

- **Velocidad.** Se obtiene mediante la derivada con respecto al tiempo del vector posición:

$$\rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} \quad (2)$$

$\vec{u}_r$: el vector unitario radial solo cambia la posición en el tiempo.

Con el fin de establecer la dirección del vector unitario radial $(d\vec{u}_r)$ en el tiempo para utilizar en la ecuación de la velocidad, se presenta el modelo gráfico de la Figura 19 que ilustra los vectores unitarios radial incrementales $(\vec{u}'_r)$, $(\vec{u}_r)$ y $(d\vec{u}_r)$ para un diferencial de la trayectoria (ds) , en donde:

Dirección del vector $(d\vec{u}_r)$ en el tiempo

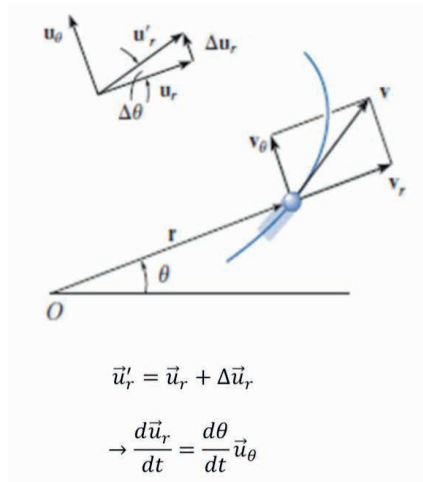


Figura 19. Modelo para establecer la dirección de la derivada del vector unitario $(\vec{u}_r)$. Adaptada de (Hibbeler, 2004-2010-2016)

Por sumatoria de vectores unitarios:

$$\vec{u}_r' = \vec{u}_r + \Delta\vec{u}_r$$

Cuando $\Delta\theta \rightarrow 0 \rightarrow |\Delta\vec{u}_r| \cong 1 * \Delta\theta$

y la dirección de $d\vec{u}_r = d\theta\vec{u}_\theta$

$$\rightarrow \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

Se obtiene la ecuación vectorial para la velocidad:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \quad (4)$$

$$\rightarrow \vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta$$

Cuyas componentes escalares (magnitudes) en las direcciones unitarias son:

$$\rightarrow v_r = \dot{r} ; \quad v_\theta = r\dot{\theta} ; \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} ;$$

Por lo tanto, la magnitud de la velocidad corresponde a:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

- **Aceleración.** Similar a los demás sistemas de coordenadas, la expresión analítica para el vector de aceleración con sus correspondientes componentes $(\vec{u}_r)$ y $(\vec{u}_\theta)$, se obtiene derivando la ecuación vectorial de la velocidad expresada en (4):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right]$$

$$\rightarrow \vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \left[\frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \vec{u}_\theta + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right) \quad (5)$$

- **Dirección del vector unitario ($d\vec{u}_\theta$) en el tiempo para utilizar en la ecuación de aceleración.** Con el fin de establecer la dirección del vector unitario transversal ($d\vec{u}_\theta$) en el tiempo para utilizar en la ecuación de la aceleración, se presenta el modelo gráfico de la Figura 20 que ilustra los vectores unitarios transversales incrementales ($\vec{u}'_\theta$), ($\vec{u}_\theta$) y ($d\vec{u}_\theta$) para un diferencial de la trayectoria (ds), en donde:

Por sumatoria de los vectores unitarios para la aceleración:

$$\vec{u}'_\theta = \vec{u}_\theta + \Delta\vec{u}_\theta$$

Cuando $\Delta\theta \rightarrow 0 \rightarrow |\Delta\vec{u}_\theta| \cong 1 * \Delta\theta$

y la dirección de $d\vec{u}_\theta = (-\vec{u}_r)d\theta$

Por lo tanto la dirección del diferencial del vector ($\vec{u}_\theta$) corresponde a:

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r \quad (6)$$

Dirección del vector ($d\vec{u}_\theta$) en el tiempo

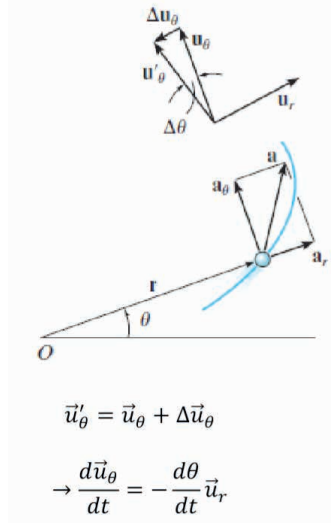


Figura 20. Modelo para establecer la dirección de la derivada del vector unitario ($\vec{u}_\theta$). Adaptada de (Hibbeler, 2004-2010-2016)

Reemplazando (3) y (6) en (5) se obtiene:

La expresión vectorial general para la aceleración en sus componentes $(\vec{u}_r), (\vec{u}_\theta)$ son:

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \left[\frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \vec{u}_\theta + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \left(-\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r \right)$$

Agrupando términos en $(\vec{u}_r)$ y $(\vec{u}_\theta)$ puede reorganizarse la expresión vectorial analítica para la aceleración:

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{u}_r + \left[\left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) + \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \right] \vec{u}_\theta$$

Agrupando las componentes en $(\vec{u}_r)$ y $(\vec{u}_\theta)$ se obtiene la expresión vectorial simplificada para la aceleración:

$$\vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta$$

Cuyas componentes escalares (magnitudes) en las direcciones radial y trasversal corresponden a:

$$\rightarrow a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 ; \quad \rightarrow a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

y la magnitud de la aceleración:

$$\rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$

5.1.3 Coordenadas cilíndricas

Se considera una curva en el espacio como se ilustra en la Figura 21, con tres coordenadas ortogonales $(r; \theta, z)$, donde la componente (z) es perpendicular al plano $(r; \theta)$. Por lo tanto, las ecuaciones para describir los vectores de posición, velocidad y aceleración se representan en términos de estas tres coordenadas con sus respectivos vectores unitarios.

