

Maria Joseane Felipe Guedes Macêdo

CÁLCULO II



EdUFERSA

Maria Joseane Felipe Guedes Macêdo

CÁLCULO II



EdUFERSA

Conselho Editorial da EdUFERSA

Mário Gaudêncio, Me.

Walter Martins Rodrigues, Dr.

Francisco Franciné Maia Júnior, Dr.

Rafael Castelo Guedes Martins, Me.

Keina Cristina S. Sousa, Me.

Antonio Ronaldo Gomes Garcia, Dr.

Auristela Crisanto da Cunha, Dr.

Janilson Pinheiro de Assis, Dr.

Luís Cesar de Aquino Lemos Filho, Dr.

Rodrigo Silva da Costa, Dr.

Valquíria Melo Souza Correia, Me.

Governo Federal
Ministro de Educação
Aloizio Mercadante Oliva

Universidade Aberta do Brasil
Responsável pela Diretoria da Educação a Distância
João Carlos Teatini de Souza Clímaco

Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Reitor
José de Arimatea de Matos

Pró-Reitor de Graduação
Augusto Carlos Pavão

Núcleo de Educação a Distância
Coordenadora UAB
Kátia Cilene da Silva

Equipe multidisciplinar

Antônio Charleskson Lopes Pinheiro - Coordenador de Produção de Material Didático
Ulisses de Melo Furtado - Designer Instrucional
Nayra Maria da Costa Lima - Assessora Pedagógica
Celeneh Rocha de Castro - Coordenadora de Formação Continuada
Thiago Henrique Freire de Oliveira - Gerente de Rede
Edinaldo de Queiroz Fonseca Junior - Webdesigner
Adriana Mara Guimarães de Farias - Programadora
Felipe de Araújo Alves - Designer Gráfico
Renato Cássio Arruda Alves - Designer Gráfico
Paulo Victor Maciel de Moraes - Diagramador
Marcos Aurélio Oliveira Ribeiro - Diagramador
Ramon Ribeiro Vitorino Rodrigues - Diagramador

Arte da capa

Felipe de Araújo Alves

Equipe administrativa

Rafaela Cristina Alves de Freitas - Assistente em Administração
Iriane Teresa de Araújo - Responsável pelo fomento
Lucas Vinicius Martins Cunha - Estagiário

Equipe de apoio

Ana Mara Alves de Freitas - Revisor Linguístico
Nayra Maria da Costa Lima - Revisor de Didática
Flaviana Moreira de Souza Amorim - Revisor Matemático
Josenildo Ferreira Galdino - Revisor Matemático

Serviços técnicos especializados

Urbanóide Comunicação & Design

Edição

EdUFERSA

Impressão

Imprima Soluções Gráfica Ltda/ME

© 2013 by NEaD/UFERSA - Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, do NEaD/UFERSA. O conteúdo da obra é de exclusiva responsabilidade dos autores.

Biblioteca Central Orlando Teixeira – BCOT/UFERSA **Sector de Processos Técnicos – Ficha Catalográfica**

M134c Macêdo, Maria Joseane Felipe Guedes.

Cálculo II / Maria Joseane Felipe Guedes Macêdo. –
Mossoró :
EdUFERSA, 2013.
92 f. : il.

ISBN: 978-85-63145-37-6

1. Matemática. 2. Cálculo. I. Título.

RN/UFERSA/BCOT

CDD: 515.3

Bibliotecário-Documentalista
Mário Gaudêncio – CRB-15/476



<http://nead.ufersa.edu.br/>

APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

Caro aluno (a),

Na disciplina de Cálculo II você dará continuidade ao estudo iniciado na disciplina de Cálculo I. Você continuará estudando funções de uma única variável, porém o seu foco agora é aprender a integrar uma função, uma vez que já foi estudada a sua derivada e algumas aplicações dela. Veremos que o processo de integração é inverso ao processo de derivação. Em virtude disso, para que você saiba integrar uma função é necessário, antes de tudo, que saiba derivá-la.

Neste curso, você vai estudar a primitiva de uma função, as técnicas de integração e a integral definida. Uma vez entendido o que é a integral de uma função e aprendido as técnicas para obter tal integral, iremos estudar as aplicações da integral definida no cálculo de área de regiões no plano e volume de sólidos de revolução. A integral de uma função tem vasta aplicação nas diversas áreas de ciências e, tem como um dos principais resultados o Teorema Fundamental do Cálculo, o qual é uma ferramenta poderosa para a resolução de diversos problemas envolvendo integrais. Você também estudará as extensões da integral, através das integrais impróprias, e uma introdução às sequências e séries numéricas, onde é visto a definição e alguns exemplos.

Desse modo, a nossa disciplina tem como objetivo proporcionar ao aluno subsídios necessários à apropriação de conhecimentos abordados no componente curricular da disciplina Cálculo Diferencial e Integral II, tal qual, a aplicação dos conceitos em sua área de atuação e situações cotidianas.

Ao final do curso, o aluno deverá saber desenvolver as técnicas básicas de integração, resolver problemas que abordem integral definida, estabelecer a relação entre derivação e integração, por meio, do Teorema Fundamental do Cálculo, aplicar o conhecimento acerca das técnicas de integração no cálculo de comprimento de curvas, áreas e volumes de sólidos e apresentar noções básicas sobre sequências e séries numéricas.

SOBRE A AUTORA

Maria Joseane Felipe Guedes Macedo é bacharel e mestre em Matemática e Meteorologia, pela Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Atualmente, pertence ao quadro efetivo de professores de Matemática, da Universidade Federal Rural do Semi-árido (UFERSA). Seu interesse em pesquisa se dá na área de Matemática Aplicada, na qual cursou o seu mestrado.

SUMÁRIO

UNIDADE I

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

INTRODUÇÃO 13

PRIMITIVA DE UMA FUNÇÃO 13

A INTEGRAL INDEFINIDA 15

- Propriedades da Integral Indefinida 15

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO 20

- Técnica de Integração por Substituição ou Mudança de Variável 20
- Técnica de Integração por Partes 23
- Frações Parciais 25
- Integrais de Funções Trigonométricas 35
- Substituição Trigonométrica 37

A INTEGRAL DEFINIDA 39

- Propriedades da Integral Definida 40

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO 43

UNIDADE II

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

APLICAÇÕES DAS INTEGRAIS NO CÁLCULO DE ÁREAS 49

- O Cálculo de Área 49

APLICAÇÕES DAS INTEGRAIS NO CÁLCULO DE VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO 58

- Volume de um Sólido de Revolução obtido pela rotação de uma região plana em torno do eixo x 58

• Volume de um Sólido de Revolução obtido pela rotação de uma região plana em torno do eixo y	67
• Volume de um Sólido de Revolução obtido pela rotação de uma região plana em torno de uma reta paralela a um dos eixos coordenados	68
• Método das Cascas Cilíndricas	70
APLICAÇÃO DA INTEGRAL NO CÁLCULO DE COMPRIMENTO DE ARCO DE UMA CURVA PLANA	72
• Comprimento do Arco de uma curva C qualquer	72

UNIDADE III

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS, NOÇÕES BÁSICAS DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS	77
• Integrais Impróprias com Limites de Integração Infinitos	77
• Integrais Impróprias com Integrandos Infinitos	79
SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS	80
SÉRIES NUMÉRICAS	82
• Algumas Séries de Números Reais Especiais	83
• Limite de uma Série de Números Reais	85

I

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Nesta unidade, você compreenderá como se resolve uma integral utilizando as técnicas de integrações existentes, entre as quais, integração por substituição, integração por partes, integração utilizando o método das frações parciais e integração de funções trigonométricas. Além disso, vamos estudar a integral definida, conhecendo a sua definição formal e, fazer a ligação entre a integral e a derivada de uma função através do Teorema Fundamental do Cálculo.

Objetivos:

- Determinar uma primitiva de uma função;
- Calcular integrais de funções, utilizando as várias técnicas de integração estudadas;
- Determinar integral definida e calcular uma integral definida fazendo uso do Teorema Fundamental do Cálculo.

Introdução

UN 01

Neste tópico, vamos introduzir o conceito de primitiva de uma função e você aprenderá as técnicas de integração através da integral indefinida, que consiste no processo inverso ao de derivação. Ao final desta unidade você deve estar familiarizado com as técnicas básicas de integração, como os métodos de integração por substituição, integração por partes e integração pelo método das frações parciais.

Você já se perguntou por que está estudando integral? Que importância esse conteúdo tem? Será que podemos relacionar derivadas e integrais ao nosso dia a dia? Vejamos alguns exemplos:

1. Paulo está dirigindo um carro a uma determinada velocidade x , e de repente lhe bateu uma vontade de visitar a sua amiga Laura. Paulo olha para o relógio e percebe que já está um pouco tarde. Então ele se pergunta: “Será que se continuar dirigindo, a essa velocidade, chegarei à casa de Laura antes do anoitecer?” Você acha que Paulo só responderá essa pergunta depois que chegar na casa de Laura, ou será que ele pode determinar a hora em que estará na casa utilizando a matemática? (Uma vez conhecida a função velocidade, ao integrá-la encontraremos a função posição $(s(t))$ e sabendo a distância até a casa de Laura, Paulo terá condições de determinar a que horas ele chegaria à casa de Laura e, a partir do resultado, tomar a sua decisão.)

2. Um biólogo que conhece a taxa de crescimento de uma população de bactérias pode querer determinar qual o tamanho da população num futuro próximo ou longínquo. Essas são situações que podem ocorrer e que podem ser solucionadas com o auxílio do cálculo diferencial e integral.

Primitiva de uma função

13

UN 01

A fim de desenvolvermos as técnicas de integração precisamos entender o conceito de primitiva de uma função, como segue a definição.

Definição 1: Seja f uma função definida num intervalo I . Dizemos que uma função F , também definida em I , é primitiva da função f se satisfaz

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

Observação: Salvo menção contrária, omitiremos o intervalo I quando nos referirmos a duas primitivas de uma mesma função sobre o mesmo intervalo. Ao usarmos uma determinada letra minúscula para denotar uma função, utilizaremos a mesma letra em maiúsculo para denotar a sua primitiva. Por exemplo, seja a função h e a sua primitiva H .

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Observe que uma primitiva da função $f(x) = x^3$ é dada por $F(x) = \frac{1}{4}x^4$.

Solução: De fato, observe que a derivada de $F(x)$ é dada por

$$F'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 \right)' = \frac{1}{4}4x^{4-1} = x^3.$$

2. Observe que uma primitiva da função $f(x)=x^5+x$ é dada por $F(x)=\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}x^2$.

Solução: De fato,

$$F'(x) = \left(\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^2 \right)' = \frac{1}{6}6x^{6-1} + \frac{1}{2}2x^{2-1} = x^5 + x.$$

3. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, a função $F(x) = 5x + \frac{1}{5}x^5 + c$ é primitiva da função $f(x) = 5 + x^4$.

Solução: De fato,

$$F'(x) = \left(5x + \frac{1}{5}x^5 + c \right)' = 5 + \frac{1}{5}5x^{5-1} + 0 = 5 + x^4.$$

Observação: Note que ambas as funções $F_1(x) = 5x + \frac{1}{5}x^5 + 5$ e $F_2(x) = 5x + \frac{1}{5}x^5 - 100$ são primitivas da função $f(x) = 5 + x^4$, uma vez que a constante c é qualquer número real. Assim, a função $F(x) = 5x + \frac{1}{5}x^5 + c$ representa uma família de primitivas da função f , pois a partir de F podemos obter inúmeras primitivas para f bastando escolher determinado número real para c .

4. A função $S(x) = \frac{1}{5x^5} + c$, onde c é uma constante real, é uma primitiva da função $s(x) = \frac{-1}{x^6}$.

Solução: De fato, pois:

$$S'(x) = \left(\frac{1}{5x^5} + c \right)' = \left(\frac{1}{5x^5} \right)' + 0 = \left(\frac{1}{5}x^{-5} \right)' = \frac{-1}{x^6}.$$

Note que a função S , dada no exemplo anterior, representa uma família de primitivas da função s .

Os dois exemplos anteriores são formalizados na proposição a seguir.

Proposição 1: Sejam f uma função definida num intervalo I e F uma primitiva de f em I . Então, para toda constante c , a função $F(x)+c$ também é uma primitiva de f .

Demonstração: Observe que,

$$(F(x)+c)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x),$$

donde segue que $F(x)+c$ é uma primitiva de f . ■

Isto é, a partir de uma primitiva particular de uma determinada função, é possível obter uma família de primitivas para tal função. Além disso, também temos uma relação interessante entre duas funções que possuem derivadas iguais (ver a proposição a seguir, cuja demonstração será omitida).

Proposição 2: Se duas funções f e g possuem derivadas iguais num mesmo intervalo I , então em I elas diferem por uma constante, isto é, $g(x)=f(x)+c$, onde c é a tal constante.

Das proposições (1) e (2) podemos concluir que se a função F é uma primitiva, em particular, da função f , então toda primitiva de f é da forma $F(x)+c$, onde c é uma constante. E dessa forma, para achar a família de todas as primitivas de uma função f basta determinar uma primitiva particular.

A Integral indefinida

UN 01

Agora, já temos subsídios para a definição que segue sobre integral indefinida. Observaremos, no decorrer do nosso estudo, que a integração é um processo inverso ao de derivação, estudado na disciplina de **Cálculo I**.

Antes de trabalhar com as técnicas de integração, vejamos primeiro o que de fato é uma integral indefinida e, para que você, leitor, se familiarize vamos trabalhar um pouco mais com essa notação e esse novo conceito.

Definição 2 (Integral Indefinida): Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Chamamos a expressão $F(x)+c$ de integral indefinida da função f e denotamos por,

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

onde c é uma constante real.

Observações:

- O símbolo $\int$ é chamado sinal de integração;
- A função $f(x)$ é chamada função integrando;
- O símbolo dx indica a variável de integração;
- Note que $\int f(x)dx$ representa uma família de funções.

DICA

O leitor que estiver familiarizado com as técnicas de derivação terá maior facilidade no aprendizado das técnicas de integração. Para o leitor que anda esquecido, ainda é tempo de revisar um pouco a disciplina de Cálculo I, especialmente no que se refere à derivação.

15

Propriedades da integral indefinida

Sejam I um intervalo, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis e k uma constante real.

a) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, onde n é um número real tal que $n \neq -1$ e c é a constante de integração.

Demonstração: Observe que,

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \right)' = (n+1) \frac{x^{n+1-1}}{n+1} + 0 = x^n. \quad \blacksquare$$

b) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$;

Demonstração: Seja F uma primitiva de f , isto é $F'(x) = f(x)$. E observe que,

$$[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x),$$

donde segue que kF é primitiva de kf . Desse modo, temos que:

$$\int kf(x)dx = kF(x) + c = kF(x) + kc_1 = k[F(x) + c_1] = k \int f(x)dx,$$

basta tomar $c_1 = \frac{c}{k}$. $\blacksquare$

c) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. (A integral da soma é a soma das integrais)

Demonstração: Sejam $F(x)$ e $G(x)$ respectivas primitivas de $f(x)$ e $g(x)$. Assim, temos que:

$$[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Donde segue que $F(x) + G(x)$ é uma primitiva de $f(x) + g(x)$. Desse modo,

$$\int [f(x) + g(x)]dx = [F(x) + G(x)] + c = [F(x) + G(x)] + c_1 + c_2 = [F(x) + c_1] + [G(x) + c_2] = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \quad \blacksquare$$

Observe que fizemos $c=c_1+c_2$. Como c é uma constante real, esse artifício pode ser feito sem perda de generalidade pois, qualquer número real pode ser visto como a soma de outros dois números reais.

Obs.: A propriedade da soma de integrais foi apresentada para a soma de duas parcelas, porém tal propriedade vale para a soma de quaisquer n parcelas. Ou seja, essa propriedade vale para a soma de um número finito de parcelas.

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx.$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int 3x \, dx$.

Solução: Para resolver essa questão utilizaremos as propriedades (a) e (b).

$$\int 3x \, dx = 3 \int x \, dx = 3 \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{3}{2} x^2 + c.$$

Logo,

$$\int 3x \, dx = \frac{3}{2} x^2 + c.$$

Note que utilizamos as propriedades (a) e (b) para resolver esse exemplo.

DICA

Esses primeiros exemplos estão sendo resolvidos com todos os detalhes para orientar você. Futuramente, omitiremos certos detalhes nos exercícios para não torná-los demasiadamente cansativos!

b) $\int 5 \sin x \, dx$.

Solução: Utilizaremos a propriedade (b).

$$\int 5 \sin x \, dx = 5 \int \sin x \, dx = 5(-\cos x + c_1) = -5 \cos x + 5c_1 = -5 \cos x + c, \text{ onde } c = 5c_1.$$

Logo,

$$\int 5 \sin x \, dx = -5 \cos x + c.$$

c) $\int (5x^7 + 3) \, dx$.

Solução: Nessa questão, iremos aplicar as propriedades básicas de integração.

$$\begin{aligned} \int (5x^7 + 3) \, dx &= \int 5x^7 \, dx + \int 3 \, dx = 5 \int x^7 \, dx + 3 \int dx = \\ &= \left(5 \frac{x^{7+1}}{7+1} + c_1 \right) + (3x + c_2) = 5 \frac{x^8}{8} + 3x + (c_1 + c_2) = \frac{5}{8} x^8 + 3x + c, \end{aligned}$$

onde $c=c_1+c_2$ é a constante de integração. Logo,

$$\int (5x^7 + 3) \, dx = \frac{5}{8} x^8 + 3x + c.$$

d) $\int \left(\frac{1}{2}x + \sin x - 4 \cos x \right) dx$.

Solução:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{2}x + \sin x - 4 \cos x \right) dx &= \frac{1}{2} \int x \, dx + \int \sin x \, dx - 4 \int \cos x \, dx = \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + c_1 \right) + (-\cos x + c_2) - (4 \sin x + c_3) = \frac{1}{4} x^2 - \cos x - 4 \sin x + c, \end{aligned}$$

onde $c=c_1+c_2-c_3$ é a constante de integração. Logo,

$$\int \left(\frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x - 4\cos x \right) dx = \frac{1}{4}x^2 - \cos x - 4\operatorname{sen} x + c.$$

Obs.: Para facilitar os cálculos vamos inserir a constante c apenas no resultado final da integral.

Das fórmulas de derivações estudadas na disciplina de Cálculo I, podemos estabelecer a seguinte tabela de integrais imediatas. Para isso, sejam $\alpha \neq 0$ e k constantes reais.

Tabela 1 – Tabela de integrais indefinidas imediatas

Derivada	Integral
$(kx)' = k$	$\int k \, dx = kx + c$
$(x)' = 1^x$	$\int dx = x + c$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + c$
$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)' = x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$
$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$
$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$
$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$
$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + c$
$(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$
$(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$	$\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + c$
$(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$	$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$
$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + c$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$
$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + c$
$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$	$\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x + c$
$(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$	$\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + c$
$(\operatorname{cotgh} x)' = -\operatorname{cosech}^2 x$	$\int \operatorname{cosech}^2 x \, dx = -\operatorname{cotgh} x + c$
$(\operatorname{tgh} x)' = \operatorname{sech}^2 x$	$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \operatorname{tgh} x + c$
$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$	$\int \operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x \, dx = -\operatorname{sech} x + c$
$(\operatorname{cosech} x)' = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x$	$\int \operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x \, dx = -\operatorname{cosech} x + c$
$(\operatorname{argsenh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arg} \operatorname{senh} x + c = \ln x + \sqrt{x^2+1} + c$
$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arg} \cosh x + c = \ln x + \sqrt{x^2-1} + c$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Com base na tabela de integrais indefinidas imediatas e nas propriedades estudadas, calcule as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int (3x^2 - 2x + 1)dx$;

Solução:

$$\int (3x^2 - 2x + 1)dx = 3\int x^2 dx - 2\int x dx + \int 1 dx = 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + c = x^3 - x^2 + x + c.$$

Logo,

$$\int (3x^2 - 2x + 1)dx = x^3 - x^2 + x + c.$$

b) $\int (ax^2 + bx + c)dx$, onde a, b e c são constantes;

Solução:

$$\int (ax^2 + bx + c)dx = a\int x^2 dx + b\int x dx + c\int 1 dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + k.$$

Logo,

$$\int (ax^2 + bx + c)dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + k.$$

Nesse caso, denotamos a constante de integração por k, uma vez que a constante c já foi utilizada.

c) $\int (5x^3 - 2e^x + \sin x)dx$;

Solução:

$$\int (5x^3 - 2e^x + \sin x)dx = 5\int x^3 dx - 2\int e^x dx + \int \sin x dx = 5\frac{x^4}{4} - 2e^x - \cos x + c.$$

Logo,

$$\int (5x^3 - 2e^x + \sin x)dx = \frac{5}{4}x^4 - 2e^x - \cos x + c.$$

d) $\int (5x^3 + \sin x - \sqrt{x})dx$;

Solução: Nos casos em que tivermos raízes, a melhor forma de trabalhar é transformá-las em potências e depois integrá-las, como segue.

$$\begin{aligned}\int (5x^3 + \sin x - \sqrt{x})dx &= \int \left(5x^3 + \sin x - x^{\frac{1}{2}} \right) dx = 5\int x^3 dx + \int \sin x dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{5}{4}x^4 - \cos x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{5}{4}x^4 - \cos x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int (5x^3 + \sin x - \sqrt{x})dx = \frac{5}{4}x^4 - \cos x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c.$$

e) $\int (2\sec x \operatorname{tg} x - 3\sec^2 x) dx;$

Solução:

$$\int (2\sec x \operatorname{tg} x - 3\sec^2 x) dx = 2 \int \sec x \operatorname{tg} x dx - 3 \int \sec^2 x dx = 2\sec x - 3\operatorname{tg} x + c.$$

Logo,

$$\int (2\sec x \operatorname{tg} x - 3\sec^2 x) dx = 2\sec x - 3\operatorname{tg} x + c.$$

f) $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x} dx;$

Solução: Nesse caso, vamos primeiro manipular a função a fim de encontrarmos uma integral imediata.