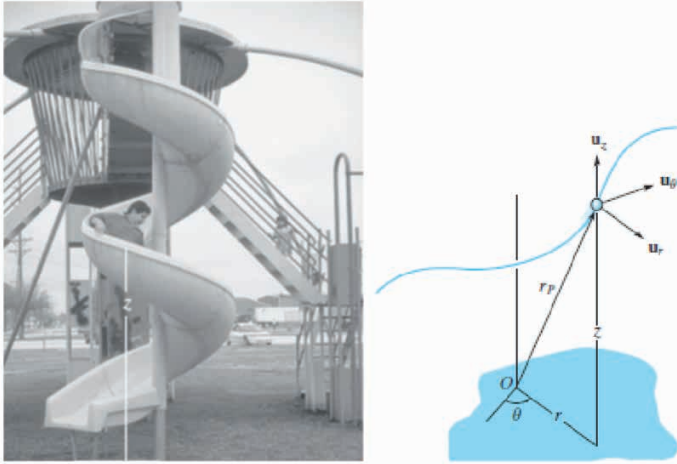


Figura 21. Representación del sistema espacial de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , cuya tercera componente (z) es perpendicular al plano (r, θ) (Hibbeler, 2004-2010-2016)

- **Vector de posición en coordenadas cilíndricas.** Conserva la misma estructura de la ecuación en el sistema (r, θ) y se adiciona el término en la ordenada (z) :

$$\vec{r} = r\vec{u}_r + r\vec{u}_\theta + r\vec{u}_z$$

- **Vector de velocidad en coordenadas cilíndricas.** Similar a la estructura de la ecuación en el plano (r, θ) y se adiciona el término en la ordenada (z) , que corresponde a la derivada del vector de posición $(\dot{z})$:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

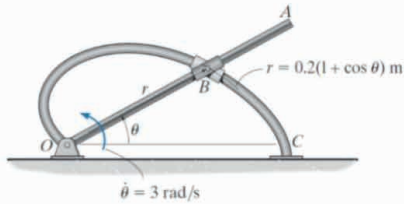
- **Vector de aceleración en coordenadas cilíndricas.** Similar a la ecuación de aceleración en plano (r, θ) y se adiciona la segunda derivada del término espacial $(\ddot{z})$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

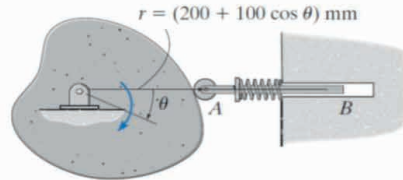
5.1.4 Aplicaciones típicas para el uso de coordenadas (r, θ)

En la Figura 22, se presentan algunos casos de aplicaciones típicas, tomadas de diferentes autores (Meriam y Kraige, 2012-2014; Hibbeler, 2004-2010-2016; Pytel y Kiusalaas, 2012), en donde el uso del sistema de coordenadas polar (r, θ) en el plano es muy utilizado y el cilíndrico (r, θ, z) es útil para el caso espacial. Por otro lado, es importante acotar que la aplicación del sistema polar y/o cilíndrico, es bastante útil cuando se tiene el radio (r) y el ángulo (θ) de posicionamiento de la partícula.

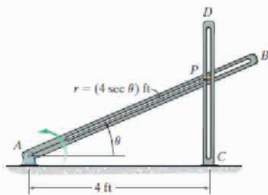
1. Barras interconectadas por bujes cilíndricos:
Una barra es fija y la otra rota sobre un punto fijo.
Movimiento en el plano del punto B . Coordenadas (r, θ)



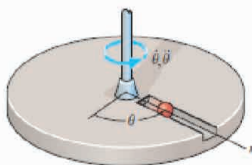
2. Contacto por presión de leva-seguidor:
Se presenta movimiento rectilíneo del seguidor.
La leva rota y el radio de contacto $\vec{r}_A$ varía (r, θ)



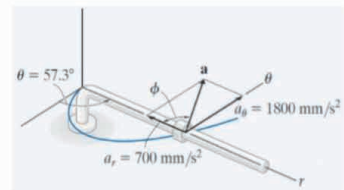
3. Barras interconectadas por un pasador:
Una barra rotando y la otra fija vertical,
el punto P con pasador se desplaza lineal
 $\vec{r}_P$ es variable. Coordenadas (r, θ) .



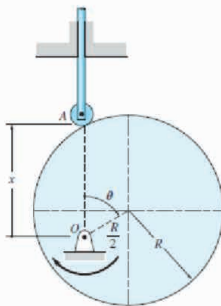
4. Mesa rotativa con canal:
Sobre la canal se desplaza la
bola linealmente, también rota;
el radio r es variable y el ángulo θ



5. Anillo se desplaza sobre barra rotativa:
Desplazamiento lineal del anillo y rota,
el radio del anillo es variable y el ángulo θ
Coordenadas (r, θ) .



6. Leva seguidor desplazamiento lineal:
Distancia (x) variable y (θ) varía
Coordenadas (r, θ)



7. Deslizador de personas para
coordenadas cilíndricas (r, θ, z)



8. Doble buje articulado en barra y leva,
el $\vec{r}_B$ es variable con la rotación de la leva
y el ángulo (θ) varía. Coordenadas (r, θ)

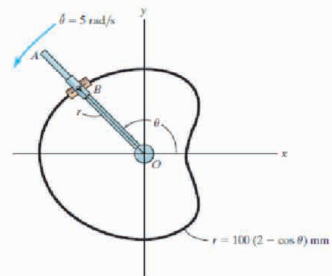
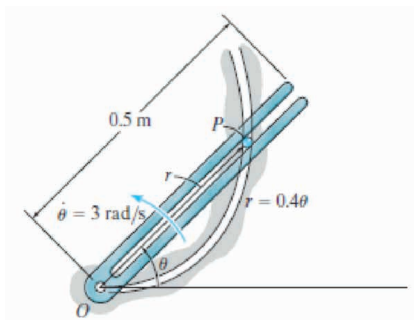


Figura 22. Ilustración de diferentes aplicaciones de elementos interconectados con movimiento lineal, en el plano y en el espacio. En todos los casos el radio de contacto varía y dada la rotación del otro elemento del par cinemático o interconectado el ángulo de rotación (θ) también varía (Meriam y Kraige, 2012-2014; Hibbeler, 2004-2010-2016; Pytel y Kiusalaas, 2012)

5.2 Ejemplo ilustrativo para aplicación del sistema de coordenadas polares (r, θ)

Ejemplo de aplicación en coordenadas polares

El eslabón ranurado está unido mediante un pasador en (O), y como resultado de la velocidad angular constante ($\frac{d\theta}{dt} = 3 \frac{rad}{s}$), se mueve la partícula P una corta distancia por la guía en espiral [$r=(0.4\theta)m$], donde (θ) está en radianes. Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante en que deja la ranura del eslabón; es decir, cuando ($r=0.5m$) (Hibbeler, 2004-2010-2016).



5.2.1 Solución

5.2.2 Etapa 1. Comprensión del problema

El problema se concentra en determinar la velocidad ($\vec{v}$) y ($\vec{a}$) de la partícula P (pasador) que se desplaza sobre la ranura de un brazo rotativo siguiendo una trayectoria conocida [$r=f(\theta)$], con las siguientes características:

- Traslación curvilínea de P sobre la trayectoria [$r=(0.4\theta)m$], con posición (r) desde una referencia fija y externa a la partícula (O) y variando la posición angular ($d\theta$) a partir de una línea de referencia.
- La partícula no tiene rotación sobre su centro de masa (CM)
- Se evidencia que la posición (r) de la partícula (p) es variable con la posición angular (θ). Por lo tanto, [$r=f(\theta)$].
- Las características del problema son típicas para la utilización de un sistema de referencia con coordenadas polares (r, θ). Por lo tanto, se establece un sistema de referencia fija externo a la partícula en (O).
- Es evidente que la función para la posición [$r=(0.4\theta)m$] es continua y derivable en el tiempo.
- Se establece en enunciado del problema que la velocidad angular es constante en el tiempo. Esto es: ($\frac{d\theta}{dt} = 3 \frac{rad}{s} = cte$)

5.2.3 Etapa 2. Planteamiento de un modelo físico

Se establece el modelo físico ilustrado en la Figura 23 para el movimiento de la partícula (P) sobre la trayectoria curvilínea plana definida por la función $[r=(0.4\theta)m]$. Algunas características para el modelo son:

- Establecimiento del sistema de referencia en coordenadas polares ($r; \theta$) con origen fijo y externo en (O), y establecimiento de la línea de referencia desde (O) para la variación angular de (θ).
- Se establecen las direcciones positivas para los vectores unitarios radial ($\vec{u}_r$) y transversal ($\vec{u}_\theta$), base para identificar las direcciones positiva y negativa tanto para la velocidad como para la aceleración.
- Establecidas las direcciones de ($\vec{u}_r$) y ($\vec{u}_\theta$) se complementa el modelo físico con las componentes cinemáticas para los vectores de posición ($r\vec{u}_r$), velocidades ($\vec{v}_r, \vec{v}_\theta$), aceleraciones ($\vec{a}_r, \vec{a}_\theta$) y variación angular $d\theta$.
- Adicionalmente, el modelo cinemático, debe incluir las cotas dimensionales y los parámetros geométricos que aporten a la descripción de la trayectoria del movimiento.

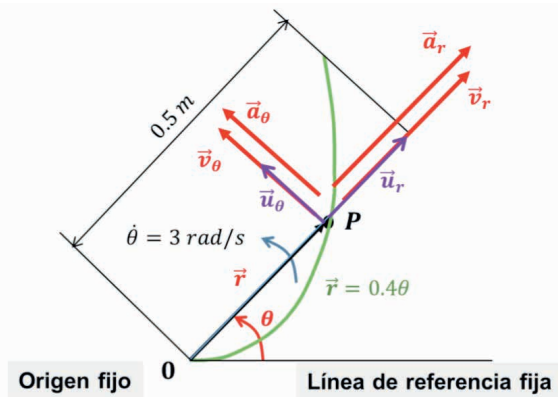


Figura 23. Modelo cinemático para el pasador P que se mueve por la trayectoria en espiral $[r=(0.4\theta)m]$, a su vez que se desplaza linealmente sobre la ranura de la barra rotativa con radio ($\vec{r}$) y ángulo de rotación (θ) variables en el tiempo

5.2.4 Etapa 3. Planteamiento analítico

Como se conoce la función de la posición $[r=f(\theta)]$, durante la trayectoria de la partícula (P) para cualquier punto sobre la trayectoria curvilínea y dado que el cálculo de las componentes radiales y transversales de la velocidad y aceleración, están expresadas bajo las siguientes expresiones:

Para la velocidad:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

Para la aceleración:

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{u}_r + \left[\left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) + \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \right] \vec{u}_\theta$$

- Es necesario obtener las respectivas derivadas con respecto al tiempo de la posición radial y el desplazamiento angular en su primera y segunda derivada, de acuerdo con el siguiente procedimiento:

Dada la posición angular:

$$r = 0.4\theta \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dt} = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \text{cte}$$

Tomando la primera derivada de la posición r se obtiene:

$$\rightarrow \frac{dr}{dt} = 0.4 \frac{d\theta}{dt}$$

Reemplazando para los valores conocidos:

$$\rightarrow \frac{dr}{dt} = 0.4 * 3 = 1.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Tomando la segunda derivada de la posición $\left(\frac{d^2r}{dt^2} \right)$, y dado que la velocidad angular $\left(\frac{d\theta}{dt} = \text{cte} \right)$ se obtiene:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(0.4 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0, \quad \text{dado que} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

- **Cálculo del ángulo máximo ($\theta_{\text{máx}}$).** Reemplazando para el valor máximo de:

$$[r = f(\theta) = 0.4\theta] = 0.5\text{m}$$

$$\rightarrow 0.5 = 0.4\theta \quad (\text{m})$$

$$\rightarrow \theta_{\text{máx}} = 1.250 \text{ rad} \quad \theta \cong 71.62^\circ$$

- **Cálculo de la velocidad para $[\theta=1.250\text{rad}]$.** Tomando la ecuación característica para la velocidad:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

Reemplazando los valores obtenidos de las componentes escalares (magnitudes) de $(\vec{u}_r)$ y $(\vec{u}_\theta)$, para $(r=0.5\text{m})$ en la ecuación de velocidad se obtiene:

$$\vec{v} = 1.2 \vec{u}_r + 0.5 * 3 \vec{u}_\theta$$

$$\rightarrow \vec{v} = 1.2 \vec{u}_r + 1.5 \vec{u}_\theta$$

Por lo tanto, las componentes radiales y transversales:

$$v_r = 1.2 \frac{m}{s} ; \quad v_\theta = 1.5 \frac{m}{s}$$

y la magnitud de la velocidad:

$$|\vec{v}| = \sqrt{1.2^2 + 1.5^2}$$

$$\rightarrow |\vec{v}| = 1.92 \frac{m}{s}$$

- **Cálculo de la aceleración para $[\theta=1.250rad]$.** Con los valores obtenidos previamente para las componentes radiales y transversales, considerando ($r=0.5m$), se procede a reemplazar en la ecuación de la aceleración siguiente:

$$\vec{a} = \left[\left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right) - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_r + \left[r \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) + 2 \left(\frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \vec{u}_\theta$$