Sabemos que, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ e que $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$. Daí, temos que:

$$\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin x}} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \sin x dx = \int \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + c.$$

Logo,

$$\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x} dx = \sec x + c.$$

g) $\int \left(2e^x - \cos x + \frac{1}{4x} \right) dx;$

Solução: Pelas propriedades de integral, temos:

$$\int \left(2e^x - \cos x + \frac{1}{4x} \right) dx = 2 \int e^x dx - \int \cos x dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx = 2e^x - \sin x + \frac{1}{4} \ln|x| + c.$$

Logo,

$$\int \left(2e^x - \cos x + \frac{1}{4x} \right) dx = 2e^x - \sin x + \frac{1}{4} \ln|x| + c.$$

h) $\int \frac{x^3 + x^{1/4}}{\sqrt[3]{x}} dx;$

Solução: Vamos manipular a função algebricamente a fim de usarmos as propriedades de integrais, e ou integrais imediatas, como segue:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x^{1/4}}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \left(\frac{x^3}{x^{1/3}} + \frac{x^{1/4}}{x^{1/3}} \right) dx \\ &= \int \left(x^{3-1/3} + x^{1/4-1/3} \right) dx = \int x^{8/3} dx + \int x^{-1/12} dx = \frac{x^{11/3}}{11/3} + \frac{x^{11/12}}{11/12} + c = \frac{3}{11} x^{11/3} + \frac{12}{11} x^{11/12} + c. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int \frac{x^3 + x^{1/4}}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{11} x^{11/3} + \frac{12}{11} x^{11/12} + c.$$

Observe que, nesse exercício, precisamos utilizar os conhecimentos a cerca de potenciação e operações com frações. Esses são conhecimentos básicos de matemática necessários para qualquer pessoa que queira estudar cálculo.

▶ EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Baseado na tabela de integrais indefinidas e nas propriedades estudadas, resolva as seguintes integrais indefinidas:

$$a) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$b) \int \left(\frac{e^t}{2} + \sqrt{t} + \frac{1}{t} \right) dt;$$

$$c) \int (4x-5)(x-9) dx;$$

$$d) \int (x\sqrt[4]{x} + \sec x \operatorname{tg} x) dx;$$

$$e) \int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{cosec}^2 x dx$$

$$f) \int \frac{dx}{x^4};$$

$$g) \int \frac{\alpha^5 + 5}{\alpha} d\alpha;$$

$$h) \int \sqrt{\frac{16}{1-x^2}} dx$$

$$i) \int (x + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x}) dx;$$

$$j) \int \frac{3dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

2. Determine a função f tal que $\int f(x) dx = x^4 + 3x^5 - \ln x + c$.

3. Determine a função f tal que $\int f(x) dx = \sin x + \operatorname{tg} x + c$.

4. Encontre uma primitiva da função dada por $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$, que se anule no ponto de abscissa $x=1$.

Técnicas de integração

UN 01

20

Nem sempre é possível resolver uma integral utilizando as integrais imediatas. Na maioria das vezes, é necessário usar algum “artifício matemático” a fim de chegar numa integral imediata e solucioná-la. Nessa seção, vamos estudar algumas técnicas com o intuito de nos ajudar a resolver tais integrais, entre elas, integração por substituição e integração por partes.

Técnica de integração por substituição ou mudança de variável

Um desses “artifícios” é o que vamos estudar agora, o qual é conhecido como a técnica de integração por substituição. Primeiramente, vamos tentar justificar essa técnica, e depois faremos alguns exercícios para colocá-la em prática.

Sejam f , F e h funções definidas no intervalo I tais que $F'(x) = f(x)$ (isto é, F é primitiva de f), $\operatorname{Im} h \subset D(f)$ e h seja derivável. Então, utilizando a regra da cadeia podemos derivar a seguinte função composta,

$$(F \circ h)'(x) = [F(h(x))] = F'(h(x)) h'(x) = f(h(x)) h'(x),$$

Ou seja,

$$f(h(x)) h'(x) = [F(h(x))] = F'(h(x)) h'(x) \Rightarrow \int f(h(x)) h'(x) dx = F(h(x)) + c.$$

Fazendo a substituição,

$$u = h(x) \Rightarrow du = h'(x) dx,$$

temos que,

$$\int (u) du = F(u) + c.$$

Desse modo, o método de integração por substituição consiste basicamente em vermos a função a ser integrada como uma função composta e identificar o termo a qual chamaremos de u . Em seguida, faz-se a substituição e integra-se a função na nova variável, para depois retornar para a variável de origem. Vamos fazer alguns exemplos para efetivar o aprendizado.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int \frac{x^7}{2+x^8} dx.$

Solução: Observe que se derivamos o denominador da fração aparecerá o termo do numerador. Dessa forma, podemos tentar a seguinte substituição,

$$u = 2 + x^8 \Rightarrow du = 8x^7 dx \Rightarrow x^7 dx = \frac{1}{8} du.$$

Assim, temos:

$$\int \frac{x^7}{2+x^8} dx = \int \frac{1}{8} \frac{du}{u} = \frac{1}{8} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{8} \ln|u| + c.$$

Note que, após a mudança de variável chegamos a uma integral imediata (ver tabela de integrais imediatas). E retornando à variável x , temos:

$$\int \frac{x^7}{2+x^8} dx = \frac{1}{8} \ln|2+x^8| + c.$$

b) $\int \sin(2x) dx.$

Solução: Nesse caso a mudança de variável é bem sugestiva. Façamos,

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}.$$

Fazendo a substituição na integral, temos:

$$\int \sin(2x) dx = \int \sin u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + c,$$

Onde c é a constante de integração. Desfazendo a substituição, temos que:

$$\int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c.$$

c) $\int \cos(x+5) dx.$

Solução: Como no exemplo anterior, observe que a mudança de variável também é sugestiva. Provavelmente, você já deve ter percebido que devemos fazer a seguinte substituição,

$$u = x + 5 \Rightarrow du = dx.$$

Dessa forma, temos que:

$$\int \cos(x+5) dx = \int \cos u du = \sin u + c.$$

Retornando para a variável x ,

$$\int \cos(x+5) dx = \sin(x+5) + c.$$

d) $\int \frac{dx}{(2x+1)^5}.$

Solução: A substituição que faremos nesse caso é a seguinte,

$$u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du.$$

Com isso, temos:

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^5} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^5} = \frac{1}{2} \int u^{-5} du = \frac{1}{2} \frac{u^{-4}}{-4} + c = \frac{-1}{8u^4} + c.$$

Desfazendo a substituição, concluímos que:

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^5} = \frac{-1}{8(2x+1)^4} + c.$$

e) $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

Solução: Vamos ver como podemos utilizar o método de substituição para resolver a integral da tangente de x . Nesse caso, precisamos lembrar a seguinte identidade:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Fazendo, $u = \cos x$, temos que: $du = -\operatorname{sen} x \, dx$. Desse modo,

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c.$$

Retornando para a variável x , temos

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + c.$$

f) $\int [\cos x + \operatorname{sen}(5x) + \sec^2(6x)] dx$.

Solução: Primeiramente, devemos observar que temos uma soma de parcelas, o que implica em utilizarmos a propriedade da integral da soma. Logo,

$$\int [\cos x + \operatorname{sen}(5x) + \sec^2(6x)] dx = \int \cos x \, dx + \int \operatorname{sen}(5x) \, dx + \int \sec^2(6x) \, dx. \quad (I)$$

Agora, vamos resolver cada integral separadamente e utilizando, quando necessário, a técnica de integração por substituição.

- i. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c_1$. (Observe que essa integral é imediata!)
- ii. $\int \operatorname{sen}(5x) \, dx = -\frac{1}{5} \cos(5x) + c_2$. (Essa integral é facilmente resolvida usando a técnica de substituição – ver exemplo (b)).
- iii. $\int \sec^2(6x) \, dx = \frac{1}{6} \operatorname{tg}(6x) + c_3$. (Essa integral também é facilmente resolvida usando a substituição. Tente fazer!)

Dessa forma, substituindo (i), (ii) e (iii) em (I), temos:

$$\begin{aligned} \int [\cos x + \operatorname{sen}(5x) + \sec^2(6x)] dx \\ \int \cos x \, dx + \int \operatorname{sen}(5x) \, dx + \int \sec^2(6x) \, dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{5} \cos(5x) + \frac{1}{6} \operatorname{tg}(6x) + c. \end{aligned}$$

Observe que $c = c_1 + c_2 + c_3$, uma vez que a soma de constantes também é uma constante.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Resolva as seguintes integrais indefinidas, utilizando a técnica de integração por substituição:

- a) $\int \sin(10x) dx$; b) $\int \cos(2x) dx$; c) $\int (2\sin(2x) - 3\cos(3x)) dx$;
 d) $\int x \sin(x^2 + 1) dx$; e) $\int (2x^2 + 2x - 3)^{10} (2x + 1) dx$; f) $\int \frac{e^x}{3e^x + 2} dx$;
 g) $\int (2x + 1) \sqrt[5]{3x^2 + 3x - 2} dx$; h) $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^{10}}$; i) $\int \frac{dx}{(7x - 1)^{10}}$;
 j) $\int (\cos^2 x \sin x) dx$; k) $\int \frac{dt}{t \ln t}$;

Técnica de integração por partes

Uma vez que o método de integração por substituição não irá resolver todos os nossos problemas, precisamos estudar outros métodos. Nessa seção, vamos estudar outra técnica de integração chamada de integração por partes. Esse método se baseia na derivada do produto, como veremos a seguir.

Sejam f e g funções deriváveis no intervalo I . Fazendo $u=f(x)$ e $v=g(x)$ temos, pela derivada do produto:

$$[f(x)g(x)]' = (uv)' = u'v + u v' \Rightarrow u v' = (uv)' - u' v.$$

Integrando a última igualdade,

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

onde $du = f'(x) dx$ e $dv = g'(x) dx$.

A “grosso modo”, a técnica de integração por partes consiste basicamente em escolher parte do integrando para ser igual a u e a outra parte para ser igual a dv . Uma vez fixados u e dv , resta determinar du e v e, em seguida, aplicar a fórmula. Vejamos alguns exemplos resolvidos para clarear as ideias. Vale salientar que a escolha de u e dv são feitas de forma conveniente.

Observe que a fórmula da integração por partes resulta em outra integral, que na maioria das vezes pode ser resolvida facilmente por integrais imediatas, ou por substituição, ou até mesmo utilizando novamente a integração por partes, como veremos nos exercícios a seguir.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Resolva as seguintes integrais indefinidas utilizando a técnica de integração por partes:

- a) $\int x \cos x dx$.

Solução: Façamos $u=x$ e $dv=\cos x dx$. Com isso temos que $du=dx$ e $v=\sin x$. Com essa escolha, observe que a integral que ainda surgirá após a integração por partes é imediata. Uma vez escolhidos u e dv e identificados du e v , resta aplicar a fórmula $\int u dv = uv - \int v du$, como segue.

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c,$$

Logo,

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

Observação: Note que, nesse caso, a integral resultante da fórmula de integral por partes foi facilmente resolvida por integrais imediatas. Uma escolha equivocada pode dificultar a resolução ou até mesmo não chegar à solução. Faça o teste, nesse exemplo, para ver o que ocorre. Tente resolver essa questão, fazendo a seguinte escolha: $u = \cos x$ e $dv = x dx$.

b) $\int \ln x \, dx$.

Solução: Façamos a seguinte escolha, $u = \ln x$ e $dv = dx$. Com isso, temos que $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = x$.

Desse modo, temos:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c.$$

Logo,

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c.$$

c) $\int x^2 \cos x \, dx$.

Solução: Nesse exemplo, vamos aplicar o método de integração por partes duas vezes. Antes façamos as escolhas,

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx \quad \text{e} \quad dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x.$$

Fazendo a integração por partes, temos:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx. \quad (i)$$

Observe que a integral $\int x \sin x \, dx$ também deve ser resolvida utilizando integração por partes. Desse modo, fazendo:

$$u = x \Rightarrow du = dx \quad \text{e} \quad dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x,$$

Temos que,

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x. \quad (ii)$$

Substituindo (ii) em (i), temos:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + c \Rightarrow$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c \Rightarrow$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + c.$$

d) $\int e^{3x} \cos x \, dx$.

Solução: Nesse exemplo, além de aplicar o método de integração por partes duas vezes vamos utilizar um artifício matemático no cálculo da integral. Façamos,

$$u = e^{3x} \Rightarrow du = 3e^{3x} \, dx \quad \text{e} \quad dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x.$$

Fazendo a integração por partes,

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \sin x - 3 \int e^{3x} \sin x \, dx \quad (i)$$

Para resolver a integral $\int e^{3x} \sin x \, dx$ temos que utilizar integração por partes novamente. Para isso, sejam:

$$u = e^{3x} \Rightarrow du = 3e^{3x} \, dx \quad \text{e} \quad dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x.$$

Com isso,

$$\int e^{3x} \sin x \, dx = -e^{3x} \cos x + 3 \int e^{3x} \cos x \, dx. \quad (ii)$$

Observe que a integral a ser resolvida, nesse exemplo, apareceu novamente em (ii). Vamos substituir (ii) em (i) e prosseguir da seguinte maneira:

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \sin x - 3(-e^{3x} \cos x + 3 \int e^{3x} \cos x \, dx) = e^{3x} \sin x + 3e^{3x} \cos x - 9 \int e^{3x} \cos x \, dx$$

Passando o termo $[-9 \int e^{3x} \cos x \, dx]$ para o primeiro lado da igualdade, temos:

$$10 \int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \sin x + 3 e^{3x} \cos x + c,$$

Finalmente,

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = \frac{e^{3x}}{10} \sin x + \frac{3}{10} e^{3x} \cos x + c.$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Resolva as seguintes integrais indefinidas utilizando integração por partes:

- a) $\int x \sin x \, dx$; b) $\int 3x \cos(2x) \, dx$; c) $\int s \ln s \, ds$; d) $\int x^2 \sin x \, dx$;
 e) $\int \sin^3 x \, dx$; f) $\int x e^{3x} \, dx$; g) $\int 2e^{4x} \sin x \, dx$; h) $\int se^{2s} \, ds$;
 i) $\int \sin^2 x \, dx$; j) $\int \cos^2 x \, dx$.

Frações parciais

Outra técnica bastante utilizada na resolução de integrais é a fração parcial. A grosso modo, essa técnica consiste em “quebrar” uma fração em duas ou mais frações, chamadas de frações parciais. Essa técnica é bastante utilizada na integração de funções racionais.

Caso o denominador pode ser expresso como o produto de dois coeficientes são lineares (grau do denominador estritamente menor do que o grau do numerador)

Em nosso estudo vamos utilizar o seguinte resultado.

Proposição: Sejam a, b, c e d números reais dados, com $c \neq d$. Então existem constantes A e B tais que:

$$\text{i. } \frac{ax+b}{(x-c)(x-d)} = \frac{A}{x-c} + \frac{B}{x-d}.$$

$$\text{ii. } \frac{ax+b}{(x-c)^2} = \frac{A}{x-c} + \frac{B}{(x-c)^2}.$$

Demonstração:

I) Devemos determinar A e B que satisfaçam (i), para isso observe que,

$$\frac{ax+b}{(x-c)(x-d)} = \frac{A}{x-c} + \frac{B}{x-d} = \frac{Ax - Ad + Bx - Bc}{(x-c)(x-d)} = \frac{(A+B)x + (-Ad - Bc)}{(x-c)(x-d)}.$$

Por igualdade de polinômios, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B=a \\ -Ad-Bc=b \end{cases} \quad (1)$$

Vamos resolver o sistema (1) por substituição. Primeiramente, vamos isolar a variável B na primeira equação do sistema e substituí-la na segunda equação do sistema. Com isso temos,

$$B = a - A. \quad (2)$$

Substituindo (2) na segunda equação do sistema, temos:

$$-Ad - (a - A)c = b \Rightarrow -Ad - ac + Ac = b \Rightarrow A(c - d) = b + ac \Rightarrow A = \frac{b + ac}{c - d}. \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), temos:

$$B = a - \frac{b + ac}{c - d} = \frac{ac - ad - b - ac}{c - d} = \frac{-ad - b}{c - d}.$$

Com isso concluímos a demonstração, pois mostramos que existem A e B que satisfazem (i), dados por:

$$A = \frac{b+ac}{c-d} \quad \text{e} \quad B = \frac{-ad-b}{c-d}$$

II) Agora, devemos encontrar A e B que satisfaçam (ii). Observe que,

$$\frac{ax+b}{(x-c)^2} = \frac{A}{x-c} + \frac{B}{(x-c)^2} = \frac{A(x-c)+B}{(x-c)^2} = \frac{Ax-Ac+B}{(x-c)^2}.$$

Por igualdade de polinômios, temos:

$$\begin{cases} A = a \\ -Ac + B = b \Rightarrow B = b + Ac. \end{cases}$$

Numa integral, devemos proceder da seguinte forma:

$$\int \frac{ax+b}{(x-c)(x-d)} dx = \int \left[\frac{A}{(x-c)} + \frac{B}{(x-d)} \right] dx = A \int \frac{dx}{x-c} + B \int \frac{dx}{x-d}.$$

Note que as integrais da última igualdade são facilmente resolvidas por substituição. De fato, na primeira integral, fazendo $u = x-c \Rightarrow du = dx$, temos:

$$\int \frac{dx}{x-c} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + k = \ln|x-c| + k.$$

Procedendo, de forma análoga na segunda integral, chegamos ao seguinte resultado:

$$\int \frac{ax+b}{(x-c)(x-d)} dx = A \ln|x-c| + B \ln|x-d| + k,$$

onde k é a constante de integração.

Agora vamos pôr essa técnica em prática no cálculo de algumas integrais, como segue.

▶ EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule as seguintes integrais indefinidas, utilizando o método de frações parciais estudado:

a) $\int \frac{x-1}{(x+2)(x-3)} dx.$

Solução: Primeiramente, observemos que o grau do numerador é maior do que o grau do denominador. Por frações parciais, temos:

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx+2B}{(x+2)(x-3)} = \frac{(A+B)x+(2B-3A)}{(x+2)(x-3)}.$$

Por igualdade de polinômios, chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A+2B=-1. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $A = \frac{3}{5}$ e $B = \frac{2}{5}$. Desse modo, podemos escrever a função decomposta em frações parciais como segue,

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{\frac{3}{5}}{x+2} + \frac{\frac{2}{5}}{x-3}.$$

Retornando para a integral, temos:

$$\int \frac{x-1}{(x+2)(x-3)} dx = \int \frac{\frac{3}{5}}{x+2} dx + \int \frac{\frac{2}{5}}{x-3} dx = \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x-3} = \frac{3}{5} \ln|x+2| + \frac{2}{5} \ln|x-3| + c.$$

Logo,

$$\int \frac{x-1}{(x+2)(x-3)} dx = \frac{3}{5} \ln|x+2| + \frac{2}{5} \ln|x-3| + c,$$

onde c é a constante de integração.

b) $\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} dx.$

Solução: Primeiramente, observemos que o grau do numerador é menor do que o grau do denominador. Agora, vamos tentar fatorar o polinômio que aparece no denominador que, por sua vez é do segundo grau, então podemos encontrar suas raízes. Para isso,

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = -4 \text{ e } x_2 = 2.$$

Uma vez que $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$, podemos utilizar o método de frações parciais, como segue.

$$\frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{3x-5}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4} = \frac{Ax+4A+Bx-2B}{(x-2)(x+4)} = \frac{(A+B)x+(4A-2B)}{(x-2)(x+4)}.$$

Por igualdade de polinômios, chegamos ao seguinte sistema nas variáveis A e B ,

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 4A-2B=-5 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{6} \text{ e } B = \frac{17}{6}.$$

Assim temos que,

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} dx = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{17}{6} \int \frac{dx}{x+4} = \frac{1}{6} \ln|x-2| + \frac{17}{6} \ln|x+4| + c,$$

onde c é a constante de integração.

c) $\int \frac{x-1}{(3x+1)(x-2)} dx.$

Solução: Usando frações parciais temos:

$$\frac{x-1}{(3x+1)(x-2)} = \frac{A}{3x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+3Bx+B}{(3x+1)(x-2)} = \frac{(A+3B)x+(-2A+B)}{(3x+1)(x-2)}.$$

Por igualdade de polinômios, temos o sistema:

$$\begin{cases} A+3B=1 \\ -2A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{4}{7} \text{ e } B = \frac{1}{7}.$$

Voltando para a integral, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(3x+1)(x-2)} dx &= \frac{4}{7} \int \frac{dx}{3x+1} + \frac{1}{7} \int \frac{dx}{x-2} \\ &= \frac{4}{7} \frac{1}{3} \ln|3x+1| + \frac{1}{7} \ln|x-2| + c \\ &= \frac{4}{21} \ln|3x+1| + \frac{1}{7} \ln|x-2| + c. \end{aligned}$$

Observe que a integral $\int \frac{dx}{3x+1}$ é facilmente resolvida usando o método de substituição, basta fazer $u=3x+1$.

$$d) \int \frac{5x-3}{x^2-2x+1} dx.$$

Solução: Observe que,

$$\frac{5x-3}{x^2-2x+1} = \frac{5x-3}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax+(-A+B)}{(x-1)^2}.$$

Utilizando a igualdade de polinômios, chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \boxed{A=5} \\ -A+B=-3 \Rightarrow \boxed{B=2} \end{cases}$$

Daí temos:

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x+1} dx = 5 \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

As duas integrais do lado direito da última igualdade são resolvidas facilmente utilizando a integração por substituição. Com isso temos,

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x+1} dx = 5 \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} = 5 \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + c,$$

onde c é a constante de integração. Logo,

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x+1} dx = 5 \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + c.$$

$$e) \int \frac{x+1}{(x+2)^2} dx.$$

Solução: Observemos que:

$$\frac{x+1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2}.$$

Por igualdade de polinômios chegamos ao sistema,

$$\begin{cases} \boxed{A=1} \\ 2A+B=1 \Rightarrow \boxed{B=-1} \end{cases}$$

Dessa forma, podemos resolver a integral do seguinte modo,

$$\int \frac{x+1}{(x+2)^2} dx = \int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + c,$$

onde c é a constante de integração. Logo,

$$\int \frac{x+1}{(x+2)^2} dx = \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + c.$$

Observação: Podemos calcular $\int \frac{P(x)}{(x-a)^2} dx$, de uma forma mais fácil utilizando a substituição $u=x-a$, do que utilizar o item (ii) da proposição. Vamos refazer o exemplo anterior utilizando o método de substituição:

Queremos calcular a integral $\int \frac{x+1}{(x+2)^2} dx$ por substituição. Façamos, $u=x+2 \Rightarrow du=dx$ e $x=u-2$. Daí temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x+2)^2} dx &= \int \frac{u-2+1}{u^2} du = \int \frac{u-1}{u^2} du = \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u^2} du \\ &= \int \frac{1}{u} du - \int u^{-2} du = \ln|u| - \frac{u^{-1}}{-1} + c = \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + c.\end{aligned}$$

Note que o resultado foi exatamente igual, como deveria ser, ao resultado obtido por frações parciais.

Caso em que o denominador pode ser expresso como o produto de dois coeficientes é linear (grau do denominador é maior ou igual do que o grau do numerador)

Observemos que, nos exemplos feitos até agora, em cada fração o grau do numerador é estritamente menor do que o grau do denominador. Vamos verificar nos próximos exemplos como devemos proceder quando isso não acontece; isto é, quando o grau do numerador é maior ou igual do que o grau do denominador.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Resolva as seguintes integrais utilizando o método de frações parciais:

a) $\int \frac{x^2+1}{x^2+x-6} dx.$

Solução: Observemos que nesse caso, o grau do numerador é igual ao grau do denominador. Assim, devemos primeiro efetuar a divisão dos polinômios $\frac{x^2+1}{x^2+x-6}$. Com isso temos,

$$x^2+1 = (x^2+x-6) \cdot 1 + (-x+7),$$

Dividindo a última equação por x^2+x-6 , temos:

$$\frac{x^2+1}{x^2+x-6} = 1 + \frac{-x+7}{x^2+x-6}.$$

Desse modo, temos que:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x-6} dx = \int 1 dx + \int \frac{-x+7}{x^2+x-6} dx. \quad (*_1)$$

Com isso, a segunda integral que surge da fração tem o numerador com grau menor do que o grau do denominador. Assim, aplicando o método de frações parciais, temos:

$$\frac{-x+7}{x^2+x-6} = \frac{-x+7}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A-2B)}{(x-2)(x+3)},$$

Por igualdade de polinômios, chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ 3A-2B=7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=1} \text{ e } \boxed{B=-2}$$

Voltando para a integral, temos que:

$$\int \frac{-x+7}{x^2+x-6} dx = \int \frac{dx}{x-2} - 2 \int \frac{dx}{x+3} = \ln|x-2| - 2\ln|x+3| + c. \quad (*_2)$$

Substituindo $(*_2)$ em $(*_1)$, temos:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x-6} dx = \int 1 dx + \int \frac{-x+7}{x^2+x-6} dx = x + \ln|x-2| - 2\ln|x+3| + c,$$

onde c é a constante de integração. Logo,

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x-6} dx = x + \ln|x-2| - 2\ln|x+3| + c.$$

Observação: Devemos proceder de forma semelhante a esse exemplo toda vez que o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador.

$$b) \int \frac{x^3 + 2}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

Solução: Observemos que, o grau do numerador é maior do que o grau do denominador. Assim como no exemplo anterior, devemos primeiramente efetuar a divisão $\frac{x^3 + 2}{x^2 + 3x + 2}$. Com isso temos,

$$x^3 + 2 = (x^2 + 3x + 2)(x - 3) + 7x + 8.$$

Dividindo a última igualdade por $(x^2 + 3x + 2)$, temos:

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 + 3x + 2} = x - 3 + \frac{7x + 8}{x^2 + 3x + 2}.$$

Logo,

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 + 3x + 2} dx = \int (x - 3) dx + \int \frac{7x + 8}{x^2 + 3x + 2} dx, \quad (*_3)$$

A primeira integral do lado direito da última igualdade é facilmente resolvida, porém na segunda integral precisamos aplicar o método de frações parciais. Vamos resolver a segunda integral dessa última igualdade e depois voltaremos ao resultado final. Desse modo, utilizando frações parciais, temos que:

$$\frac{7x + 8}{x^2 + 3x + 2} = \frac{7x + 8}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} = \frac{Ax + 2A + Bx + B}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{(A + B)x + (2A + B)}{(x + 1)(x + 2)}.$$

Por igualdade de polinômios, chegamos ao seguinte sistema,

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ 2A + B = 8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = 1} \text{ e } \boxed{B = 6}.$$

Daí,

$$\int \frac{7x + 8}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \frac{dx}{x + 1} + 6 \int \frac{dx}{x + 2} = \ln|x + 1| + 6 \ln|x + 2| + c. \quad (*_4)$$

Substituindo $(*_4)$ em $(*_3)$, chegamos ao resultado final como segue:

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 + 3x + 2} dx = \int (x - 3) dx + \int \frac{7x + 8}{x^2 + 3x + 2} dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x + 1| + 6 \ln|x + 2| + c,$$

onde c é a constante de integração. Logo,

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 + 3x + 2} dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x + 1| + 6 \ln|x + 2| + c.$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule as seguintes integrais, utilizando o método de frações parciais:

$$a) \int \frac{5x + 4}{(x - 3)(x - 7)} dx;$$

$$b) \int \frac{x + 2}{x^2 + 3x - 4} dx;$$

$$c) \int \frac{2x - 1}{(5x + 2)(x - 1)} dx;$$

$$d) \int \frac{x}{x^2 + 5x + 6} dx;$$

$$e) \int \frac{2}{x^2 - 1} dx;$$

$$f) \int \frac{x + 1}{x^2 - 2} dx;$$

$$g) \int \frac{x - 5}{(x + 2)^2} dx;$$

$$h) \int \frac{x + 7}{(x - 4)^2} dx;$$

Caso geral em que os coeficientes são lineares e distintos

Agora, vamos trabalhar com o caso mais geral. Vamos considerar a decomposição racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples, dada por:

$$f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n},$$

onde $A_1, A_2, \dots, A_n$ são constantes que devem ser determinadas da mesma forma que fizemos nos exemplos anteriores.

A diferença entre o caso geral e os casos mais simples, é com relação ao número de variáveis que surge na hora de resolver o sistema linear.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule a seguinte integral utilizando frações parciais:

a) $\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} dx.$

Solução: Usando frações parciais, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} \quad (*_5) \\ &= \frac{A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{A(x^2-4) + B(x^2-3x+2) + C(x^2+x-2)}{(x-1)(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (-3B+C)x + (-4A+2B-2C)}{(x-1)(x+2)(x-2)}. \end{aligned}$$

Por igualdade de polinômios, chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -3B+C=1 \\ -4A+2B-2C=1. \end{cases} \quad (*_6)$$

Resolvendo o sistema anterior, concluímos que:

$$A = \frac{-2}{3}, B = \frac{-1}{12}, C = \frac{3}{4}.$$

Dessa forma,

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} dx = \frac{-2}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{12} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-2} = \frac{-2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{12} \ln|x+2| + \frac{3}{4} \ln|x-2| + c,$$

onde c é a constante de integração. Portanto,

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)(x-2)} dx = \frac{-2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{12} \ln|x+2| + \frac{3}{4} \ln|x-2| + c$$

Observações:

- Note que a forma de resolver é semelhante aos exemplos anteriores, a diferença nesse caso é que o sistema a ser resolvido é 3×3 , nas variáveis A, B e C.
- Além disso, existe outra maneira de encontrar os valores A, B e C. Ao eliminar os denominadores na igualdade $(*_5)$, temos:

$$x+1 = A(x+2)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+2). \quad (*_7)$$

Podemos determinar os valores de A, B e C, atribuindo valores para x que anulem os fatores de $(*_7)$, como segue:

$$x = 1 \Rightarrow 1 + 1 = A(1+2)(1-2) + B(1-1)(1-2) + C(1-1)(1+2)$$

$$2 = -3A \Rightarrow A = \frac{-2}{3}.$$

$$x = -2 \Rightarrow -2 + 1 = A(-2+2)(-2-2) + B(-2-1)(-2-2) + C(-2-1)(-2+2)$$

$$-1 = 12B \Rightarrow B = \frac{-1}{12}.$$

$$x = 2 \Rightarrow 2 + 1 = A(2+2)(2-2) + B(2-1)(2-2) + C(2-1)(2+2)$$

$$3 = 4C \Rightarrow C = \frac{3}{4}.$$

Essa maneira pode ser mais rápida do que resolver o sistema 3×3 .

iii. Caso o grau do numerador seja maior ou igual ao grau do denominador, deve-se proceder como vimos anteriormente, efetuando a divisão dos polinômios e depois utilizando as frações parciais.

Caso geral em que os coeficientes são lineares e se repetem

Vamos considerar, agora, a decomposição racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em frações onde um fator linear $(x-a_i)$ de $q(x)$ pode ter multiplicidade r . Então, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais do tipo,

$$\frac{B_1}{(x-a_i)^r} + \frac{B_2}{(x-a_i)^{r-1}} + \cdots + \frac{B_r}{(x-a_i)},$$

onde $B_1, B_2, \dots, B_r$ são constantes a serem determinadas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule a seguinte integral utilizando frações parciais:

a) $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^4 - x^2} dx.$

Solução: Observe que podemos escrever a função a ser integrada da seguinte forma,

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^4 - x^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2(x^2 - 1)} = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2(x-1)(x+1)}.$$

Dessa forma, temos um termo no denominador do lado direito da última igualdade com multiplicidade

2. Vamos então escrever essa fração em frações parciais, como segue:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x-1)(x+1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(B+C+D)x^3 + (A+C-D)x^2 - Bx - A}{x^2(x-1)(x+1)}. \end{aligned}$$

Por igualdade de polinômios chegamos ao seguinte sistema,

$$\begin{cases} B + C + D = 0 \\ A + C - D = 1 \\ -B = 2 \Rightarrow \boxed{B = -2} \\ -A = 3 \Rightarrow \boxed{A = -3} \end{cases}$$

Substituindo os valores de A e B nas outras duas equações do sistema anterior, e resolvendo o sistema 2×2 nas variáveis C e D, temos que:

$$C = 3 \text{ e } D = -1$$

Voltando para a integral,

$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^4 - x^2} dx = -3 \int \frac{dx}{x^2} - 2 \int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} = -3 \frac{x^{-1}}{-1} - 2 \ln|x| + 3 \ln|x-1| - \ln|x+1| + c,$$

onde c é a constante de integração. Logo,

$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^4 - x^2} dx = \frac{3}{x} - 2 \ln|x| + 3 \ln|x-1| - \ln|x+1| + c.$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule as seguintes integrais utilizando frações parciais:

a) $\int \frac{x+6}{(x+1)(x+3)(x-4)} dx;$

b) $\int \frac{x-2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx;$

c) $\int \frac{x+1}{x^2(x+2)(x-2)} dx;$

d) $\int \frac{x+7}{(x+2)^2(x+1)(x-1)} dx;$

e) $\int \frac{x-1}{x^4 - 4x^2} dx.$

Caso em que os coeficientes são lineares e quadráticos irredutíveis, os fatores quadráticos não se repetem

Outro caso importante de ser tratado é quando os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis. Nesse caso, cada fator quadrático corresponderá uma fração parcial da forma:

$$\frac{Cx + D}{x^2 + bx + c}.$$

O importante é que, na fração parcial, o grau do numerador seja uma unidade menor do que o grau do denominador (**observe isso nos exemplos anteriores!**).

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule a integral $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - 2} dx$, utilizando a técnica de frações parciais.

Solução: O denominador da função a ser integrada é um polinômio de grau 3, nesse caso temos que encontrar uma raiz para esse polinômio e depois fatorar. Note que 1 é raiz de $x^3 + x^2 - 2$. Logo podemos dividir esse polinômio por $(x-1)$. Com isso, temos que:

$$x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$$

Além disso, o termo $(x^2 + 2x + 2)$ é irredutível, pois não admite raízes reais. (**Verifique!**)

Desse modo, por frações parciais temos que,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - 2} &= \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2} \\ &= \frac{A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x-1)}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (2A-C)}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}. \end{aligned}$$

Por igualdade de polinômios chegamos ao seguinte sistema nas variáveis A, B e C,

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - B + C = -1. \\ 2A - C = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, temos:

$$A = \frac{1}{5}, B = \frac{4}{5} \text{ e } C = \frac{-3}{5}.$$

Voltando para a integral, temos:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - 2} dx = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}}{x^2 + 2x + 2} dx \quad (*_8)$$

Como o denominador na segunda integral em $(*_8)$ é um polinômio irredutível, devemos completar o quadrado e depois fazer uma substituição conveniente, como segue. Note que o termo $x^2 + 2x + 2$ é parecido com o termo $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Desse modo vamos completar o quadrado da seguinte forma,

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 2 - 1 + 1 = (x^2 + 2x + 2 - 1) + 1 = (x^2 + 2x + 1) + 1 = (x+1)^2 + 1.$$

Observe que o artifício usado para completar o quadrado não alterou o termo, uma vez que somamos e subtraímos o termo 1. Porém, após utilizado esse artifício o termo original pode ser escrito como um quadrado perfeito, o que facilitará a nossa vida na hora de integrar.

Logo, a segunda integral do lado direito da igualdade em $(*_8)$ pode agora ser resolvida por substituição, como segue:

$$\int \frac{\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}}{(x+1)^2 + 1} dx \quad (*_9)$$

Para resolvermos a integral em $(*_9)$ precisamos recorrer ao método de substituição, mas também pode ser feito por frações parciais. Desse modo, fazendo a substituição $u = x+1 \Rightarrow du = dx$ e $x = u-1$ em $(*_9)$, temos:

$$\int \frac{\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}}{(x+1)^2 + 1} dx = \int \frac{\frac{4}{5}(u-1) - \frac{3}{5}}{u^2 + 1} du = \int \frac{\frac{4}{5}u - \frac{7}{5}}{u^2 + 1} du = \frac{4}{5} \int \frac{udu}{u^2 + 1} - \frac{7}{5} \int \frac{du}{u^2 + 1} \quad (*_{10})$$

No lado direito da última igualdade em $(*_{10})$ ainda temos duas integrais. A primeira pode ser resolvida facilmente (novamente!) por substituição (**Verifique!**), já a segunda é obtida diretamente da tabela de integrais imediatas. Com isso, temos:

$$\int \frac{\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}}{(x+1)^2 + 1} dx = \frac{4}{5} \int \frac{udu}{u^2 + 1} - \frac{7}{5} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{4}{5} \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) - \frac{7}{5} \arctg u + c,$$

onde c é a constante de integração. Desfazendo a substituição ($u = x+1$), temos:

$$\int \frac{\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}}{(x+1)^2 + 1} dx = \frac{2}{5} \ln[(x+1)^2 + 1] - \frac{7}{5} \arctg(x+1) + c \quad (*_{11})$$

Finalmente substituindo $(*_{11})$ em $(*_8)$, temos:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - 2} dx = \frac{1}{5} \ln|x-1| + \frac{2}{5} \ln[(x+1)^2 + 1] - \frac{7}{5} \arctg(x+1) + c.$$

DICA

Observe o quanto esse exemplo é longo, atenção na hora de estudá-lo. Refaça-o várias vezes e com bastante atenção!

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule as seguintes integrais utilizando frações parciais:

a) $\int \frac{x^2 + 3x + 7}{x^3 + x^2 - 2} dx;$

b) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2 + 6x + 4} dx.$

Integrais de funções trigonométricas

Mesmo já tendo resolvido algumas integrais envolvendo funções trigonométricas, faz-se necessário deixar uma seção dedicada à integral de tais funções, pois em muitos casos, no cálculo de integral de funções trigonométricas, fazemos uso de algumas identidades trigonométricas, ou até mesmo algumas técnicas especiais.

Dentre as identidades trigonométricas mais utilizadas, temos:

i. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$

ii. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$

iii. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$

iv. $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x;$

v. $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)];$

vi. $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)];$

vii. $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)];$

Vamos tratar alguns casos separadamente, para o melhor entendimento, como segue.

I. Quando o integrando é um produto de potências de senos e cossenos do tipo $\int \sin^m x \cos^n x dx$, temos três casos:

Caso 1: Quando m é ímpar, isto é $m=2k+1$, usamos a identidade (i) da seguinte maneira,

$$\sin^m x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1 - \cos^2 x)^k \sin x.$$

Em seguida, fazemos a substituição $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$.

Caso 2: Quando m é par e n é ímpar, isto é $n=2k+1$, usamos a identidade (i) da seguinte maneira,

$$\cos^n x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1 - \sin^2 x)^k \cos x.$$

O próximo passo é fazer a substituição $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$.

Caso 3: Caso m e n sejam pares, usamos uma das identidades (ii) ou (iii).

II. Quando o integrando é apenas um produto de senos e cossenos, com argumentos diferentes, então podemos resolver a integral utilizando umas das identidades (v)-(vii).

III. Quando o integrando apresenta potências de tangente e secante, utilizamos a identidade (iv).

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$;

Solução: Estamos no caso 3 quando m e n são pares. Primeiramente, vamos utilizar as identidades trigonométricas (ii) e (iii), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sin^2 x \cos^4 x &= \sin^2 x (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \frac{1}{4} (1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) \\ &= \frac{1}{8} (1 + \cos(2x) - \cos^2(2x) - \cos^3(2x)). \quad (*_1)\end{aligned}$$

Note que, na última expressão, ainda aparecem os termos $\cos^2(2x)$ e $\cos^3(2x)$, para o primeiro termo vamos utilizar a identidade (iii), isto é,

$$\cos^2(2x) = \frac{1 + \cos 4x}{2}, \quad (*_2)$$

e o termo $\cos^3(2x)$ podemos utilizar a identidade trigonométrica (i) da seguinte forma,

$$\cos^3(2x) = \cos^2(2x) \cos(2x) = (1 - \sin^2(2x)) \cos(2x). \quad (*_3)$$

Agora, substituindo $(*_2)$ e $(*_3)$ em $(*_1)$, segue:

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8} \left(1 + \cos(2x) - \frac{1 + \cos 4x}{2} - (1 - \sin^2(2x)) \cos(2x) \right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos(4x) + \frac{1}{8} \sin^2(2x) \cos(2x).$$

Desse modo, estamos com uma expressão mais adequada para integrarmos utilizando as técnicas já estudadas, isto é,

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos(4x) + \frac{1}{8} \sin^2(2x) \cos(2x) \right] dx = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \cos(4x) + \frac{1}{48} \sin^3(2x) + c.$$

Observe que para chegarmos ao resultado, utilizamos a técnica de integração por substituição.

b) $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$;

Solução: Nesse caso, basta utilizarmos a identidade trigonométrica (iv) da seguinte forma:

$$\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} x = (\sec^2 x - 1) \operatorname{tg} x.$$

Logo,

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \operatorname{tg} x \, dx = \int [\sec^2 x \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x] \, dx = \int \sec^2 x \operatorname{tg} x \, dx - \int \operatorname{tg} x \, dx.$$

As duas integrais no lado direito da última igualdade são resolvidas utilizando o método de substituição. Na primeira, basta fazer $u = \operatorname{tg} x \Rightarrow du = \sec^2 x \, dx$ que o resultado segue. A segunda integral já foi resolvida na seção sobre técnica de integração por substituição. Desse modo, temos que:

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + c.$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

- a) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$; b) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$; c) $\int \sec^3 x \, dx$;
 d) $\int \tan^2 x \sec^3 x \, dx$; e) $\int \sin(2x) \cos(3x) \, dx$; f) $\int \cos(x) \cos(3x) \, dx$;
 g) $\int \sin(2x) \sin(3x) \, dx$.