Cuya expresión vectorial resultante es:

$$\rightarrow \vec{a} = -0.5 * (3)^2 \vec{u}_r + 2 * (1.2) * (3) \vec{u}_\theta$$

$$\rightarrow \vec{a} = -4.5 \vec{u}_r + 7.2 \vec{u}_\theta$$

Por lo tanto, las componentes radiales y transversales para la aceleración son:

$$a_r = -4.5 \frac{m}{s^2} ; \quad a_\theta = 7.2 \frac{m}{s^2}$$

y la magnitud de la aceleración:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-4.5)^2 + (7.2)^2}$$

$$\rightarrow |\vec{a}| = 8.49 \frac{m}{s^2}$$

5.2.5 Etapa 4. Interpretación y validación de los resultados obtenidos

- Las componentes obtenidas para la velocidad y la aceleración en las direcciones $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_\theta$ obedecen a un ejercicio de cálculo que se realiza de manera cuidadosa. Dichas componentes son evaluadas para la posición límite (restricción) planteada por el problema. Es decir, para:

$$(r_{m\acute{a}x} = 0.5 m), \text{ donde } (\theta_{m\acute{a}x} = 1.250 rad) \rightarrow (\theta \cong 71.62^\circ)$$

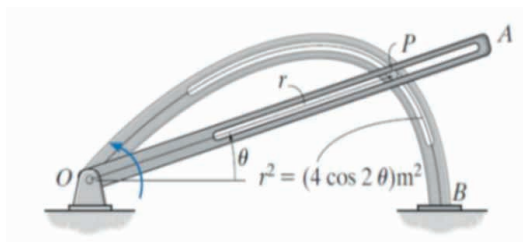
- Se comprueba para la componente de aceleración radial $\left(\vec{a}_r = -4.5 \vec{u}_r \frac{m}{s^2} \right)$ que su dirección negativa tiene coherencia con el modelo físico y con el comportamiento real de la partícula en su desplazamiento por la trayectoria curvilínea. El sentido negativo, corresponde a la fuerza centrípeta que se realiza sobre la partícula, la cual se ejerce hacia el centro de curvatura, en este caso

actúa radialmente hacia el origen (O).

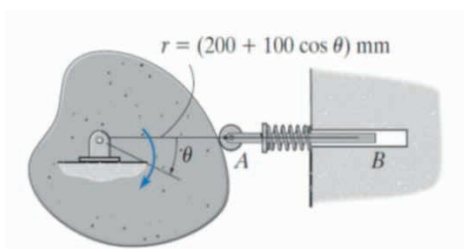
- De acuerdo con las expresiones para la velocidad y aceleración las magnitudes escalares son coherentes. En este caso, como era de esperarse la magnitud de la aceleración es mucho mayor que la magnitud de la velocidad y se debe a la combinación de términos $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ y $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ en la ecuación.
- Es simple validar la coherencia entre los resultados obtenidos y el planteamiento del modelo físico, dada la correspondencia entre las componentes de posición, velocidad y aceleración con el sistema de referencia.

5.3 Ejercicios propuestos para su solución por coordenadas polares (Hibbeler, 2004-2010-2016)

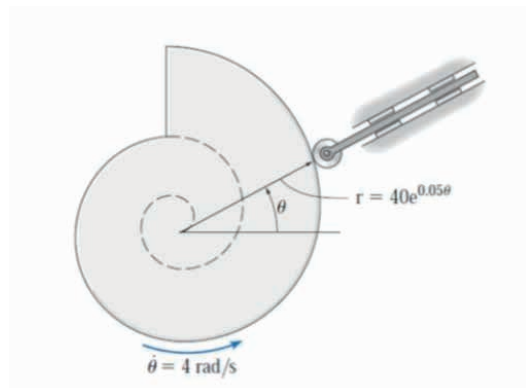
- El movimiento de la clavija P está limitado por la ranura en forma de lemniscata en OB y por el brazo ranurado OA . Si OA gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = (3t^{3/2}) \text{ rad/s}$, donde t está en segundos, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la clavija P cuando $\theta = 30^\circ$. En $t=0$, $\theta=0^\circ$.



- En el instante $\theta = 30^\circ$, la leva gira en sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular de $\dot{\theta} = 5 \text{ rad/s}$ y una aceleración angular de $\ddot{\theta} = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del seguidor AB en este instante. La superficie de la leva tiene la forma de un limaçon, definida por $r = (200 + 100 \cos \theta) \text{ mm}$.



- La superficie parcial de la leva es la de una espiral logarítmica $r = (40e^{0.05\theta}) \text{ mm}$, donde θ está en radianes. Si la aceleración angular de la leva es $\ddot{\theta} = 2 \text{ rad/s}^2$, cuando su velocidad angular es $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$, con $\theta = 30^\circ$, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto en la leva que está en contacto con el seguidor en el instante.



6. MOVIMIENTO DEPENDIENTE ABSOLUTO DE PARTÍCULAS

• Resultado de aprendizaje

Desarrollar capacidades y habilidades para describir de manera física y analítica el comportamiento de cuerpos articulados en un sistema, mecanismo y/o máquina con movimiento absoluto dependiente, utilizando los principios de la cinemática para el cálculo de la trayectoria y de los parámetros cinemáticos de posición, velocidad, aceleración y tiempo, soportado en las herramientas básicas de física mecánica, trigonometría, estática y/o de cálculo integral y diferencial de una partícula con movimiento absoluto dependiente.

6.1 Conocimientos previos para el movimiento absoluto de partículas

6.1.1 Aspectos teóricos

- El movimiento dependiente, se aplica a elementos mecánicos vinculados o interconectados, donde el movimiento de un elemento depende del movimiento de otro.
- Esto es, al cambiar la posición, velocidad y/o aceleración de una partícula, se afectará la posición, velocidad y/o aceleración de la otra partícula y/o partículas vinculadas.
- Las vinculaciones entre partículas, se llevan a cabo mediante cables, cadenas, correas, bandas, superficies de contacto, entre otros elementos. Ver Figura 24.