Substituição trigonométrica

Quando o integrando envolve uma das expressões,

$$(i) \sqrt{a^2 - u^2} \quad (ii) \sqrt{u^2 - a^2} \quad (iii) \sqrt{a^2 + u^2},$$

sendo a constante $a > 0$ e $u = u(x)$ uma função na variável x , utilizamos o método chamado de substituição trigonométrica. Vamos estudar como proceder em cada caso.

Caso 1: Quando o integrando envolve o termo $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Nesse caso, devemos fazer a substituição $u = a \sin \theta$, consequentemente, teremos $du = a \cos \theta \, d\theta$. Donde segue que,

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta.$$

Observe que com essa substituição, conseguimos eliminar a raiz quadrada e, consequentemente, a integração fluirá. Além disso, note que estamos considerando os valores de θ para os quais $\cos \theta$ seja positivo; para isso, devemos ter $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Uma vez feita a substituição trigonométrica, resolve-se a integral na variável θ , em seguida retorna para a variável inicial.

Caso 2: Quando o integrando envolve o termo $\sqrt{u^2 - a^2}$.

Neste caso, faremos a substituição $u = a \sec \theta \Rightarrow du = a \sec \theta \tan \theta \, d\theta$. Logo,

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a \tan \theta.$$

De modo que, assim como no caso anterior, a raiz quadrada também foi eliminada e estamos considerando $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

Caso 3: Quando o integrando envolve o termo $\sqrt{a^2 + u^2}$. Neste caso, $u = a \tan \theta \Rightarrow du = a \sec^2 \theta \, d\theta$. Daí,

$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2 (1 + \tan^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta, \text{ onde } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} \, dx$.

Solução: Note que esse exercício está relacionado ao caso 1, onde $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ e $u = x$. Desse modo, devemos fazer a seguinte substituição:

$$x = 2 \sin \theta \Rightarrow dx = 2 \cos \theta \, d\theta.$$

Observe, também, que não há como resolver essa integral utilizando os métodos de integração estudados anteriormente.

Vamos, primeiramente, trabalhar o integrando e depois que ele estiver numa forma conveniente, calculamos a integral. Assim,

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta} = \sqrt{4(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{4\cos^2\theta} = 2\cos\theta.$$

Daí,

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta} 2\cos\theta d\theta = \int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} d\theta = \int \cot^2\theta d\theta = \int (\operatorname{cosec}^2\theta - 1) d\theta = -\cot\theta - \theta + c. \quad (*_1)$$

Observe que depois de feita a substituição trigonométrica, a integral foi facilmente resolvida. Porém, o seu resultado está na variável θ e a função a qual integramos está na variável x ; isto significa que devemos dar a solução de tal integral, também, na variável x . Como $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2},$$

e

$$x = 2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{2}.$$

Daí,

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}. \quad (*_2)$$

Além disso,

$$x = 2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right). \quad (*_3)$$

Portanto, substituindo $(*_2)$ e $(*_3)$ em $(*_1)$, temos:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c.$$

Observação: Nesse exercício a função u coincide com a variável x . Cuidado, nem sempre isso ocorre. Observe que se tivéssemos a expressão $\sqrt{4-(x+1)^2}$, teríamos $u=x+1$ e, dessa forma, a substituição seria $x+1=2\sin\theta$.

▶ EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{3x^2} dx;$

b) $\int \frac{\sqrt{9-(x+1)^2}}{3x^2} dx;$

c) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} dx;$

d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x+2)^2-4}} dx;$

e) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx.$

A integral definida

UN 01

Agora que já sabemos algumas técnicas de integração e que o processo de integração é inverso ao de derivação, vamos estudar a definição de integral definida. Antes, porém, vejamos alguns conceitos necessários.

Definição (Partição de um intervalo): Considere um intervalo qualquer $[a,b]$. Uma partição P de $[a,b]$ é um subconjunto finito de pontos:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset [a,b] \text{ tal que } a \in P \text{ e } b \in P,$$

que divide $[a,b]$ em n intervalos, de modo que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Note que podemos obter uma partição de qualquer intervalo $[a,b]$. Além disso, o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é chamado de i -ésimo intervalo da partição P , cujo comprimento é $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ e

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = b - a. \text{ (Verifique!)}$$

Exemplos: Considere o intervalo $[1,2]$.

- Note que, o conjunto $\{1, 1.25, 1.5, 1.75, 2\}$ é uma partição de $[1,2]$. O comprimento de cada intervalo dessa partição é 0.25;
- O conjunto $\{1, 1.1, 1.2, 1.3, \dots, 1.9, 2\}$ também é uma partição do intervalo $[1,2]$. Nesse caso, o comprimento de cada intervalo dessa partição é 0.1.

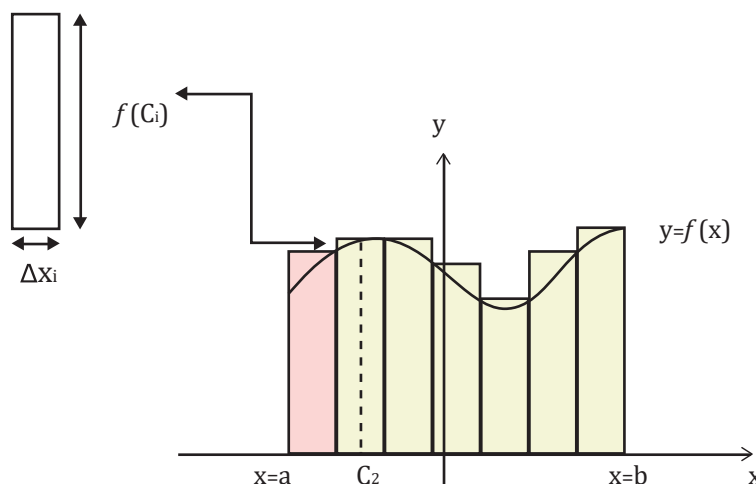
Para entendermos o conceito de integral definida, vamos estudar o significado geométrico da integral, que é a área. Para isso, considere uma partição P do intervalo $[a,b]$ como dada na definição e seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do i -ésimo intervalo de P . Em cada um desses intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ escolha um ponto qualquer c_i . E para cada i , $i=1, 2, \dots, n$, vamos construir um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$, de modo que cada retângulo formado pelos i -ésimos intervalos tem área $f(c_i)\Delta x_i$. (Ver Figura 1)

Definição (Soma de Riemann): A soma das áreas dos n retângulos da Figura (1) dada por,

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n,$$

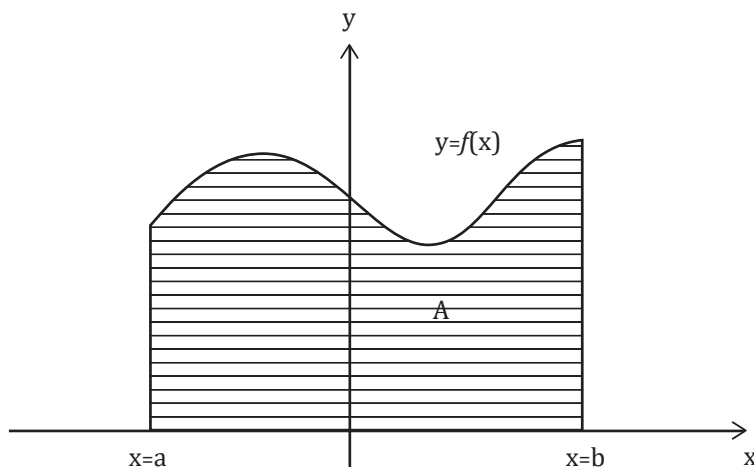
é chamada de soma de Riemann da função f .

Figura 1 – Interpretação geométrica da integral



Observação: Note que se fizermos n crescer (onde n representa o número de retângulo), o que significa que o intervalo Δx_i será o menor possível, então a soma das áreas dos n retângulos irá se aproximar da área A da região delimitada pela curva $y=f(x)$, pelo eixo dos x e pelas retas $x=a$ e $x=b$, dada na Figura 2.

Figura 2 – Área da região A



Com base no que foi estudado até agora, podemos definir a integral definida da seguinte maneira:

Definição (Integral Definida): Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e P uma partição qualquer desse intervalo. Então, a integral definida de f de a até b é dada por,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

desde que o limite exista e, nesse caso, dizemos que f é integrável.

Observações:

- Os símbolos a e b denotam os limites de integração, (no caso a é o limite inferior e b é o limite superior);
- Podemos usar qualquer símbolo para representar a variável independente, ou seja, x é uma “variável muda”. Isto significa que, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt$;
- Quando a função f é contínua e não negativa em $[a, b]$, como na Figura 1, então a definição de integral definida coincide com a definição de área.
- Vamos considerar que as nossas funções são sempre integráveis, uma vez que nem toda função é integrável. Todavia, um estudo mais detalhado a esse respeito pode ser visto num curso de Análise Real. A princípio, vamos considerar sem demonstrar que toda função contínua em $[a, b]$ é integrável em $[a, b]$.
- É claro que não vamos utilizar o limite da definição no cálculo de uma integral definida. As técnicas de integração estudadas nas integrais indefinidas são válidas para o caso de integrais definidas, então faremos uso delas nos cálculos. Isso graças ao Teorema Fundamental do Cálculo que veremos mais a diante.

Propriedades da integral definida

As integrais definidas obedecem às seguintes propriedades, algumas já conhecidas das integrais indefinidas.

I. Sejam f uma função integrável em $[a, b]$ e k uma constante, então a função kf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Demonstração: Por f ser integrável em $[a, b]$, então o limite $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ existe e, nesse caso, temos que,

$$\int_a^b k f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(c_i) \Delta x_i = k \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = k \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Observe que essa propriedade também é válida no caso das integrais indefinidas.

II. Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$, então a função $f + g$ também é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

Demonstração: Por f e g serem funções integráveis em $[a, b]$ então os limites $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ e $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \Delta x_i = \int_a^b g(x) dx$ existem. Logo,

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \int_a^b (f + g)(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f + g)(c_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(c_i) + g(c_i)] \Delta x_i \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(c_i) \Delta x_i + g(c_i) \Delta x_i] \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O caso da diferença é análogo, uma vez que podemos ver a diferença como uma soma.

Observação: Note que a propriedade II pode ser generalizada para uma soma finita de funções, isto é,

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx.$$

III. Sejam $c \in (a, b)$ e f uma função integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Demonstração: Para toda partição P de $[a, b]$ com $c \in P$, podemos considerar o intervalo $[a, c]$ dividido em m subintervalos e o intervalo $[c, b]$ dividido em $n-m$ subintervalos. E uma vez que f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, temos que os limites existem. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(c_i) \Delta x_i &= \int_a^c f(x) dx \quad \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_c^b f(x) dx, \\ \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^m f(c_i) \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(c_i) \Delta x_i \right) \\ &= \left(\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(c_i) \Delta x_i \right) + \left(\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(c_i) \Delta x_i \right) \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observação: Nessas condições, essa propriedade pode ser generalizada para um número de pontos finitos dentro do intervalo (a,b) .

IV. Seja f uma função integrável e tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Demonstração: Como $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, segue que

$$f(c_i) \geq 0, \forall c_i \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \geq 0 \Rightarrow \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \geq 0.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \geq 0. \quad \blacksquare$$

V. Sejam f e g integráveis em $[a,b]$ tais que $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Demonstração: Por hipótese,

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow (f-g)(x) \geq 0, \forall x \in [a,b].$$

Logo, das proposições (IV) e (II) temos,

$$\int_a^b (f-g)(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx. \quad \blacksquare$$

VI. Seja f uma função contínua em $[a,b]$ então, $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Demonstração: Por f ser contínua em $[a,b]$ segue que f é integrável em $[a,b]$ (Vamos omitir essa demonstração pois foge do nosso objetivo). Por outro lado, segue que $|f|$ também é contínua e, conseqüentemente, $|f|$ é integrável.

Além disso, das propriedades de módulo temos:

$$f(x) \leq |f(x)| \quad \text{e} \quad -|f(x)| \leq f(x) \Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Pela propriedade (V), temos

$$\int_a^b -|f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

e portanto,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad \blacksquare$$

O teorema fundamental do cálculo

UN 01

O Teorema Fundamental do Cálculo faz a ligação entre a integração e derivação. Ele nos dá uma maneira bem mais prática de se resolver uma integral definida de uma função, desde que se conheça a sua primitiva. E com isso, nos livramos de trabalhar com o limite visto na definição de integral definida.

1º Teorema Fundamental do Cálculo: Sejam f uma função integrável em $[a,b]$ e F uma primitiva de f em $[a,b]$. Então,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Por f ser integrável em $[a,b]$ temos que o limite:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx,$$

Existe independente da escolha dos c_i .

Por outro lado, f admite uma primitiva F em $[a,b]$, logo:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b].$$

Seja $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição qualquer de $[a,b]$, então podemos escrever:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \quad (*) \quad (\text{Verifique!})$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio temos que existe $\bar{c}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\bar{c}_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (**)$$

Substituindo $(**)$ em $(*)$, temos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(\bar{c}_i)(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i.$$

Devido à partição P ser arbitrária, então passando ao limite:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i = F(b) - F(a).$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \blacksquare$$

Observação: Podemos denotar a diferença $F(b) - F(a)$ por $F(x) \Big|_a^b$.

Com o Teorema Fundamental do Cálculo podemos demonstrar facilmente a seguinte proposição.

Proposição: Seja f uma função integrável em $[a,b]$.

i. Se $a < b$, então $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

ii. Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então $\int_a^a f(x) dx = 0$

Demonstração:

i. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x) dx. \quad \blacksquare$$

ii. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0. \quad \blacksquare$$

Observação: Apesar desse tópico ser bem teórico, vamos nos deter a resolver as integrais definidas utilizando as técnicas de integração já estudadas para integrais indefinidas. Porém, é importante que vocês saibam demonstrar as propriedades das integrais definidas e saber aplicar bem o Teorema Fundamental do Cálculo devido a sua importância no nosso estudo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcular as seguintes integrais definidas:

a) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx.$

Solução: A maneira de resolver é semelhante ao caso das integrais indefinidas, a única diferença é que a constante de integração não irá aparecer uma vez que temos os limites de integração, os quais serão substituídos no final do processo, via Teorema Fundamental do Cálculo. Vejamos como proceder.

Sabemos que a integral indefinida é dada por,

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c.$$

Agora, vamos aplicar a primitiva da função $\sin x$, nos limites de integração conforme o Teorema Fundamental do Cálculo, como segue.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2.$$

Assim, temos que:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2.$$

Note que primeiro calculamos a integral e depois aplicamos os limites de integração.

b) $\int_0^1 (2x^3 + 3x^2 - 1) dx.$

Solução: Primeiro calculemos a integral indefinida e, em seguida, vamos aplicar os limites de integração, como segue.

$$\int_0^1 (2x^3 + 3x^2 - 1) dx = \left(2 \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{x^4}{2} + x^3 - x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 - 1 - \left(\frac{0}{2} + 0 - 0 \right) = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\int_0^1 (2x^3 + 3x^2 - 1) dx = \frac{1}{2}.$$

c) $\int_1^2 \frac{x^7}{2+x^8} dx.$

Solução: Note que para resolver essa integral precisamos recorrer à técnica de substituição, inclusive esse exercício já foi resolvido na forma de integral indefinida (ver seção sobre integração por substituição).

Primeiro vamos fazer a substituição $u = 2 + x^8 \Rightarrow du = 8x^7 dx$. Então, resolvendo a integral na forma indefinida temos,

$$\int \frac{x^7}{2+x^8} dx = \frac{1}{8} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{8} \ln|u| + c = \frac{1}{8} \ln|2+x^8| + c.$$

Daí, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_1^2 \frac{x^7}{2+x^8} dx = \frac{1}{8} \ln(2+x^8) \Big|_1^2 = \frac{1}{8} \ln(2+2^8) - \frac{1}{8} \ln(2+1^8) = \frac{1}{8} [\ln(258) - \ln(3)] = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{258}{3}\right) = \frac{1}{8} \ln 86.$$

Logo,

$$\int_1^2 \frac{x^7}{2+x^8} dx = \frac{1}{8} \ln 86.$$

Observação: Outra maneira de resolver essa questão é fazendo a mudança de variável também nos limites de integração, vejamos.

Fazendo a substituição $u=2+x^8 \Rightarrow du=8x^7 dx$, temos que os limites de integração passam a ser,

$$x=1 \Rightarrow u=3 \quad \text{e} \quad x=2 \Rightarrow u=258.$$

Desse modo,

$$\int_{x=1}^{x=2} \frac{x^7}{2+x^8} dx = \frac{1}{8} \int_{u=3}^{u=258} \frac{du}{u} = \frac{1}{8} \ln(u) \Big|_{u=3}^{u=258} = \frac{1}{8} [\ln(258) - \ln(3)] = \frac{1}{8} \ln 86.$$

Note que as duas formas de resolver a integral levam ao mesmo resultado, de modo que a escolha do procedimento fica ao seu critério.

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

Solução: Já resolvemos a integral indefinida $\int x \cos x dx$ utilizando a técnica de integração por partes (ver página 21). Logo,

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = (x \sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - [0 \sin 0 + \cos 0] = \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Logo,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Resolva as seguintes integrais definidas:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int_0^1 (x+1) dx; & \text{b) } \int_{-1}^2 \left(3x^5 + 2x^2 - \frac{1}{x} \right) dx; & \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx; & \text{d) } \int_0^1 x \sin(x^2+1) dx \\ \text{e) } \int_{-1}^1 x e^{3x} dx; & \text{f) } \int_0^{\pi} 2e^{4x} \sin x dx; & \text{g) } \int_{-1}^2 \frac{5x-3}{x^2-2x+1} dx; & \text{h) } \int_{-1}^1 \frac{x+1}{(x+2)^2} dx; \\ & & & \text{i) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{array}$$

II

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

Nesta unidade estudaremos algumas das aplicações das integrais de modo a dar sentido ao estudo feito na Unidade I. Na Unidade I, aprendemos a trabalhar com a “ferramenta” integral. Agora, vamos estudar como aplicar essa ferramenta importantíssima que é a integral definida. Entre as aplicações, estudaremos o cálculo de comprimento de curvas, o cálculo de área de regiões no plano e de volume de sólidos de revolução. É claro que existem muitas outras aplicações das integrais nas mais diversas áreas como a Física, Química, entre outras. Algumas aplicações na Física, por exemplo, podem ser encontradas nos livros básicos de Cálculo.

Ao final dessa Unidade o aluno deverá saber:

- Aplicar os conhecimentos adquiridos sobre a integral definida no cálculo de áreas de regiões planas e volumes de sólidos de revolução;
- Calcular o comprimento de uma curva utilizando a integral definida.

Aplicações das integrais no cálculo de áreas

UN 02

O cálculo de área

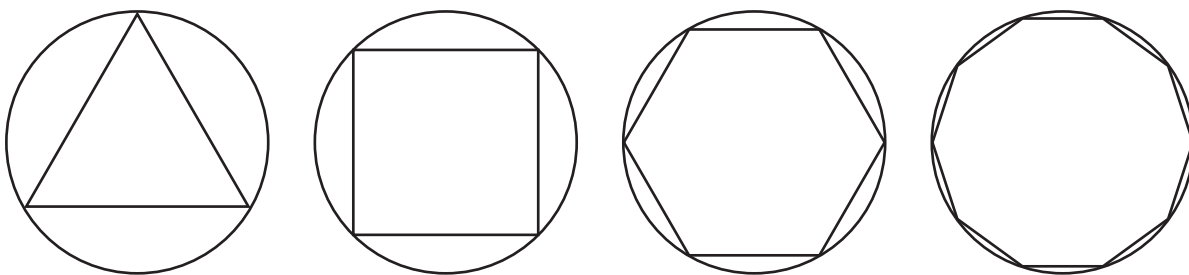
Uma das aplicações mais simples da integral definida é o cálculo de área em superfícies planas delimitadas por curvas. Vamos entender como se calculam essas áreas utilizando a ferramenta integral.

Antigamente, pelo menos 2500 anos atrás, um dos métodos mais utilizados no cálculo de áreas, de uma figura plana, foi o “método da exaustão”, onde os gregos encontravam a área de qualquer polígono dividindo-o em n triângulos e somando-se as áreas de tais triângulos. Para calcular a área de uma região plana qualquer era feito uma circunscrição na figura com polígonos, de modo que o aumento dos lados desses polígonos implica numa aproximação mais fiel da área da figura, como segue.