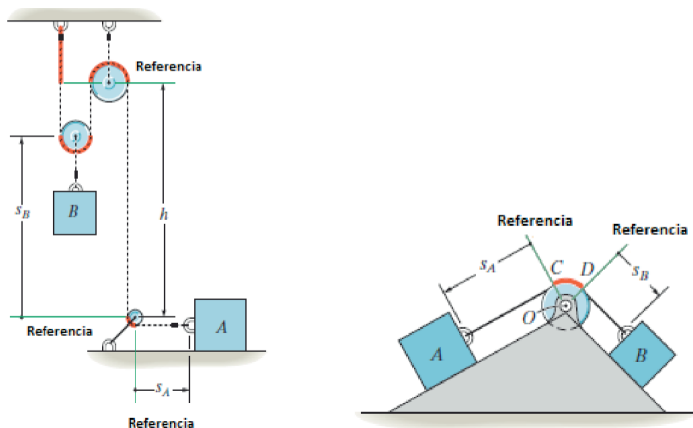


Figura 24. Sistemas de bloques articulados con poleas y cables que producen desplazamientos lineales (s_A) y (s_B) en dirección horizontal, vertical y sobre planos inclinados. Es importante la selección de las referencias para evaluar el desplazamiento y los demás parámetros cinemáticos (Hibbeler, 2004-2010-2016)

Para el planteamiento del modelo físico de las partículas vinculadas, se debe tener presente las siguientes consideraciones:

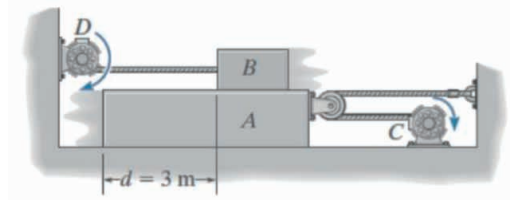
- El elemento vinculante es inextensible e indeformable, usualmente denominado cuerda.
- El movimiento dependiente se presenta cuando el movimiento de uno de los objetos, determina la posición, velocidad y/o aceleración de los otros objetos vinculados entre sí.
- Para la solución del problema y/o problemas, se plantea un modelo físico por cada elemento vinculante (longitud de cuerda) distinto.
- Se debe establecer la ecuación de longitud de cuerda para cada elemento vinculante, considerando las referencias (origen), a partir de las cuales se evidencia un cambio en las posiciones (se alarga o se acorta).
- Partiendo de las ecuaciones de longitud de cuerda, es posible obtener ecuaciones para la velocidad y la aceleración dependiendo de las características y la geometría del movimiento de las partículas vinculadas.
- El sentido positivo o negativo en las variables cinemáticas (posición, velocidad, aceleración) para las partículas, depende de la variación en la coordenada de posición, con respecto a la referencia tomada (se alarga o se acorta).

6.1.2 Aplicaciones típicas de sistemas de cables y poleas articulados con otros elementos

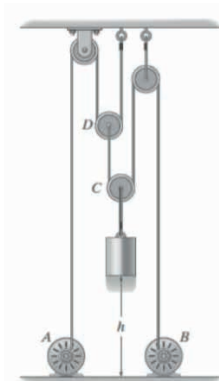
- En la Figura 25, se presentan algunos casos donde se evidencia la dependencia del movimiento de algunos elementos como bloques deslizantes, bujes, articulados a los sistemas de cables y poleas accionados por sistemas motrices.
- Es evidente que en los sistemas articulados las variaciones que se presentan en las longitudes de los cables y/o cuerdas como elementos vinculantes provocan los desplazamientos unidireccionales de los demás elementos articulados. En los casos que se ilustran en la Figura 25, las variaciones que se presentan en los tramos (S_A), (S_B), (S_C) y (S_D), debido al movimiento dependiente con los elementos articulados (bloques y cables) se produce su movimiento unidireccional.
- También es importante anotar que el movimiento unidireccional que se produce en los elementos articulados, es afectado principalmente por el tipo de superficie de contacto o de deslizamiento del elemento. Por ejemplo, en los bloques (A) y (B) de la Figura 25 a), las superficies de deslizamiento son planas, luego el movimiento unidireccional se da sobre dichas superficies de contacto. En la Figura 25 c), el anillo (A) se desplaza verticalmente sobre la barra fija, dada la restricción en el movimiento que la barra le genera.

Aplicaciones típicas del movimiento dependiente de partículas

a) Bloques (A) y (B) sobrepuestos superficialmente e interconectados mediante cables accionados por motores que generan su desplazamiento. El sistema está conformado por dos cuerdas, cada una de ellas desplaza un bloque y los bloques entre sí se deslizan uno sobre el otro con movimiento lineal en dirección horizontal.



b) Poleas interconectadas con dos cuerdas para el movimiento vertical de un bloque. Se presentan variaciones en varios tramos verticales de las cuerdas: (S_A) , (S_B) , (S_C) y (S_D) como posibles incógnitas del problema, que inciden en el desplazamiento vertical (h) del contrapeso.



c) Anillo (buj) cilíndrico interconectado mediante un cable a motor que lo enrolla sobre tambor y genera el desplazamiento lineal (S_A) y vertical del anillo sobre la barra que se encuentra fija en posición vertical.

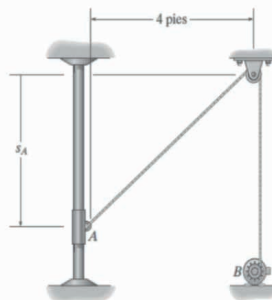
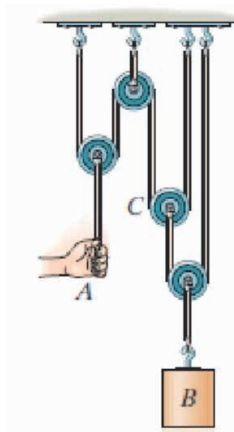


Figura 25. Ilustración de sistemas de poleas y cables accionados por motores e interconectados con otros elementos: bloques y anillo cilíndrico. Las variaciones en los tramos de cable generan el movimiento unidireccional de los elementos interconectados (Hibbeler, 2004-2010-2016)

6.2 Ejemplo ilustrativo para aplicación del movimiento absoluto y dependiente de partículas

Ejemplo ilustrativo para aplicación de movimiento absoluto dependiente de partículas

Determine el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del bloque situado en (B) si la polea (A) es halada hacia abajo (4pies), como se ilustra en la siguiente figura (Hibbeler, 2004-2010-2016).



6.2.1 Solución

6.2.2 Etapa 1. Comprensión del problema

Se dispone de un sistema de poleas móviles A , B y C , vinculadas mediante dos cables (cuerdas), cuyo movimiento es lineal en la dirección vertical. En particular, la polea B , dispone de un bloque B que se mueve solidario con la misma. Las características del movimiento de las partículas (poleas y/o bloque) se sintetizan a continuación:

- Movimiento rectilíneo vertical de los elementos ubicados en A , B , C , sin rotación alrededor de sus CM.
- Los objetos de estudio interconectados, denominados las poleas A , B y C , varían sus posiciones (desplazamientos verticales) con el tiempo.
- El movimiento vertical de la polea A , influye en el movimiento vertical de las poleas B y C ; por lo tanto, el movimiento absoluto es dependiente.
- Existen dos cuerdas que intervienen en el movimiento dependiente absoluto de las poleas. Por lo tanto, se deben plantear una ecuación de longitud para cada una.
- Es sencillo establecer un sistema de referencia fijo, en la parte superior del sistema de poleas, a partir del cual se evidencien los cambios de posición para cada una de las poleas y del bloque B .