Desse modo, seja A_n a área do polígono inscrito com n lados, fazendo $n \rightarrow \infty$ então a área A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo A . Logo,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Figura 3 – Método de exaustão para o cálculo da área de um círculo

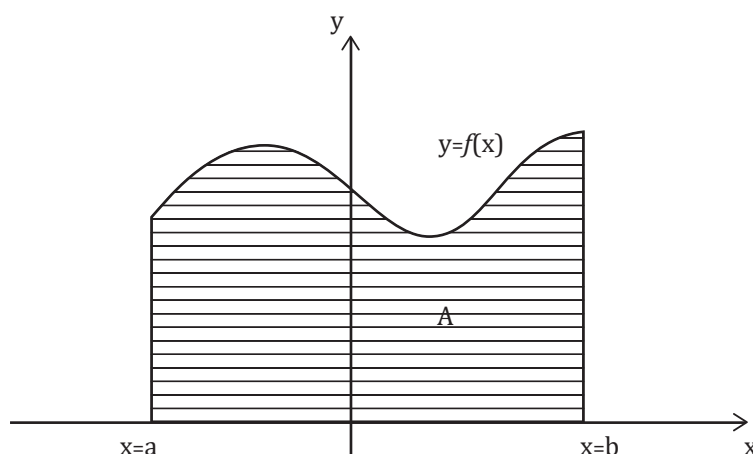


O objetivo dessa seção é aprender a calcular a área de uma região no plano fazendo uso da integral definida. Para facilitar o entendimento do assunto, vamos dividir o nosso estudo sobre o cálculo de áreas através da integral definida em três casos:

Caso 1 (Área sob curvas) – Conjunto delimitado por duas retas verticais, o eixo x e uma função contínua não negativa f

Consideremos a área A delimitada no plano pela função f , contínua no intervalo $[a, b]$, em $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, pelas retas verticais $x=a$, $x=b$ e o eixo x ($y=0$), como na Figura (4).

Figura 4 – Área da região A delimitada por uma função não negativa

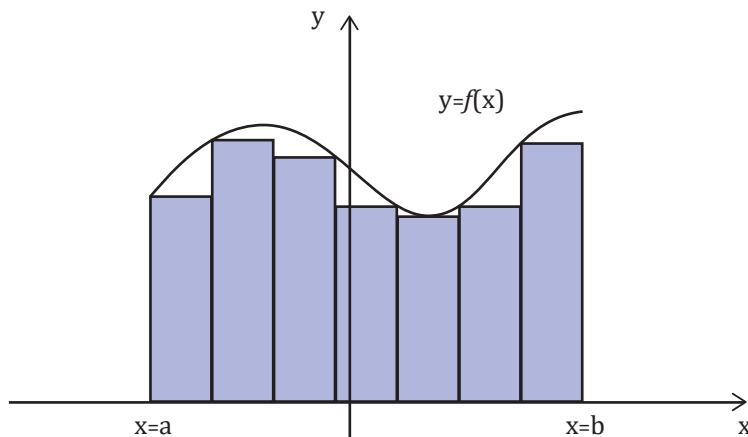


Uma pergunta que surge é: como devemos calcular a área da região A?

Uma tentativa seria dividir essa região em pequenos retângulos de duas maneiras:

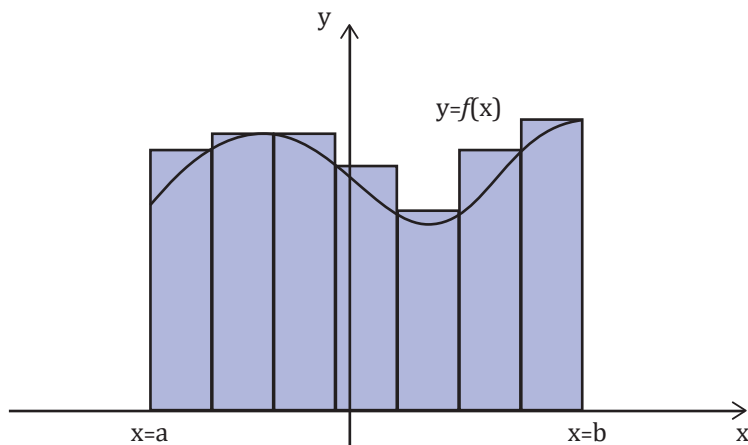
i. Não excedendo o limite imposto pela curva f;

Figura 5 – Área dos retângulos não excede o limite imposto pela curva f



ii. Excedendo o limite imposto pela curva f;

Figura 6 – Área dos retângulos excede o limite imposto pela curva f



De qualquer modo, nos dois casos devemos considerar uma partição P do intervalo $[a, b]$ dada por,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Considere também, c_{i1} e c_{i2} em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(c_{i1})$ seja o valor mínimo e $f(c_{i2})$ seja o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Como já vimos, anteriormente, que a área da região A recai numa soma de Riemann, então te-

remos a soma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(c_{i1}) \Delta x_i$, que será uma aproximação por falta de área, enquanto que a soma

$\sum_{i=1}^n f(c_{i2}) \Delta x_i$ será uma aproximação por excesso de área. Logo temos,

$$\sum_{i=1}^n f(c_{i1}) \Delta x_i \leq A \leq \sum_{i=1}^n f(c_{i2}) \Delta x_i.$$

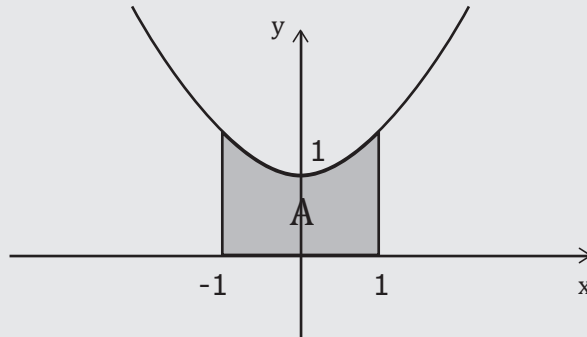
Em qualquer dos casos, fazendo $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, se torna natural definirmos a área da região A da seguinte maneira:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule a área da região plana limitada pela curva $y=x^2+1$, pelo eixo x ($y=0$) e pelas retas verticais $x=-1$ e $x=1$.

Solução: Vamos utilizar a integral definida para calcular a área da região delimitada na figura abaixo:



Desse modo, a área da região A é dada pela fórmula,

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

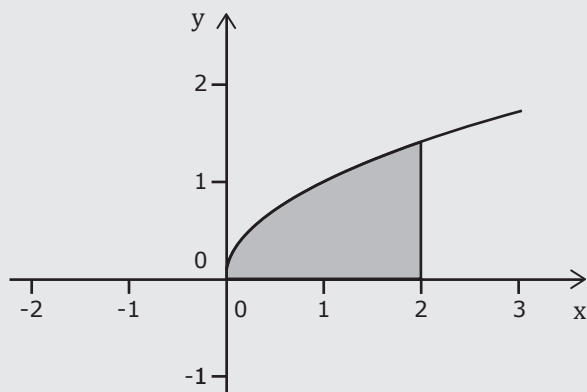
Note que os limites de integração são as interseções das retas verticais com o eixo x . Assim, temos que

$$A = \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx \Rightarrow A = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{-1}{3} - 1 \right) = 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{A = \frac{8}{3} \text{ u.a.}}$$

Observação: Como não estamos preocupados com a unidade real de cada área, utilizaremos a abreviação u.a., que significa unidades de área.

2. Calcule a área da região plana limitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e pela reta $x = 2$.

Solução: Observe na figura, a seguir, a região a qual queremos calcular a área:



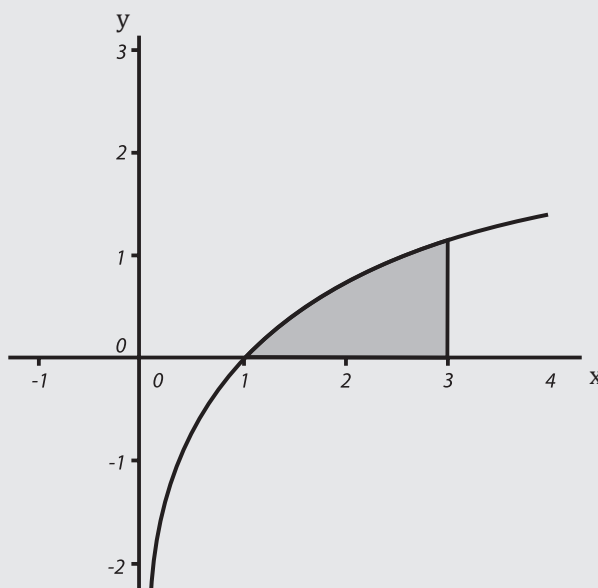
Nesse caso, diferentemente do caso anterior, não temos duas retas verticais para delimitar os limites de integração. Note que o limite inferior é obtido pela interseção da curva y com o eixo x , já o limite superior é determinado pela interseção da reta vertical $x=2$ com o eixo x . (Na ausência das retas verticais os limites de integração são determinados pelas interseções da curva com o eixo x).

Desse modo, temos que a área da região em destaque é dada por,

$$A = \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} \sqrt{8} - 0 = \frac{4}{3} \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{4}{3} \sqrt{2} \text{ u.a.}}$$

3. Calcule a área do conjunto do plano limitado pelas curvas $y=\ln x$, $x=3$ e o eixo x .

Solução: O conjunto, para o qual queremos calcular a área, está representado geometricamente na figura a seguir.



De forma que a área do conjunto é dada pela integral,

$$A = \int_1^3 \ln x \, dx.$$

A integral $\int \ln x \, dx$ é facilmente resolvida utilizando o método de integração por partes (ver o exercício resolvido na seção de integração por partes). Portanto, temos:

$$A = \int_1^3 \ln x \, dx = (x \ln x - x) \Big|_1^3 = (3 \ln 3 - 3) - (1 \ln 1 - 1) = 3 \ln 3 - 2 \Rightarrow \boxed{A = \ln(27) - 2 \text{ u.a.}}$$

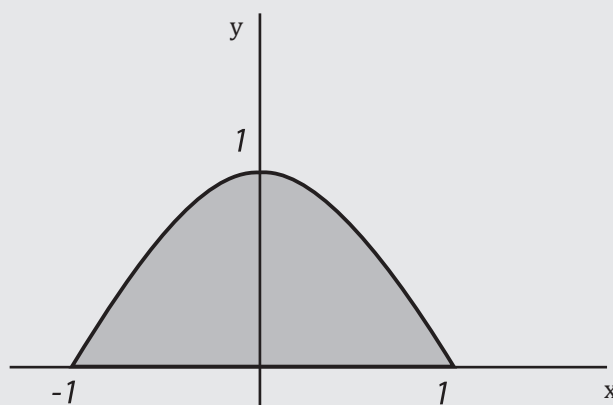
Observe, nesse caso, que o exercício não especificou que a área a ser calculada deveria estar entre as retas $x=1$ e $x=3$, o enunciado citou apenas $x=3$. Porém, ao fazer o esboço do gráfico observamos que a interseção entre a curva e o eixo x ocorre em $x=1$. Lembre-se que $\ln 1=0$, é nessa hora que se faz necessário o seu conhecimento acerca da função envolvida.

DICA

Se você anda esquecido do que foi estudado nas disciplinas anteriores acerca de algumas funções e suas propriedades, não perca tempo; recorra ao seu material e faça uma breve revisão.

4. Calcule a área da região plana limitada pela curva $y=1-x^2$ e pela reta $y=0$.

Solução: Vamos utilizar a integral definida para calcular a área dessa região, representada no plano através do gráfico a seguir.



Uma vez que o exercício não fixou retas verticais que delimitassem a área da região, os limites de integração foram obtidos através das interseções da curva com o eixo x , como segue.

$$A = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx \Rightarrow A = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} \Rightarrow A = \frac{4}{3} \text{ u.a.}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

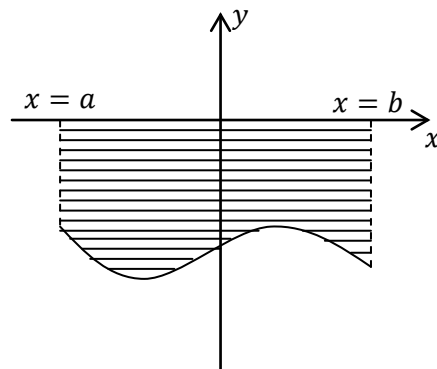
1. Para as funções dadas a seguir, faça um esboço das regiões planas delimitadas pelas curvas e, em seguida, calcule a área de tais regiões:

- | | |
|---|--|
| a) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 3$ e o eixo x ; | b) $y = \sqrt{x + 1}$, $x = 2$ e o eixo x ; |
| c) $y = x^2 - 2x + 2$ e $y = 4$; | d) $y = x^2 + 2x + 2$ e $y = 3$; |
| e) $y = \sqrt{x}$ e $x = 3$ e o eixo x ; | f) $y = \sin x$, $x = 0$ e $x = 3$, e o eixo x ; |
| g) $y = \ln x$, $x = 2$ e o eixo x ; | h) $y = \tan x$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$. |

Caso 2 - Conjunto delimitado por duas retas verticais, o eixo x e uma função contínua negativa f

Consideremos, agora, a área A delimitada no plano pela função f , contínua no intervalo $[a, b]$, $f(x) \leq 0 \forall x \in [a, b]$, pelas retas verticais $x = a$, $x = b$ e o eixo x ($y = 0$), como na Figura.

Figura 7 - Área de região A delimitada por uma função negativa



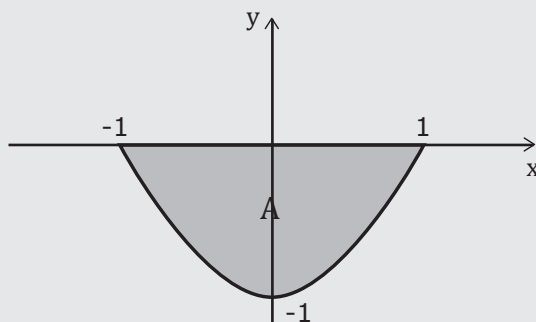
Nesse caso, a área da região A é dada por:

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \text{ ou } A = - \int_a^b f(x) dx$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule a área da região delimitada pela curva $y = x^2 - 1$ e pela reta $y = 0$.

Solução: Note que essa região é semelhante à região do exercício resolvido (4; p. 50). A diferença, nesse caso, é que a região situa-se abaixo do eixo x e a área é dada pelo módulo da integral.

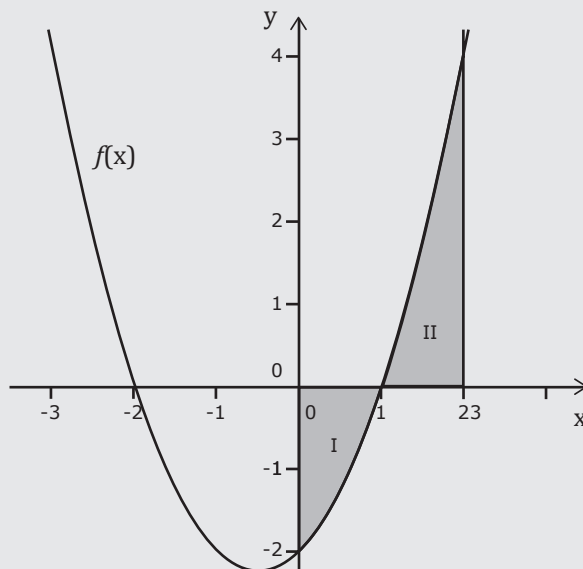


Assim, temos que:

$$A = \left| \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 \right| = \left| \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(\frac{-1}{3} + 1 \right) \right| = \left| \frac{-4}{3} \right| \Rightarrow \boxed{A = \frac{4}{3} \text{ u.a.}}$$

2. Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x)=x^2+x-2$, pelas retas verticais $x=0$ e $x=2$ e pelo eixo x .

Solução: A região cuja área queremos calcular pode ser visualizada no gráfico a seguir:



Note que, tal área é compreendida pelas regiões I e II da figura anterior. Além disso, como a região I se situa abaixo do eixo x , devemos tomar a sua área como o módulo da integral. Desse modo, a área total será dada pela soma das áreas referentes às regiões I e II, que denotaremos por A_1 e A_2 respectivamente. Isto é,

$$A = A_1 + A_2.$$

Onde,

$$A_1 = \left| \int_0^1 f(x) dx \right| = \left| \int_0^1 (x^2 + x - 2) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^1 \right| = \left| \frac{-7}{6} \right| \Rightarrow A_1 = \frac{7}{6} \text{ u.a.}$$

E,

$$A_2 = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 + x - 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{11}{6} \text{ u.a.}}$$

Portanto,

$$A = A_1 + A_2 \Rightarrow A = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} \Rightarrow \boxed{A = 3 \text{ u.a.}}$$

▶ EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Faça um esboço das regiões planas delimitadas pelas curva, em cada item e, em seguida, calcule a área de tais regiões:

a) $f(x) = x^2 + x - 2$ e o eixo x ;

d) $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ e $y = 0$.

b) $y = \ln x$, as retas verticais $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ e o eixo x ;

e) $y = \sin x$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ e o eixo x .

c) $y = x^3$, pelas retas verticais $x = -1$, $x = 1$ e o eixo x ($y = 0$);

Caso 3 (Área entre curvas) - A região, a ser calculada a área, é limitada por duas funções contínuas em $[a,b]$ e $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$

Nesse caso, a área da região delimitada pelas curvas das funções f e g é dada pela diferença entre as áreas da região demarcada pela curva f e da região delimitada pela curva g , como segue.

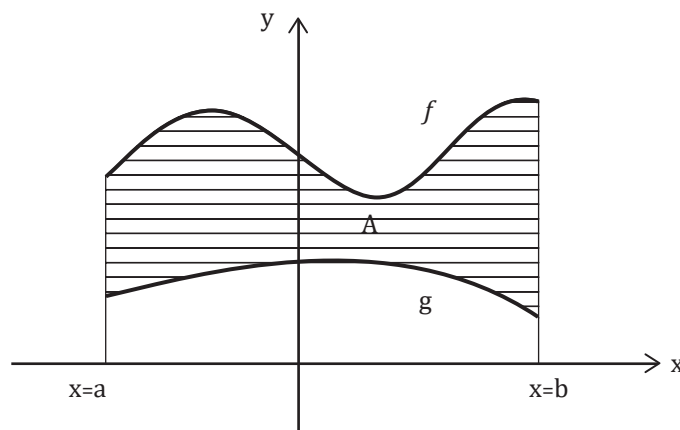
$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Logo,

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Geometricamente,

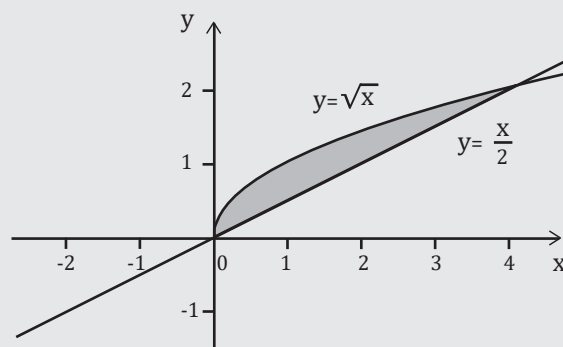
Figura 8 – Área da região A delimitada pelas funções f e g



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = \frac{x}{2}$.

Solução: A região a qual queremos calcular a área é representada em destaque no gráfico a seguir. Observe que não foram necessárias retas verticais para delimitarem a região. Nesse caso a região está delimitada pela interseção das duas curvas. Desse modo, em exercícios como esse, devemos determinar as interseções entre as curvas antes de ir para os cálculos, pois tais interseções são os limites de integração.



Logo, a área da região é dada pela integral da diferença das duas curvas.

Uma maneira de determinar as interseções entre as curvas (sem ser através dos gráficos) é igualar as duas funções, como segue:

$$\sqrt{x} = \frac{x}{2}$$

DICA

Lembre-se que devemos fazer a diferença entre a “função maior” menos a “função menor”. Primeiro devemos determinar a interseção entre as duas curvas (tais interseções também são vistas no gráfico).

Elevando a última igualdade ao quadrado e considerando $x \geq 0$ (para não termos problema com o domínio da função $y = \sqrt{x}$), temos:

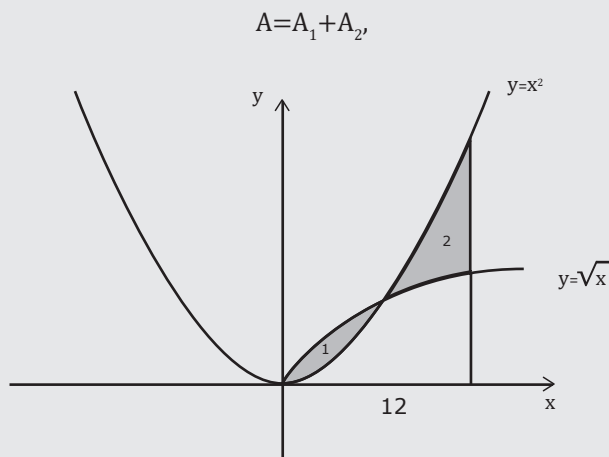
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{x^2}{4} \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4.$$

Dessa maneira, determinamos precisamente as interseções entre as curvas. Observemos, através do gráfico, que a função $y = \sqrt{x}$ é maior do que a função $y = \frac{x}{2}$, no intervalo de interesse. Logo, a área da região é dada por:

$$A = \int_0^4 \left[\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right] dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^2}{4} \right]_0^4 = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{A = \frac{4}{3} \text{ u.a.}}$$

2. Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ e $x = 2$.