- Para la pregunta problema, inicialmente, se identifica que cuando la polea A se desplaza hacia abajo, las poleas B y C ascienden y esta dependencia del movimiento produce un alargamiento o un acortamiento en la posición, dependiendo de la ubicación del nivel de referencia. Por lo tanto, el sentido positivo o negativo, de las variables cinemáticas (desplazamiento, velocidad, aceleración) para las poleas, dependerá de la variación de la posición con respecto al nivel de referencia seleccionado.

6.2.3 Etapa 2. Planteamiento de los modelos físicos para el movimiento de las poleas A , B y C

De acuerdo con el número de cuerdas que conforman el sistema de poleas, se plantean los modelos físicos para cada una. En este caso, se tienen dos cuerdas que vinculan a las tres poleas. Por lo tanto, es necesario establecer dos modelos físicos. La primera cuerda vincula las poleas A y C e influyen en el movimiento de B . La segunda cuerda conecta las poleas B y C e influye en el movimiento de la polea B . Como el problema es planteado por el movimiento vertical de la polea A y dado que las cuerdas (elementos vinculantes) tienen como punto de conexión la polea C , es evidente que el movimiento vertical de A influye en el movimiento de las poleas C y B .

Los modelos físicos por plantear corresponden a los dos siguientes:

- **Modelo para la cuerda 1.** Que conecta las poleas A y C e influye en el movimiento de la polea B . Ver Figura 26.
- **Modelo para la cuerda 2.** Que conecta las poleas B y C e influye en el movimiento de la polea A . Ver Figura 26.

Para establecer el modelo de longitud de la cuerda 1, que se ilustra en la Figura 26, es recomendable aplicar los pasos que se describen a continuación:

- **Paso 1.** Determinar los niveles de referencia fijos que permitan establecer las posiciones variables de algunos tramos de cuerda.
- **Paso 2.** Identificar los tramos constantes y los tramos variables para cada longitud de cuerda. Los tramos variables son necesarios para evaluar posteriormente velocidades y aceleraciones.
- **Paso 3.** Asignar variables de posición a los tramos variables de las cuerdas.
- **Paso 4.** Establecer una ecuación de longitud de cuerda (longitud total) con las variables definidas. Dicha longitud de cuerda es constante, dado que no se estira, y corresponde a la sumatoria de variables, lo que la hace derivable en el tiempo.

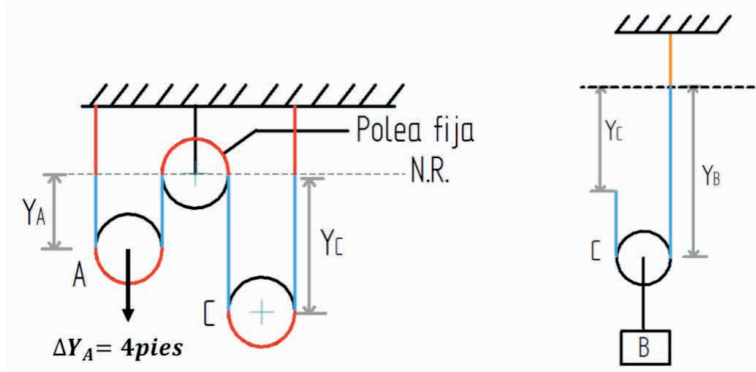


Figura 26. Modelos físicos para las longitudes de cuerda 1 (izquierda) y cuerda 2 (derecha) que relacionan los desplazamientos para las poleas A, C y polea B

6.2.4 Etapa 3. Planteamiento de la ecuación de longitud de cuerda

Consistentes con ambos modelos es necesario realizar los planteamientos analíticos que los representes para dar respuesta a las preguntas problemas relacionadas con la velocidad y aceleración del bloque B. Las ecuaciones de longitud se plantean para las dos cuerdas y en ellas se relacionan las variables (desplazamientos horizontales) de cada una de las poleas A, B y C y dada su geometría es simple observar que en dichas ecuaciones hay algunos términos comunes para las variables.

- **Longitud de cuerda para la cuerda 1.** Partiendo del modelo de la cuerda 1, se plantea la ecuación de longitud de la cuerda considerando tanto la posición sin desplazar como la posición desplazada:

- **Consideración de la longitud de cuerda 1 sin desplazar.**

$$L_1 = 2Y_A + 2Y_C + \text{tramos constantes} \quad \text{en } t = t_0 = 0 \text{ s} \quad (I)$$

- **Consideración de la longitud de cuerda 1 con desplazamiento.**

$$L_1 = 2(Y_A + 4) + (2Y_C + \Delta Y_C) + \text{tramos constantes} \quad \text{en } t = t_1 \text{ s}$$

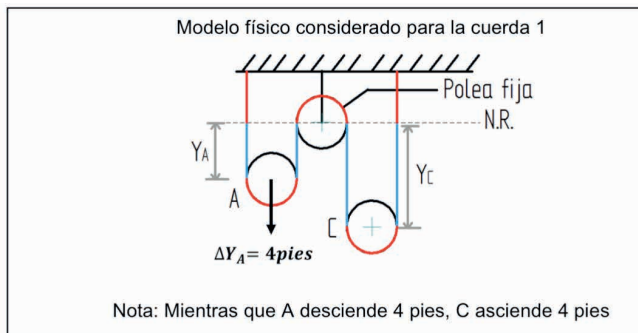
$$\rightarrow L_1 = 2Y_A + 8 + 2Y_C + 2\Delta Y_C + \text{tramos constantes} \quad \text{en } t = t_1 \text{ s} \quad (I')$$

Restando (I') - (I):

$$\rightarrow 0 = 8 + 2\Delta Y_C$$

$$\rightarrow \Delta Y_C = -8/2$$

$$\rightarrow \Delta Y_C = -4 \text{ pies}$$



- **Cálculo de velocidades y aceleraciones para la cuerda 1.** Partiendo de la ecuación de longitud de cuerda en (I):

$$L_1 = 2Y_A + 2Y_C + \text{tramos constantes} \quad \text{en } t = t_o = 0 \text{ s} \quad (I)$$

Derivando la longitud de cuerda L_1 con respecto al tiempo:

$$\frac{dL_1}{dt} = 2 \frac{dY_A}{dt} + 2 \frac{dY_C}{dt} + 0 = 0$$

Luego se obtiene la ecuación general del movimiento dependiente entre (A) y (C):

$$\rightarrow 2V_A + 2V_C = 0$$

$$\rightarrow V_A = -V_C \quad \text{ó} \quad V_C = -V_A \quad \text{¿signo?} \quad (1)$$

¿Cuál signo tomar para la velocidad?: Positivo o negativo

Nota: para la condición dada en el problema como Y_A se está alargando en 4 pies, entonces Y_C se está acortando en 4 pies. Asumiendo que la dirección positiva se tomara con referencia a la polea A; es decir, hacia abajo, se deduce que cuando la polea A se alarga (varía la posición), la polea B y/o el bloque B se desplaza hacia arriba.

Por lo tanto, se toma:

$$\rightarrow V_A = -V_C$$

Dónde el signo (-), indica que, para la condición dada en el problema, Y_C se está acortando.

Derivando nuevamente la ecuación anterior de velocidades para obtener las aceleraciones de (a_A) y (a_C), se obtiene la ecuación general de aceleraciones dependiente entre (A) y (C):

$$\rightarrow \frac{dV_C}{dt} = -\frac{dV_A}{dt}$$

Por lo tanto:

$$\rightarrow a_C = -a_A \quad (2)$$

- **Longitud de cuerda para la cuerda 2.** Partiendo del modelo de la cuerda 2, y siguiendo un procedimiento similar al de la cuerda 1, se plantea la ecuación de longitud de la cuerda considerando tanto la posición sin desplazar como la posición desplazada:

- **Consideración de la longitud de cuerda 2 sin desplazar.**

$$L_2 = 2Y_B - Y_C + \text{tramos constantes} \quad \text{en } t = t_o = 0 \text{ s} \quad (II)$$

- **Consideración de la longitud de cuerda 2 con desplazamiento.**

$$L_2 = 2(Y_B + \Delta Y_B) - (Y_C + \Delta Y_C) + \text{tramos constantes} \quad \text{en } t = t_1 \text{ s}$$

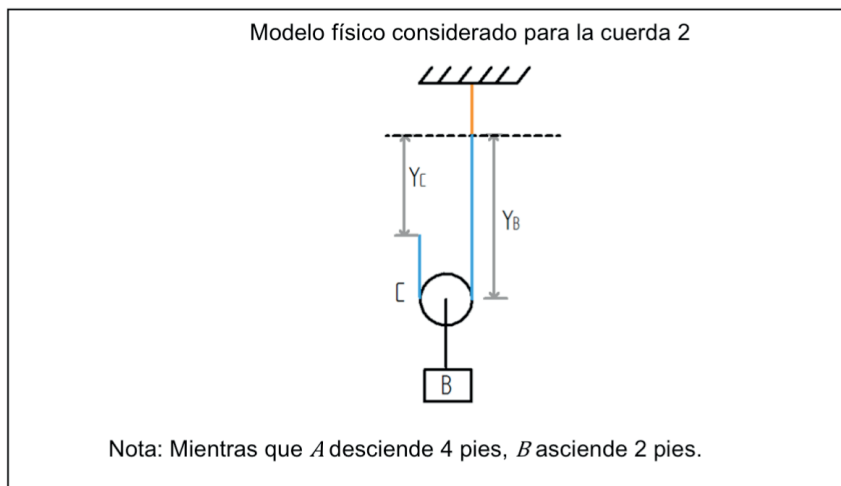
$$\rightarrow L_2 = 2Y_B + 2\Delta Y_B - Y_C + 4 + \text{tramos constantes} \quad \text{en } t = t_1 \text{ s} \quad (II')$$

Restando (II') - (II):

$$0 = 2\Delta Y_B + 4$$

$$\rightarrow \Delta Y_B = -4/2$$

$$\rightarrow \Delta Y_B = -2 \text{ pies}$$



- **Cálculo de velocidades y aceleraciones para la cuerda 2.**

Partiendo de la ecuación de longitud de cuerda en (II):

$$L_2 = 2Y_B - Y_C + \text{tramos constantes} \quad \text{en } t = t_o = 0 \text{ s} \quad (II)$$

Derivando la longitud de cuerda L_2 con respecto al tiempo:

$$\frac{dL_2}{dt} = 0 = 2 \frac{dY_B}{dt} - \frac{dY_C}{dt} + 0$$

Se obtiene la ecuación general de velocidades dependientes entre (B) y (C):

$$\rightarrow 2V_B - V_C = 0$$

$$\rightarrow V_B = \frac{V_C}{2} \quad (3)$$

Reemplazando (1) en (3):

Se obtiene una expresión para la velocidad del bloque B en términos de la velocidad de la polea A :

$$\rightarrow V_B = -\frac{V_A}{2}$$

Derivando la ecuación anterior de velocidad para B se obtiene la aceleración del bloque situado en B :

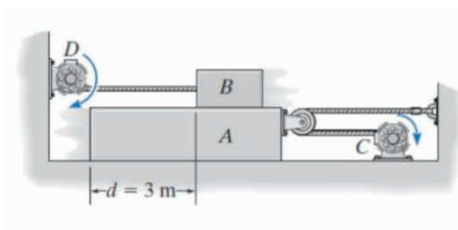
$$\frac{dV_B}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dV_A}{dt}$$

$$\rightarrow a_B = -\frac{a_A}{2}$$

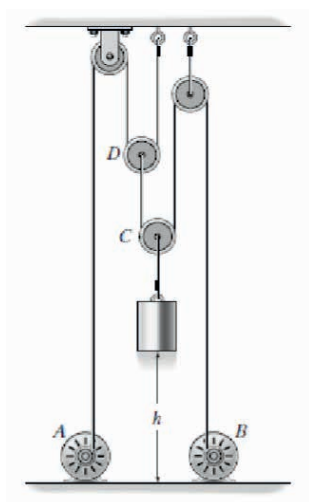
6.2.5 Etapa 4. Análisis y validación de resultados

- De manera simple mediante una buena comprensión y análisis del sistema de estudio, se evidencia a primera vista que cuando la polea A se desplaza el bloque B también cambia su posición.
- En particular, cuando se desplaza A hacia abajo, B se desplazará hacia arriba, pero como el desplazamiento de B también hace parte de otra cuerda, la cuerda 2, es importante evaluar la relación existente en la polea de conexión entre la cuerda 1 y la cuerda 2, en este caso la polea C . Esta relación solo es posible con el planteamiento analítico de las ecuaciones de longitud de cuerda y su posterior proceso de derivación en el tiempo.
- En el caso particular, cuando la polea A se desplaza una longitud determinada, el bloque B con su polea B se desplaza la mitad de esa longitud. Dicha relación se mantiene para las velocidades y aceleraciones.
- Se puede evidenciar que el sentido positivo o negativo tiene su interpretación como alargamiento o acortamiento de la variable medida, en este caso el desplazamiento, la velocidad y la aceleración.
- También se evidencia claramente que la polea A y la polea C se desplazan la misma magnitud, en este caso 4 pies, y esto es debido a que están conectadas con la misma cuerda (elemento inextensible). Se cumple también que mientras A se desplaza hacia abajo, C lo hace hacia arriba y este sentido de alargamiento y acortamiento está representado por el signo (-) en el resultado analítico.