Solução: A região a qual queremos calcular a área é representada em destaque no gráfico a seguir. Observe que a região que queremos calcular a área pode ser visualizada no gráfico a seguir. Observe que essa região é dividida em duas partes, desse modo temos que a área total é dada por,



Desse modo,

$$A_1 = \int_0^1 \left[(\sqrt{x}) - (x^2) \right] dx \Rightarrow A_1 = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \Rightarrow A_1 = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right] \Rightarrow A_1 = \frac{1}{3} \text{ u.a.}$$

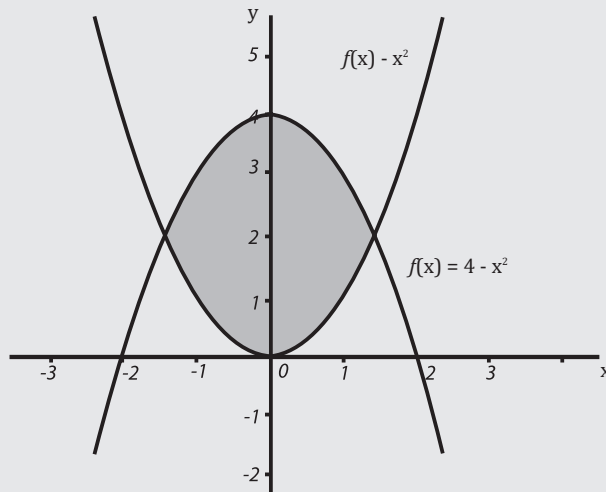
$$A_2 = \int_1^2 \left[x^2 - \sqrt{x} \right] dx \Rightarrow A_2 = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \Rightarrow A_2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{2^3} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) \Rightarrow A_2 = \frac{9 - 2\sqrt{8}}{3} \text{ u.a.}$$

Portanto,

$$A = A_1 + A_2 \Rightarrow A = \frac{1}{3} + \frac{9 - 2\sqrt{8}}{3} \Rightarrow A = \frac{10 - 2\sqrt{8}}{3} \Rightarrow \boxed{A \cong 1,45 \text{ u.a.}}$$

3. Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 \leq y \leq 4 - x^2$.

Solução: A região para a qual queremos calcular a área pode ser visualizada no gráfico a seguir.



Note que a área a qual o exercício se refere é delimitada por $x^2 \leq y \leq 4 - x^2$, isso significa que queremos a área da região em que a curva $y = 4 - x^2$ é maior do que a curva $y = x^2$, e por isso os pontos (x, y) são tais que $x^2 \leq y \leq 4 - x^2$.

Vamos, primeiramente, determinar a interseção entre as duas curvas, como segue:

$$x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Uma vez determinada a interseção entre as duas curvas, podemos calcular a área, como segue abaixo:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [(4 - x^2) - (x^2)] dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4 - 2x^2 dx = \left(4x - 2\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \left[4\sqrt{2} - 2\frac{(\sqrt{2})^3}{3} \right] - \left[4(-\sqrt{2}) - 2\frac{(-\sqrt{2})^3}{3} \right] \\ &= 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \boxed{A = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ u.a.}} \end{aligned}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Nos exercícios a seguir, faça um esboço da região no plano e, em seguida, calcule a área de tais regiões para cada item:

- a) $y = x^2 + 1$ e $y = \frac{1}{2}x + 5$; b) $y = x^3$ e $y = x$; c) $y = x^3$ e $y = \frac{4x}{3}$;
d) $y = 4 - x^2$ e $y = x + 2$; e) $y = x^3 - x$ e o eixo x ; f) $y = \frac{1}{4}x^2$ e $y = 2$;
g) $y = \sqrt{x}$ e $y = x$;

Aplicações das integrais no cálculo de volumes de sólidos de revolução

UN 02

Já estudamos como calcular a área de uma região no plano utilizando a integral definida. Nesta seção, vamos estudar como aplicar a ferramenta integral definida para calcular o volume de um sólido de revolução, outra aplicação bastante interessante. Esse problema é semelhante ao problema de calcular a área, como veremos a seguir.

Volume de um sólido de revolução obtido pela rotação de uma região plana em torno do eixo x

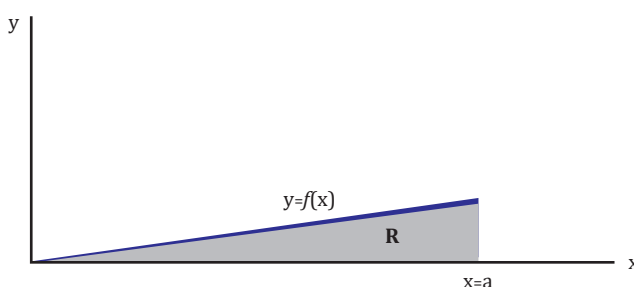
O objetivo aqui é aprender a calcular o volume de um sólido de revolução, obtido pela rotação de uma região do plano em torno do eixo x . Em seguida, veremos como proceder quando a rotação se der em torno do eixo y , ou quando ocorrer em torno de uma reta paralela a um dos eixos ordenados.

Caso 1 - Volume de um Sólido de Revolução obtido pela rotação de uma região plana em torno do eixo x

Nesse caso, faremos duas considerações: quando a função f for positiva, encontra-se acima do eixo x ; e quando a função f for negativa, encontra-se abaixo do eixo x .

Considere, no plano, a região delimitada pela função contínua e não negativa $y=f(x)$, pela reta $x=a$ e o eixo x , conforme a figura a seguir.

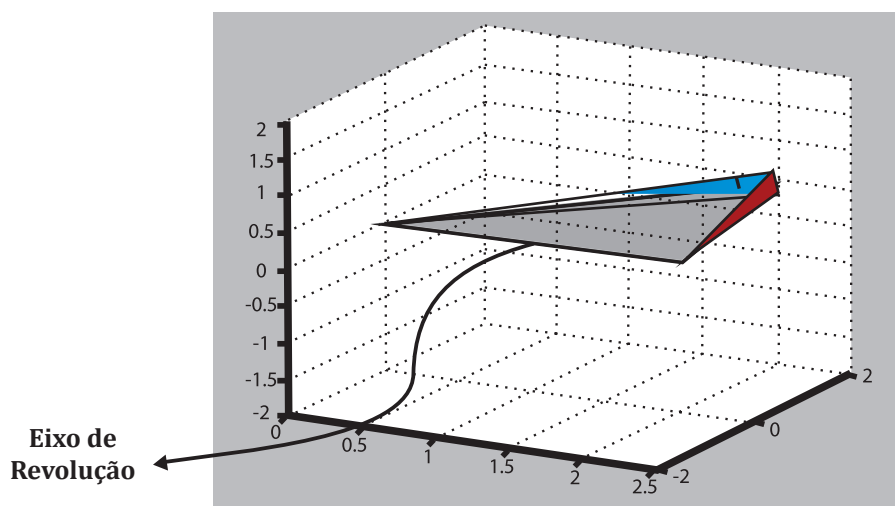
Figura 9 – Região do plano delimitada por uma função contínua não negativa



Obtemos um sólido de revolução ao girar uma região plana em torno de uma reta no plano. A reta em torno da qual giramos a região plana é chamada de eixo de revolução.

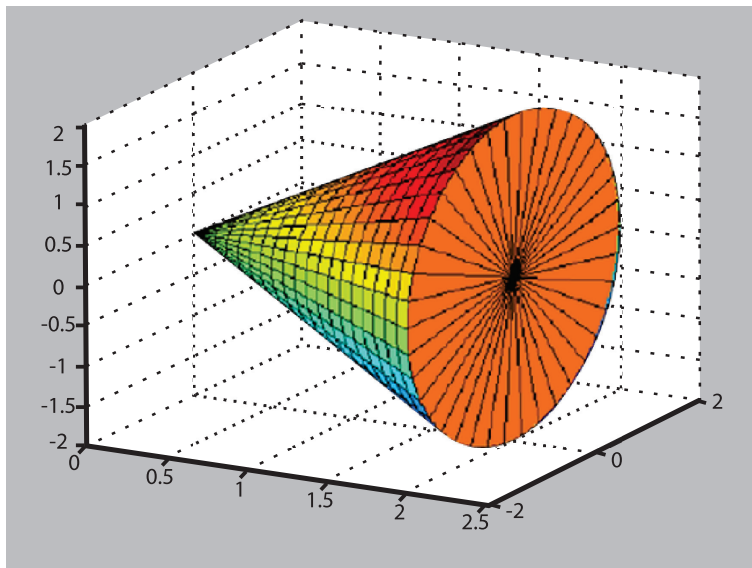
Na Figura 10 podemos visualizar a nossa região plana em três dimensões, e vamos fixar um eixo de revolução para essa região.

Figura 10 – Região plana no espaço (3D)



Girando a região plana em torno do seu eixo de revolução podemos obter o sólido de revolução visualizado na Figura 11.

Figura 11 – Sólido de revolução

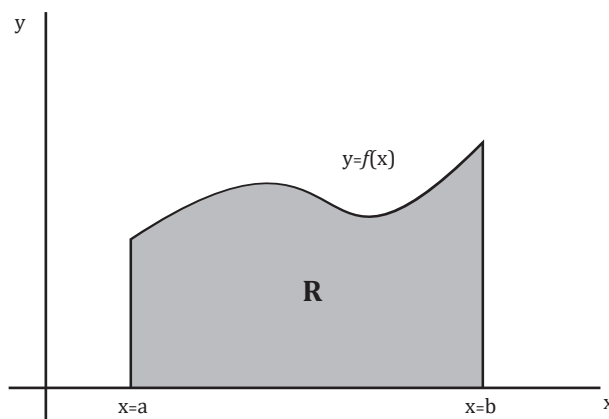


Vamos definir, formalmente, o volume de um sólido S gerado pela rotação da região plana R , em torno do eixo x . Dividiremos o nosso estudo em três casos, considerando, primeiro, o caso em que a região R é delimitada por uma única função contínua não negativa; segundo, o caso em que R é delimitada por uma única função contínua negativa em alguns pontos do intervalo e; terceiro, o caso em que a região R é delimitada por duas funções contínuas.

Caso 1(a) – A região do plano R é delimitada por uma função $y=f(x)$, contínua e não negativa no intervalo $[a,b]$, e pelas retas $x=a$ e $x=b$.

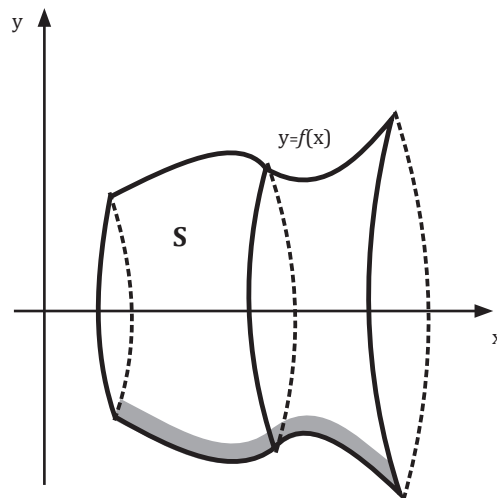
Desse modo, considere y uma função contínua e não negativa no intervalo $[a,b]$. Seja R a região plana delimitada pela curva $y=f(x)$ e pelas retas $x=a$ e $x=b$, (ver Figura 12.)

Figura 12 - Região no plano definida pela função não negativa $y=f(x)$



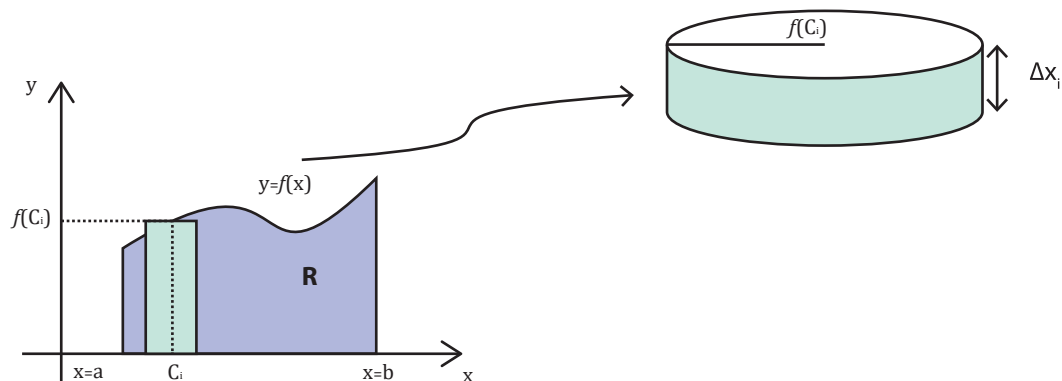
Agora vamos girar a região plana R , em torno do eixo x , a fim de obter o sólido de revolução, dado na Figura abaixo.

Figura 13 – Sólido de revolução obtido após rotação da região plana R



Para definir formalmente o volume do sólido de revolução S , considere uma partição P do intervalo $[a,b]$, dada por $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$. Para cada $i=1,2,\dots,n$, considere um retângulo R_i de base Δx_i e altura $f(c_i)$, (ver Figura). Fazendo cada retângulo R_i girar em torno do eixo x , obtemos um cilindro como sólido de revolução, visto em destaque na Figura 14. Note que o cilindro obtido nesse processo tem raio $f(c_i)$ e altura Δx_i .

Figura 14 – Cilindro obtido pela rotação de cada retângulo R_i em torno do eixo x



Assim, temos que o volume de cada cilindro é dado por,

Área da base $\times$ altura

$$V_i = \pi [f(c_i)]^2 \Delta x_i.$$

Desse modo, a soma dos volumes dos n cilindros nos dá uma aproximação do volume do sólido de revolução S , dada por:

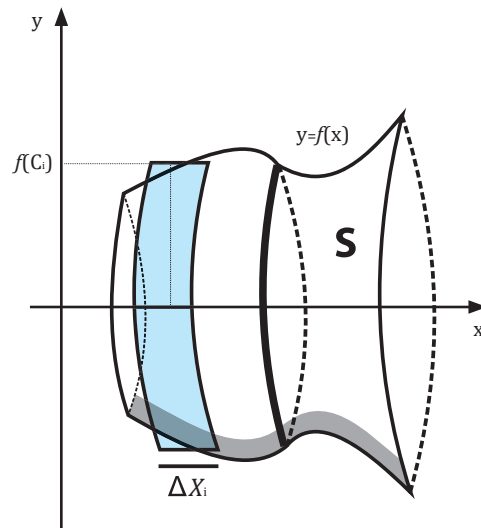
$$\bar{V} = \pi \sum_{i=1}^n [f(c_i)]^2 \Delta x_i.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta x_i \rightarrow 0$, temos uma soma de Riemann e, finalmente, podemos definir o volume do sólido de revolução S através da integral,

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Esse é o volume de um sólido de revolução S obtido pela rotação da região plana R em torno do eixo x , como na Figura 15. Esse método também é chamado de **método do disco**.

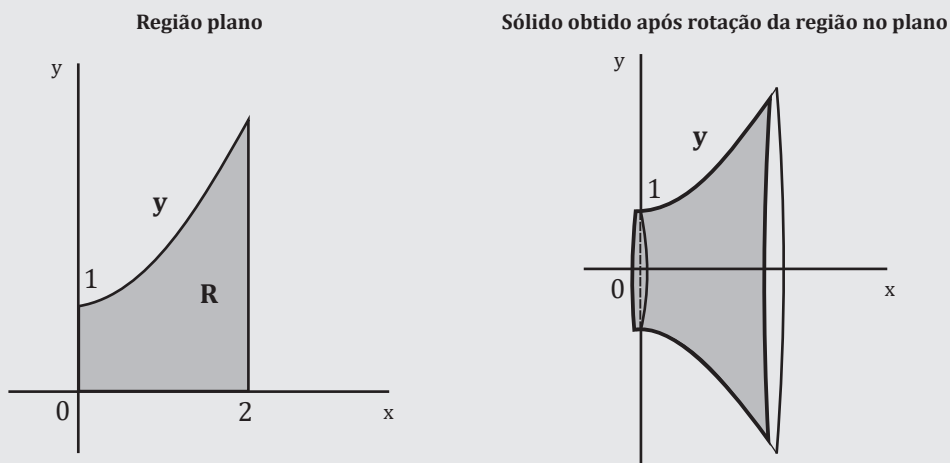
Figura 15 – Sólido de revolução obtido pela rotação da região R em torno do eixo x



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x , delimitada pela curva $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, pelo eixo x e pelas retas $x=0$ e $x=2$.

Solução: Podemos visualizar a região R e o sólido de revolução gerado pela rotação de R em torno do eixo x nas figuras a seguir.



Sabemos que o volume do sólido é dado pela fórmula

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

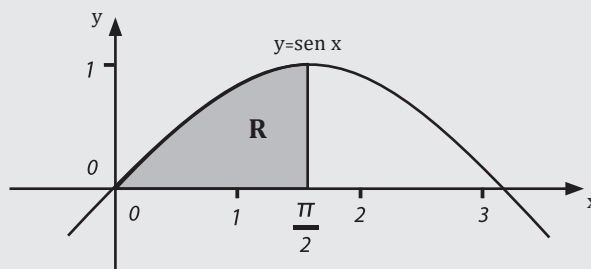
As retas verticais $x=0$ e $x=2$ delimitam os limites de integração, de modo que o volume é obtido por,

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right)^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1 \right) dx \Rightarrow V = \pi \left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 \Rightarrow V = \frac{94}{15} \pi \text{ u.v.}$$

Como não estamos preocupados em saber qual é a unidade em que estamos trabalhando, utilizaremos a abreviatura u.v. que significa unidades de volume.

2. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $y = \sin x$, pelo eixo x e pela reta $x = \frac{\pi}{2}$.

Solução: Podemos visualizar a região R no gráfico a seguir.



Desse modo, o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo x é dado por,

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \quad (1)$$

Vamos calcular a integral indefinida $\int \sin^2 x dx$ e, em seguida, aplicamos os limites de integração. Essa integral pode ser calculada de duas formas, utilizando o método de integração por partes ou utilizando a seguinte identidade trigonométrica,

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Desse modo, temos que:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + c = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c. \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \pi \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{4} \sin \pi$$

Portanto, o volume do sólido de revolução é dado por:

$$V = \frac{\pi^2}{2} \text{ u.v.}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 2$.
2. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $f(x) = \sqrt{x}$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$.
3. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $f(x) = x + 1$, pelo eixo x e pela reta $x = 3$.
4. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $y = \cos x$, pelo eixo x e pela reta $x = 0$.
5. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $y = \sin x$, pelo eixo x e pela reta $x = \frac{\pi}{3}$.

Caso 1(b) - A região do plano R é delimitada por uma função $y=f(x)$, contínua em $[a,b]$ e negativa em alguns pontos desse intervalo, e pelas retas $x=a$ e $x=b$.

Observemos as figuras a seguir. Note que a área da região na Figura é equivalente à região da Figura, o que sugere tomar módulo da função $y=f(x)$ para o cálculo do volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa região plana.

Figura 16.a – Região do plano delimitada por uma função $y=f(x)$ negativa em alguns pontos do intervalo $[a,b]$

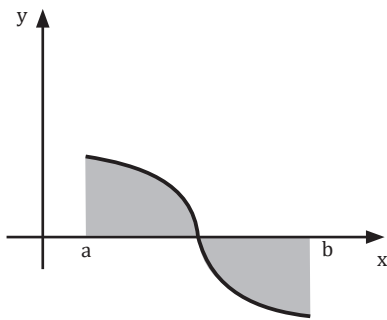
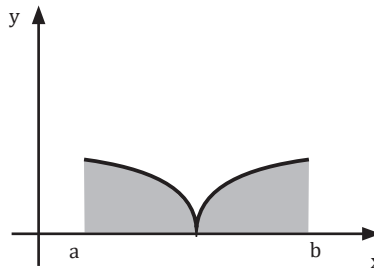
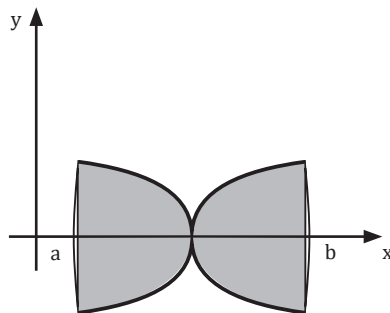


Figura 16.b – Região do plano delimitada por uma função $y=f(x)$ não negativa e de área equivalente à da região plana da Figura (16.a)



Observe que a rotação em qualquer dos casos 16.a e 16.b, resulta no mesmo sólido de revolução, visto na Figura a seguir.