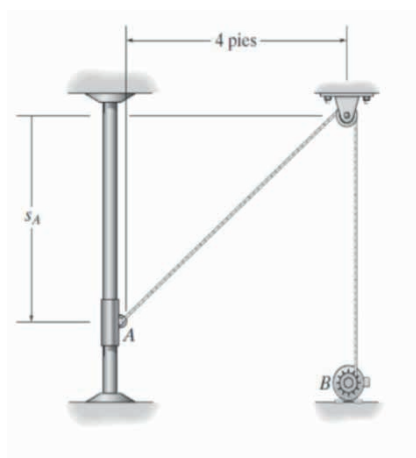
6.3 Problemas propuestos con movimiento dependiente



El motor en C jala el cable con una aceleración constante $a_c = 3t^2 \left(\frac{m}{s^2}\right)$ donde t está en segundos. El motor en D jala su cable a $a_D = 5m/s^2$. Si ambos motores arrancan al mismo tiempo del reposo cuando $d=3m$. Determinar: 1) el tiempo requerido para $d=0$ y 2) las velocidades de los bloques A y B cuando esto ocurre (Hibbeler, 2004-2010-2016).



Si los motores A y B tiran de los cables con una aceleración de $a=(0.2t)m/s^2$, donde t está en segundos, determine la rapidez del bloque cuando alcanza una altura $h=4m$, partiendo del reposo en $h=0m$. Incluso, ¿cuánto tiempo se tarda en alcanzar esta altura? (Hibbeler, 2004-2010-2016).



El movimiento del collar en A lo controla un motor en B , de modo que cuando el collar está en $s_A=3pies$, sube a $2pies/s$, y su velocidad se reduce a $1pies/s^2$ (aceleración). Determine la velocidad y aceleración de un punto en el cable a medida que se jala hacia el motor B en este instante (Hibbeler, 2004-2010-2016).

REFERENCIAS

Hibbeler R.C. (2004). Dinámica. Mecánica Vectorial Para Ingenieros. Editorial Pearson. Edición N°10.

Hibbeler R.C. (2010). Dinámica. Ingeniería Mecánica. Editorial Pearson. Edición N°12.

Hibbeler R.C. (2016). *Engineering Mechanics: Dynamics*. Editorial Pearson. Edición N°14.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2012). *Engineering Mechanics. Dynamics. Seventh Edition. Volume 2. John Wiley & Sons, Inc.*

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2014). Mecánica para Ingenieros. Dinámica. Edición N°3. Editorial Reverté S.A.

Pytel A. y Kiusalaas J. (2012). Ingeniería Mecánica. Dinámica. Edición N°3. Cengage Learning.

Bibliografía recomendada

Bedford A. y Fowler W. (2008). Dinámica Mecánica para ingeniería. Editorial Pearson.

Beer F.P., Johnston, E.R. y Cornwell, P.J. (2010). Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica, McGraw Hill Interamericana Editores S.A. Volumen 2. Edición N°9.

Beer F.P., Johnston, E.R. y Cornwell, P.J. (2013). Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica, McGraw Hill Interamericana Editores S.A. Edición N°10.

Myszka D. H. (2012). Máquinas y Mecanismos. Editorial Pearson. Edición N°4.

Riley W.F. y Sturges L.D. (2001). Ingeniería Mecánica: Dinámica. Editorial Reverté S.A.

GERMÁN LEONARDO GARCÍA-MONSALVE, Ingeniero Mecánico de la Universidad Nacional de Colombia en el año 1990. Especialista en Gerencia de Mantenimiento de la Universidad de Antioquia en Medellín-Colombia en el año 2000. Especialista Tecnológico en Sistemas Automáticos de Control en la Institución Universitaria Pascual Bravo en Medellín-Colombia en el año 2000. Magíster en Ingeniería, área de Materiales y Procesos en la Universidad Nacional de Colombia en el año 2006. Doctor en Ingeniería, en la Universidad Nacional de Colombia en el año 2013. Profesor Asociado en dedicación exclusiva del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Colombia desde el año 1999, en las áreas de diseño mecánico y procesos de manufactura, impartiendo los cursos de estática, dinámica, diseño de procesos de maquinado, gerencia del mantenimiento, entre otros. Fue Director del Departamento de Ingeniería Mecánica en el período de 2014-2016 y desde el año 2023 es el coordinador del Laboratorio de Procesos de Manufactura en la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. Desde el año 2014, es el Líder del Grupo de Investigación de Diseño Mecánico Computacional (DIMEC), COL0075856, y desde el año 2006 es integrante de este grupo de investigación. Su investigación se centra en el diseño de herramientas agrícolas; ensayos mecánicos y diseño de uniones adhesivas; caracterización y diseño de recubrimientos poliméricos para mantenimiento y protección de sistemas mecánicos; caracterización de la integridad superficial de piezas mecanizadas; implementación de estrategias para la gestión del mantenimiento. Tiene experiencia industrial superior a 17 años en los sectores productivos textil, químico, agroindustrial, metalmecánico y empaques plásticos. Código de Investigador ORCID: 0000-0003-3150-1847.

NELSON ANTONIO VANEGAS-MOLINA, Ingeniero Mecánico de la Universidad Nacional de Colombia. Magíster en Ingeniería Mecánica de la Universidad de São Paulo-Brasil. Profesor/investigador en categoría de profesor asociado en dedicación exclusiva del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín desde el año 2003, en el área de diseño mecánico. Se ha desempeñado como: coordinador del Laboratorio de Procesos de Manufactura, Laboratorio de Diagnóstico de Maquinaria y de la Sala Gráfica de Ingeniería Mecánica, miembro del Comité Asesor del pregrado y posgrado del Área Curricular de Ingeniería Mecánica, director del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín. Director del Área Curricular de Desarrollo Tecnológico; es Miembro del Grupo de Investigación de Diseño Mecánico Computacional (DIMEC). Posee experiencia en la industria metalmecánica en la cual se desempeñó como director de proyectos.