Figura 17 – Sólido obtido pela a rotação da região da Figura 16.a e 16.b em torno do eixo x



Além disso, como $[f(x)]^2 = |f(x)|^2$ temos que o volume desse sólido também será dado por,

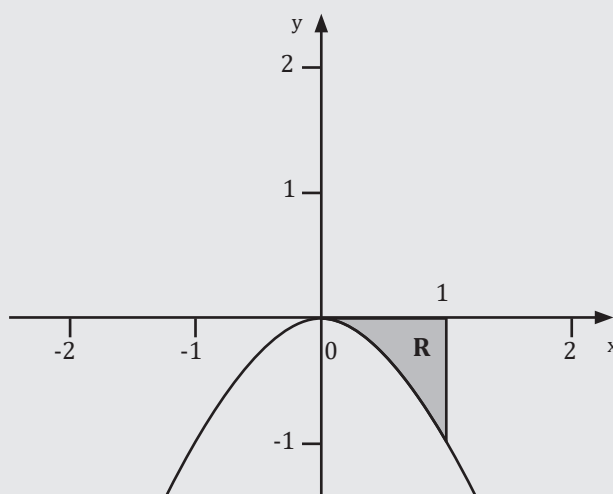
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Observemos também que esse caso ainda faz parte do chamado **método do disco**.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x , delimitada pela curva $y=-x^2$, pelo eixo x e pela reta $x=1$.

Solução: Podemos visualizar a região R na figura a seguir.



Como a região situa-se abaixo do eixo x, o que significa que estamos no caso 2, devemos calcular o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região em torno do eixo x, por:

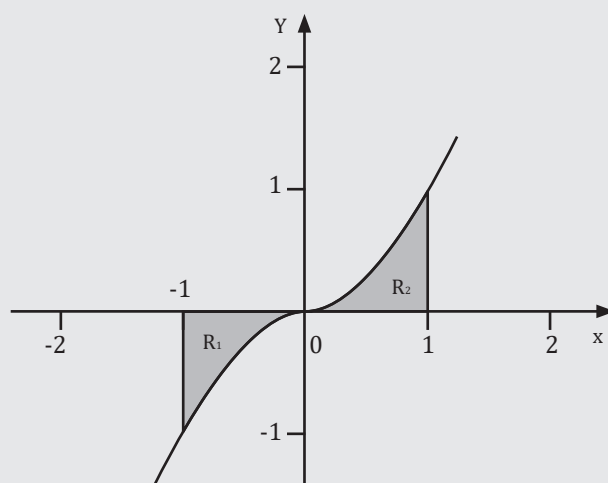
$$V = \pi \int_0^1 (-x^2)^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_0^1 x^4 dx \Rightarrow V = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \Rightarrow V = \frac{\pi}{5} \text{ u.v.}$$

64

2. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $y=x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x=-1$ e $x=1$.

Determinar o valor do volume do sólido, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x.

Solução: Podemos visualizar a região R na figura a seguir.



Note que temos duas regiões destacadas na figura, de modo que o volume do sólido de revolução gerado ao fazer a rotação da região em destaque em torno do eixo x é dado por,

$$V = \pi \int_{-1}^0 (-x^3)^2 dx + \pi \int_0^1 (x^3)^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_{-1}^0 x^6 dx + \pi \int_0^1 x^6 dx \Rightarrow$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 x^6 dx \Rightarrow V = \pi \left[\frac{x^7}{7} \right]_{-1}^1 \Rightarrow V = \frac{2\pi}{7} \text{ u.v.}$$

Observação: Note que poderíamos ter calculado o volume por $V = \int_{-1}^1 (x^3)^2 dx$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $y = -\sqrt{x}$, pelo eixo x e pela reta $x = 3$.
2. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $y = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 2$.
3. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $y = x^2 - 2x - 2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 2$.

Caso 1(c) - A região R é delimitada por duas funções contínuas f e g em $[a, b]$, tais que $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$.

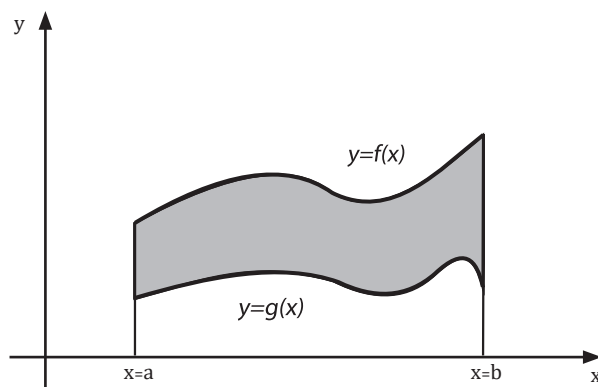
A Figura 18 mostra a região R do plano, delimitada pelas funções f e g. Esse caso é semelhante ao estudado no cálculo de áreas de regiões delimitadas por duas curvas. Aqui temos que o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x é dado pela diferença entre o volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada apenas pela curva $y = f(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$ e o volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada apenas pela curva $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$. Isto é,

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx.$$

Portanto, o volume do sólido S, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, é dado por:

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx.$$

Figura 18 - Região R do plano delimitada por duas funções contínuas f e g em $[a, b]$, tais que $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$.

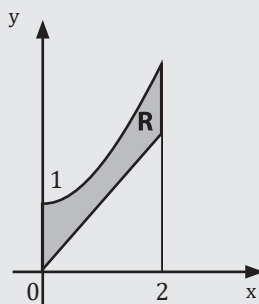


Note que ao girarmos essa região plana em torno do eixo x, o sólido de revolução obtido terá um orifício no meio. De modo que as seções transversais perpendiculares ao eixo de revolução serão anéis e não discos, por esse motivo tal método é conhecido como método do anel.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pelas curvas $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, $y = x$ e pela reta $x = 2$.

Solução:



Nesse caso, o sólido para o qual queremos determinar o volume é delimitado pelas curvas de duas funções de modo que utilizaremos a seguinte fórmula:

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx.$$

Assim, temos:

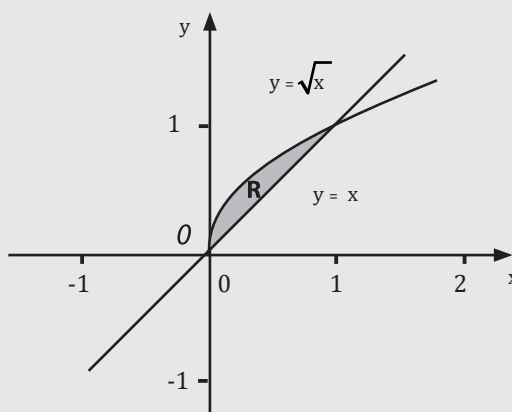
$$V = \pi \int_0^2 \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right)^2 - x^2 \right] dx \Rightarrow V = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1 - x^2 \right) dx \Rightarrow$$

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^4 + 1 \right) dx \Rightarrow V = \pi \left[\frac{x^5}{20} + x \right]_0^2 \Rightarrow V = \pi \left(\frac{32}{20} + 2 \right) \Rightarrow$$

$$V = \frac{18}{5} \pi \text{ u.v.}$$

2. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x$.

Solução: A figura a seguir mostra a região R que será rotacionada em torno do eixo x. Verifique que as intersecções entre as curvas ocorrem nos pontos $x=0$ e $x=1$. (Fizemos algo semelhante no cálculo de áreas, ver seção anterior.



Nesse caso, temos que o volume do sólido de revolução gerado é dado por,

$$V = \pi \int_0^1 \left((\sqrt{x})^2 - x^2 \right) dx = \pi \int_0^1 (x - x^2) dx \Rightarrow V = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi}{6} \text{ u.v.}}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pelas curvas $y = 2\sqrt{x}$ e $y = 2x$.
2. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pelas curvas $y = x^2 + \frac{1}{2}$, $y = x$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.
3. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.
4. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pelas curvas $y = \sin x$ e $y = \frac{x}{2}$.

Volume de um sólido de revolução obtido pela rotação de uma região plana em torno do eixo y

Agora vamos estudar o caso em que a região plana R irá rotacionar em torno do eixo y, como nas figuras a seguir:

Figura 19.a – Região plana R

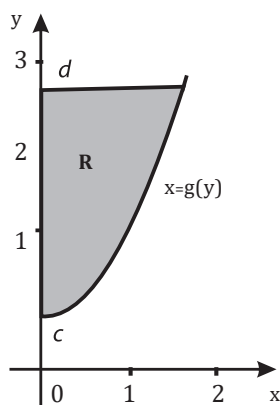
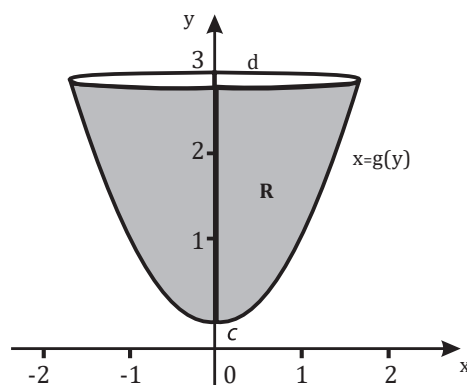


Figura 19.b – Sólido de revolução após rotação da região R em torno do eixo y



Nesse caso, queremos calcular o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva $x = g(y)$, para valores de y tais que $c \leq y \leq d$. Logo, o volume será dado por

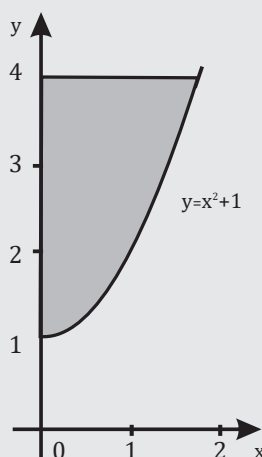
$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy.$$

Observação: Caso a função não esteja na variável y, teremos que calcular a sua inversa, se possível. Esse método ainda é uma variação do **método do disco**.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região plana delimitada pelas curvas $y = x^2 + 1$, $x \geq 0$, e $y = 4$.

Solução: Podemos visualizar a região do plano na figura a seguir:



Desse modo, o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região, da figura anterior, em torno do eixo y é dado por:

$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{y-1})^2 dy \Rightarrow V = \pi \int_1^4 (y-1) dy \Rightarrow V = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_1^4 \Rightarrow \boxed{V = \frac{9\pi}{2} \text{ u.v.}}$$

Observe que para calcularmos tal volume, determinamos a inversa da função $y = x^2 + 1$, considerando que $x \geq 0$. Além disso, o intervalo que limita a região no eixo y é $[1, 4]$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região plana delimitada pelas curvas $y = x^3$, e $y = 3$.
2. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região plana delimitada pelas curvas $y = x^2$, $x > 0$, e $y = 2$.
3. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região plana delimitada pelas curvas $y^2 = 3x$, $y = 0$ e $y = 3$.
4. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região plana delimitada pelas curvas $y^3 - x = 0$, $y = 0$ e $y = 1$.

Volume de um sólido de revolução obtido pela rotação de uma região plana em torno de uma reta paralela a um dos eixos coordenados

Podem ocorrer dois casos, o primeiro quando o eixo de revolução é uma reta $x=M$, paralela ao eixo y , Figura 20.a, e o segundo quando o eixo de revolução é uma reta $y=N$, paralela ao eixo x , os quais podem ser visualizados na Figura 20.b.

No primeiro caso, quando o eixo de revolução é a reta $x=M$, procedemos da seguinte forma para calcular o volume do sólido de revolução gerado após a rotação.

$$V = \pi \int_c^d [g(y) - M]^2 dy.$$

No segundo caso, quando o eixo de revolução é a reta $y=N$, procedemos da seguinte maneira:

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - N]^2 dx.$$

Observação: Esse método ainda é uma variação do **método do disco**.

Figura 20.a – Região plana cuja rotação será em torno da reta paralela ao eixo y

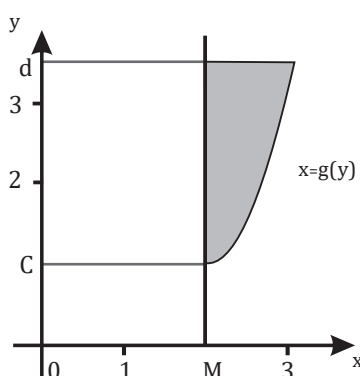
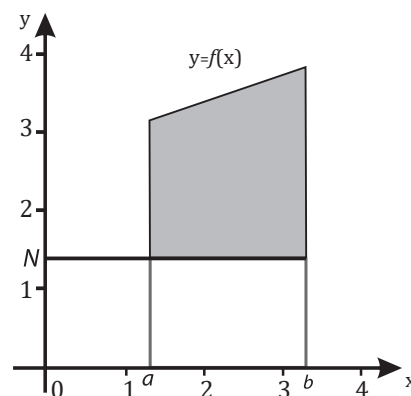


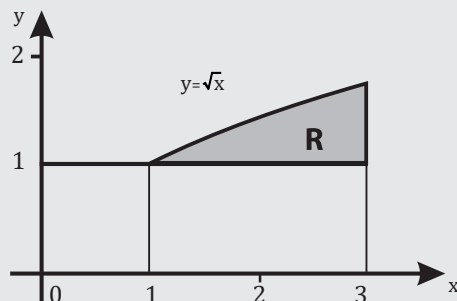
Figura 20.b – Região plana com rotação em torno da reta paralela ao eixo x



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y=1$, de uma região limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $x = 1$ e $x = 3$.

Solução: A região pode ser visualizada na figura a seguir:

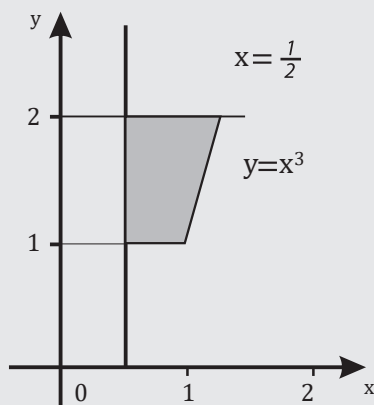


Como a rotação é em torno da reta $y=1$, paralela ao eixo x , podemos calcular o volume do sólido gerado após a rotação da seguinte maneira:

$$V = \pi \int_1^3 \left[\sqrt{x} - 1 \right]^2 dx = \pi \int_1^3 \left(x - 2\sqrt{x} + 1 \right) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \right]_1^3 \Rightarrow V = \frac{22 - 12\sqrt{3}}{3} \pi \text{ u.v.} \Rightarrow \boxed{V \cong 1,28 \text{ u.v.}}$$

2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = \frac{1}{2}$, de uma região limitada pelas curvas $y = x^3$, $y = 2$ e $y = 1$.

Solução: Visualizemos, na figura a seguir, a região cuja rotação será em torno da reta $x = \frac{1}{2}$.



Nesse caso, temos que o volume do sólido de revolução é dado por:

$$V = \pi \int_1^2 \left[y^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \right]^2 dy = \pi \int_1^2 \left(y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} \right) dy = \pi \left[\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4}y \right]_1^2 \Rightarrow$$

$$V = \pi \left(\frac{12\sqrt[3]{4} - 15\sqrt[3]{2} + 4}{10} \right) \Rightarrow \boxed{V = 1,3 \text{ u.v.}}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y=2$, de uma região limitada pelas curvas $y = \frac{1}{x}$, $x = 3$ e $y = 2$.
2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = \frac{1}{2}$, de uma região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 2$.
3. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y=2$, de uma região limitada pelas curvas $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$ e $y = 2$.
4. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x=1$, de uma região limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{3}{2}$ e $x = 1$.

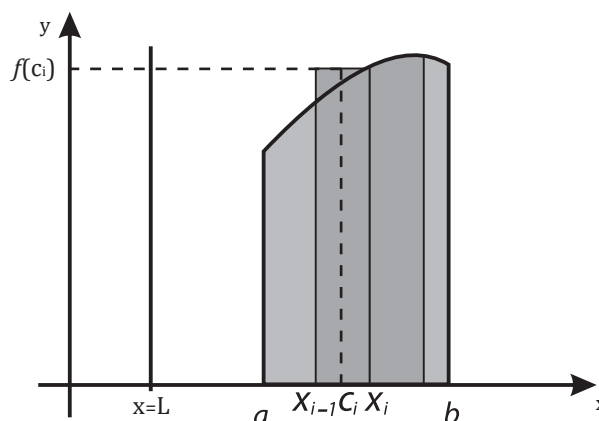
Método das cascas cilíndricas

Outra forma de calcular o volume de um sólido de revolução é utilizando o método das cascas cilíndricas. Vejamos como devemos proceder para utilizar tal método.

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$, com $a > 0$, e tal que $f(x) \geq 0$ e A o conjunto do plano, dado por $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$. Note que essa região está delimitada pela função não negativa f e pelo eixo x no intervalo $[a,b]$.

Consideremos o sólido S obtido pela rotação do conjunto A em torno da reta vertical $x=L$, com $a \geq L$; isto é, a reta $x=L$ pode no máximo tocar a região A , porém sem interceptá-la. Também pode ocorrer dessa reta coincidir com o eixo y , nesse caso $L=0$. Visualizemos, um exemplo de tal região A , na figura a seguir.

Figura 21 – Região plana referente ao conjunto A



Note que o eixo de rotação é perpendicular ao eixo que contém o intervalo natural de integração.

Considere a partição $P := a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a,b]$ e seja c_i o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$. Dividindo a região A em n retângulos, temos que o i -ésimo retângulo tem altura $f(c_i)$ e largura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, conforme Figura 21. Ao girar esse retângulo em torno da reta vertical $x = L$ obtemos uma casca cilíndrica de volume V_i . Imagine, agora, que ao cortar e desenrolar essa casca cilíndrica obtemos um sólido, aproximadamente plano e regular. De modo que o volume da casca cilíndrica é, aproximadamente, o volume da fatia retangular plana, ou seja,

$$V_i = \text{largura} \times \text{altura} \times \text{espessura},$$

ou ainda,

$$V_i = 2\pi(c_i - L) f(c_i) \Delta x_i.$$

Somando-se (soma de Riemann) os volumes das cascas cilíndricas gerados pelos n retângulos, com a partição P , temos uma aproximação do volume do sólido S . Passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$ nessa soma, temos

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (2\pi(c_i - L)f(c_i)\Delta x_i) = \int_a^b 2\pi(x-L)f(x)dx.$$

Portanto, obtemos o volume do sólido de revolução S , através do método das cascas cilíndricas, pela seguinte integral definida:

$$V = 2\pi \int_a^b (x-L)f(x)dx,$$

onde $x=L$ é uma reta vertical arbitrária com $L \leq a$.

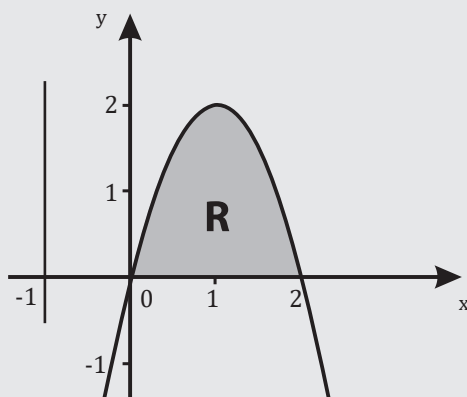
No caso em que a reta $x=L$ coincidir com o eixo y , a equação anterior se reduz à:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Utilizando o método da casca cilíndrica, determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região compreendida entre o eixo x e a parábola $y=f(x)=4x-2x^2$, em torno da reta $x=-1$.

Solução: Podemos visualizar a região R no plano através da figura a seguir.

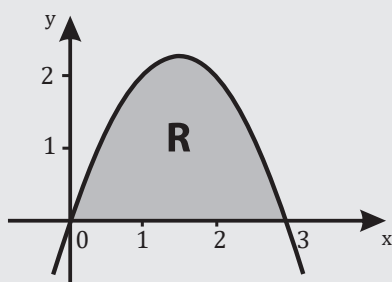


Nesse caso, o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região plana em torno da reta $x=-1$ é dado pela seguinte integral definida:

$$V = 2\pi \int_0^2 (x - (-1))(4x - 2x^2)dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - 2x^3 + 4x)dx = 2\pi \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi \text{ u.v.}$$

2. Utilizando o método da casca cilíndrica, determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região compreendida entre o eixo x e a parábola $y=f(x)=3x-x^2$, em torno do eixo y .

Solução: Podemos visualizar a região R plana através do gráfico a seguir.



Utilizando o método das cascas cilíndricas, podemos calcular o volume do sólido de revolução gerado da seguinte maneira:

$$V = 2\pi \int_0^3 x(3x - x^2)dx = 2\pi \int_0^3 (3x^2 - x^3)dx = 2\pi \left[x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \frac{27\pi}{2} \text{ u.v.}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Utilizando o método da casca cilíndrica, determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região compreendida entre o eixo x e a parábola $y=f(x)=3x-x^2$, em torno da reta $x=-1$.
2. Utilizando o método da casca cilíndrica, determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região compreendida entre o eixo x e a parábola $y=f(x)=4x-2x^2$ em torno do eixo y .
3. Utilizando o método da casca cilíndrica, determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região compreendida entre o eixo x e a parábola $y=-x^2+7x-10$ em torno da reta $x=1$.

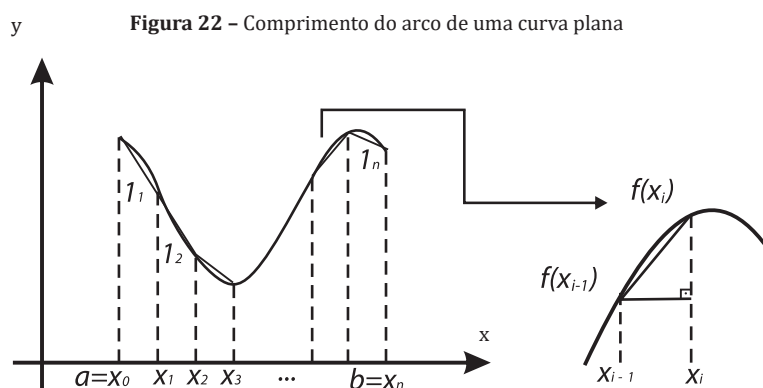
Aplicação da integral no cálculo de comprimento de arco de uma curva plana

UN 02

Já vimos como se aplica a ferramenta integral no cálculo de áreas de regiões planas e no cálculo de volumes de sólidos de revolução. Veremos, agora, como utilizar a integral para calcular o comprimento de arco de uma curva plana, num dado intervalo $[a,b]$, através de sua equação cartesiana.

Comprimento do arco de uma curva C qualquer

A ideia utilizada é semelhante à realizada no cálculo de área e volume. Vamos dividir o intervalo $[a,b]$ e com isso obteremos uma poligonal de modo que o seu comprimento nos dará uma aproximação do comprimento do arco de tal curva, vejamos a figura a seguir:



Sejam f uma função contínua e derivável no intervalo $[a,b]$, C uma curva de equação $y=f(x)$ e P uma partição de $[a,b]$, dada por $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$.

Dessa maneira, temos que a partição P gera uma poligonal. Denotaremos I_i o comprimento do i -ésimo segmento da poligonal, e I o comprimento da poligonal compreendida no intervalo $[a,b]$. Observe que cada I_i pode ser determinado através do conhecido do Teorema de Pitágoras, ver o destaque na Figura 22. Desse modo, temos que o comprimento I_i de cada segmento é dado por:

$$I_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (f(x_1) - f(x_0))^2};$$

$$I_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2};$$

$$\vdots$$

$$I_n = \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (f(x_n) - f(x_{n-1}))^2}.$$

Portanto, o comprimento total da poligonal é dado por:

$$I = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, pois f é derivável em $[a, b]$, temos que para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ existe $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i)(x_i - x_{i-1}))^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + f'(c_i)^2 (x_i - x_{i-1})^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 [1 + f'(c_i)^2]} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(c_i)^2} (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\ I &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \Delta x_i \quad (1) \end{aligned}$$

Note que a equação (1) representa uma soma de Riemann para a função $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Logo, fazendo $\Delta x_i \rightarrow 0$, temos intuitivamente que o comprimento da poligonal se aproximará cada vez mais do comprimento da curva C . Em termos matemáticos, temos que o comprimento da curva plana C é dado por,

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

73

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule o comprimento do arco da curva dada por $y = \sqrt{x^3} + 1$ no intervalo $[0, 4]$.

Solução: Nesse caso, a curva é dada pela equação $f(x) = \sqrt{x^3} + 1$, donde segue que

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, o comprimento da curva é dado por:

$$C = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^4 \Rightarrow C = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \Rightarrow \boxed{C \approx 9,07 \text{ u.c.}}$$

Observação: A integral $\int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$ é facilmente resolvida utilizando o método de substituição, basta fazer $u = 1 + \frac{9}{4}x$. A abreviatura u.c. significa unidade de comprimento.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule o comprimento do arco da curva dada por $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6x} - 2$ no intervalo $[1, 2]$.
2. Calcule o comprimento do arco da curva dada por $y = \sqrt{x^3} - 9$ no intervalo $[0, 3]$.
3. Calcule o comprimento do arco da curva dada por $y = -x^2 + 7x - 10$ no intervalo $[2, 4]$.
4. Calcule o comprimento do arco da curva dada por $y = x^2 + 3x - 1$ no intervalo $[-1, 1]$.

III

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS, NOÇÕES BÁSICAS DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

O objetivo desta unidade é, num primeiro momento, entender o conceito de integral de modo a trabalhar com integrais de funções não limitadas ou com limites de integração infinitos, isto é, estudar as integrais impróprias. Em seguida, iremos fazer um estudo exploratório sobre sequências e séries numéricas.

Ao final dessa unidade você deverá saber:

- Resolver uma integral imprópria;
- Definir e calcular o limite de uma sequência numérica;
- Estudar alguns tipos de séries numéricas.

Integrais impróprias

UN 03

Até o momento, trabalhamos com integrais de funções definidas, contínuas e limitadas num intervalo fechado. Agora vamos relaxar algumas dessas hipóteses. Isto é, vamos estender o conceito de integral definida para o caso em que o intervalo de integração é infinito (isto significa que a função não é definida apenas num intervalo fechado) ou quando a função integrando tem uma descontinuidade infinita em tal intervalo (nesse caso, a função pode ser definida num intervalo fechado, mas não é limitada).

Dessa forma, vamos descobrir como devemos proceder para calcular integrais do tipo,

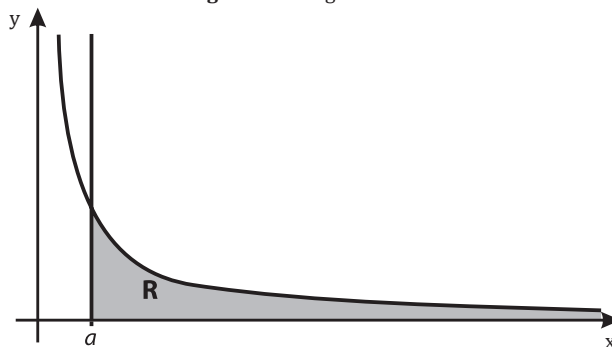
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x) dx, \text{ com } f \text{ não limitada.}$$

Tais integrais, conhecidas como integrais impróprias, surgem em diversas aplicações, especialmente quando é preciso considerar uma região que se estende indefinidamente ao longo do eixo x . Podemos citar alguns exemplos de aplicações das integrais impróprias como na Teoria Cinética dos Gases, o estudo de forças entre partículas quando a distância tende a infinito, entre outros.

Integrais impróprias com limites de integração infinitos

Podemos observar na figura a seguir, a região infinita R . Por ser uma região infinita, a nossa primeira intuição é que sua área também seja infinita. Será que isso realmente ocorre? Vamos tentar responder essa questão no decorrer do nosso estudo. Primeiramente, vamos definir formalmente a integral imprópria com limites de integração infinitos.

Figura 23 – Região infinita R



Definição – Integral Imprópria com Limites de Integração Infinitos

i. Seja f uma função contínua para todo $x \geq a$, definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx,$$

caso tal limite exista;

ii. Seja f uma função contínua para todo $x \leq b$, definimos

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx,$$

caso tal limite exista;

iii. Seja f uma função contínua para todo x , definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

caso tais limites existam;

77

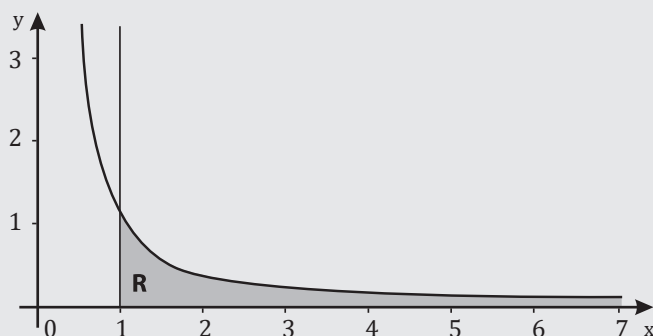
Observação: As integrais impróprias $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ são ditas **convergentes** se os respectivos limites existem e são finitos, e **divergentes** caso os limites não existam ou sejam infinitos.

Note que o estudo das integrais impróprias recai no estudo da integral definida e de limites (visto na disciplina de Cálculo I).

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule a área da região à direita de $x=1$, delimitada pela curva $y = \frac{1}{x^2}$ e o eixo x .

Solução: Observemos tal região no gráfico a seguir.



A área da região destacada na figura é dada por,

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx \quad (1)$$

Primeiro vamos calcular a integral $\int_1^t \frac{1}{x^2} dx$, em seguida passamos ao limite. Desse modo,

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left. \frac{-1}{x} \right|_1^t = \frac{-1}{t} + 1 \quad (2)$$

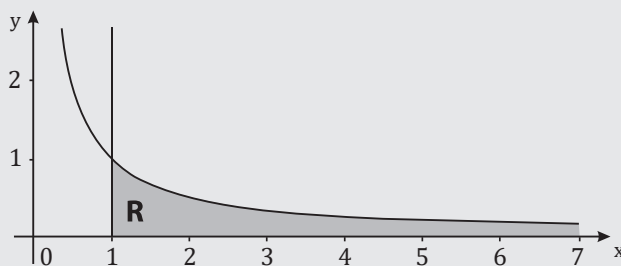
Substituindo (2) em (1), segue

$$A = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{t} + 1 \right) = 0 + 1 = 1.$$

Logo, podemos concluir que a área da região R é $A=1$ u.a. Observe que, apesar da região ser infinita, ela possui área finita. Isto significa que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente.

2. Calcule a área da região delimitada pela curva $y = \frac{1}{x}$, o eixo x e a reta $x=1$, com $x > 0$.

Solução: Visualizemos tal região no gráfico a seguir.



A área da região destacada na figura é dada por,

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty.$$

Diferentemente do exercício anterior, verificamos que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ é divergente e, portanto, a região infinita possui área infinita.

Observação: Qualquer das integrais impróprias da definição pode ser interpretada geometricamente como área, desde que a função em questão seja positiva.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Investigue as seguintes integrais impróprias:

a) $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$ b) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$ c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ d) $\int_{-\infty}^{+\infty} (2-x^4) dx$ e) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$

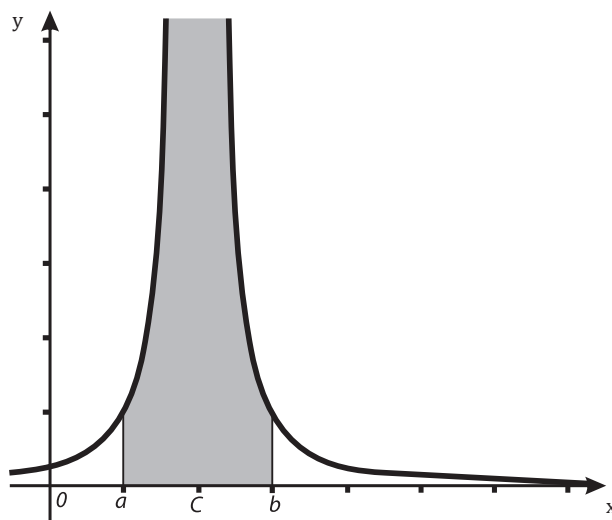
2. Calcule a área da região delimitada pela curva $y=\ln x$, o eixo x e a reta $x=1$, considere a região à direita de $x=1$.

3. Calcule a área da região delimitada pela curva $y=e^x$ e o eixo x , à esquerda de $x=0$.

Integrais impróprias com integrandos infinitos

Vamos considerar, agora, o caso em que a função integrando tem limite infinito. Ou seja, mesmo sendo uma função definida num intervalo limitado, f não é limitada em algum ponto desse intervalo, conforme a figura a seguir. Observe que, nesse caso, também estamos trabalhando com uma região infinita e podemos fazer os mesmos questionamentos da seção anterior.

Figura 24 – Região infinita R onde f é não limitada em $x=c$



Nesse caso, para calcular a área da região R , utilizaremos a seguinte definição de integral imprópria.

Definição – Integrais Impróprias com Integrandos Infinitos

i. Seja f uma função contínua em $[a, b)$ e tal que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx,$$

caso tal limite exista.

ii. Seja f uma função contínua em $(a, b]$ e tal que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx,$$

caso tal limite exista.

iii. Seja f uma função contínua para todo $x \in [a, b]$, exceto em $x = c \in (a, b)$, e $\int_a^c f(x) dx$ e $\int_c^b f(x) dx$ integrais convergentes (limites laterais em c infinitos), definimos:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx,$$

caso ambos os limites os limites existam.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Investigue a integral $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$.

Solução: Note que a função não é limitada em $x=1$. Desse modo, temos

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{x-1} dx$$

Primeiramente, vamos resolver a integral indefinida para em seguida substituímos na expressão anterior. Assim, resolvendo a integral indefinida (método da substituição)

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + c.$$

Desse modo,

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} [\ln(x-1)]_t^2 = \lim_{t \rightarrow 1^+} [\ln(1) - \ln(t-1)] = -\lim_{t \rightarrow 1^+} \ln(t-1) = -(-\infty) = \infty.$$

Logo, a integral imprópria é divergente.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Investigue as seguintes integrais impróprias:

a) $\int_1^3 \frac{1}{x-2} dx;$

b) $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx;$

c) $\int_{-1}^0 \frac{1}{(x+1)^2} dx;$

Sequências numéricas

UN 03

A partir desta seção, vamos fazer um estudo introdutório a cerca de sequências e séries de números reais. Você irá se aprofundar mais no assunto quando for estudar a disciplina Introdução à Análise Real. Desse modo, vamos omitir as demonstrações dos teoremas que serão mencionados.

Definição (Sequência): Uma sequência de números reais é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(n) = x_n$, com $n \geq 1$.

A notação utilizada para representar uma sequência numérica cujo termo geral é x_n é: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou, simplesmente, (x_n) ou ainda na sua forma estendida $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$.

Observe que o domínio de uma sequência é pontual, uma vez que se trata do conjunto dos números naturais. Por conveniência, estamos considerando o conjunto dos números naturais para valores maiores ou iguais a 1.

Vejamos alguns exemplos de sequências numéricas:

a) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right);$

c) $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots);$

b) $(n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 3, \dots, n, \dots);$

d) $(1)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, 1, \dots);$

Definição (Limite de uma Sequência): Dizemos que a sequência (x_n) converge para o número a , se para cada $\varepsilon > 0$ existe um número natural N (possivelmente dependente de ε) e tal que

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Tal limite será denotado por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ou $\lim x_n = a$, ou simplesmente $x_n \rightarrow a$.

Quando o limite de uma sequência existe e é finito dizemos que tal sequência é convergente. Caso o limite não exista ou seja $(\pm\infty)$, dizemos que tal sequência é divergente. Para calcular o limite de uma sequência, basta calcularmos o limite do seu termo geral e todas as propriedades estudadas para limites de funções também valem para limites de sequências. (Vale a pena relembra-las!)

Definição (Subsequência): uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (x_n) é a restrição da função f ao conjunto infinito $N' = \{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$, com $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$.

Exemplo: Da sequência $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ podemos retirar duas subsequências distintas dadas por,

$$((-1)^{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \quad \text{e} \quad ((-1)^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (-1, -1, -1, \dots, -1, \dots)$$

que são as subsequências constante igual a 1 e igual a -1.

Teorema: Se (x_n) é uma sequência tal que $x_n \rightarrow a$, então toda subsequência de (x_n) também converge para a .

O Teorema anterior é normalmente utilizado para mostrar que uma sequência não é convergente, pois dele podemos obter a seguinte conclusão: “Se uma sequência (x_n) possui duas subsequências com limites distintos, então (x_n) é divergente.”

Exemplo: Do exemplo anterior, podemos concluir que a sequência $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é divergente, pois possui duas subsequências com limites distintos, uma converge para 1 e a outra converge para -1.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule o limite da seguinte sequência numérica:

a) $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Solução: Para calcular tal limite vamos proceder da mesma forma que aprendemos na disciplina Cálculo I. Nesse caso, veja que temos uma indeterminação do tipo $(\infty - \infty)$ e para contornar tal situação devemos multiplicar e dividir a expressão pelo seu conjugado. Isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

Logo, a sequência dada converge para o limite 0.

b) $\left(\frac{2n^2 + n + 5}{n^2 + 2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Solução: Nesse caso, ao fazer n tender a infinito, teremos uma indeterminação do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Então, antes de passar ao limite devemos dividir o numerador e o denominador pela maior potência de n (mesmo procedimento usando para calcular limites infinitos na disciplina Cálculo I). Desse modo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 5}{n^2 + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2 + n + 5}{n^2}}{\frac{n^2 + 2n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{n}{n^2} + \frac{5}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{2+0+0}{1+0} = \frac{2}{1} = 2.$$

Portanto, a sequência dada é convergente e seu valor é 2.

$$c) \left(\frac{10}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Solução: Nesse caso, o limite é intuitivo uma vez que uma constante dividido por um número muito grande vai tender a zero. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n} = \frac{10}{\infty} = 0.$$

E portanto, essa sequência também é convergente.

$$d) (n+1)_{n \in \mathbb{N}}$$

Solução: Nesse caso, também vale a intuição, uma vez que por $n \rightarrow \infty$, observa-se que a sequência não será limitada. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Logo, essa sequência é divergente.

▶ EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Verifique se as sequências a seguir são convergentes ou divergentes. Em caso de convergência, calcule o seu limite.

$$a) \left(\frac{3n^2}{n^2 + 2n + 1} \right)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$b) \left(\frac{n^2 + 3}{2n^2 + 1} \right)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$c) \left(\frac{2}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$d) (5)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$e) \left(\frac{3}{n} \sin(n) \right)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$f) \left(\frac{n}{2n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$g) \left(\frac{n}{e^n} \right)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$h) \left(\frac{2^n}{3^{n+2}} \right)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$i) \left(1 + \frac{1}{2n} \right)_{n \in \mathbb{N}}^n .$$

Séries numéricas

UN 03

Nesta seção, vamos estudar algumas noções básicas sobre séries numéricas. Os matemáticos voltaram suas atenções para o estudo de séries numéricas devido à curiosidade de termos muitas vezes uma soma infinita de termos resultando em um número.

Definição (Série Numérica): Uma série numérica é uma soma infinita dada por:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$ é o n -ésimo termo da série.

Exemplos:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} (n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

Algumas séries de números reais especiais

Algumas séries numéricas apresentam as mesmas características e, por isso, são classificadas em determinados grupos. Vejamos algumas dessas séries a seguir.

Série Geométrica:

Uma série é dita geométrica quando cada termo dessa série é obtido multiplicando-se o seu termo precedente pelo mesmo valor, chamado de razão da série. De uma maneira mais forma, as séries geométricas são da forma

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n,$$

onde a e r são números reais fixados, com $a \neq 0$, e r é a razão da série, a qual pode ser positiva ou negativa.

Uma das vantagens da série geométrica é que podemos determinar a sua convergência, ou divergência. Para isso devemos considerar $|r| \neq 1$. Para isso, consideremos a soma parcial.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n$$

Multiplicando a equação anterior pela razão r , temos:

$$rS_n = ra + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n+1}$$

Desse modo, temos

$$S_n - rS_n = a - ar^{n+1} \Rightarrow S_n(1-r) = a(1-r^{n+1})$$

Isto é,

$$S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{(1-r)}.$$

Desse modo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{(1-r)}.$$

Logo, se $|r| < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$, e então essa soma converge para $\frac{a}{1-r}$. Se $|r| \geq 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \infty$ e, consequentemente, a série diverge.

Resumindo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & \text{se } |r| < 1 \\ \text{diverge, se } |r| \geq 1. \end{cases}$$

P-Séries

Uma p-série é uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

onde p é um número real. Assim como na série geométrica, podemos estudar a convergência ou divergência da p-série. Nesse caso, a convergência ou divergência da p-série é dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{converge, se } p > 1 \\ \text{diverge, se } p \leq 1. \end{cases}$$

Observação: Pesquise a convergência e divergência das p-séries.

▶ EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Verifique a convergência ou divergência das séries geométricas a seguir. Caso converjam, calcule o valor da soma:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n};$

Solução: Note que a série é geométrica de razão $q = \frac{1}{3}$, cujo módulo é menor do que 1, e portanto a série é convergente. Podemos visualizar a série na forma expandida:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

Além disso, note que cada termo dessa série é obtido multiplicando-se o termo anterior pela razão $\frac{1}{3}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n;$

Solução: Note que essa série também é uma série geométrica, mas de razão $q = \frac{3}{2}$, e portanto $|q| = \left|\frac{3}{2}\right| > 1$. Ou seja, de acordo com os nossos estudos essa série é divergente.

Observação: Tente escrever essa série na forma expandida e verifique que a sua razão realmente é $\frac{3}{2} = 1,5$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2};$

Solução: Essa é uma p-série, com $p = 2 > 1$. Portanto essa série é convergente.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$

Solução: Temos, agora, uma p-série com $p = \frac{2}{3} < 1$, e portanto é divergente.

▶ EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Verifique a convergência ou divergência das séries a seguir. Caso converjam calcule o valor da soma:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{3^n}\right);$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{3}{5^n}\right);$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n;$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3};$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right);$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}};$

Limite de uma série de números reais

Definição (Soma parcial): A sequência (S_n) das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é definida por:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se a sequência das somas parciais convergir para um limite S , então a série é convergente e converge para o limite S . Se a sequência das somas parciais da série não converge, dizemos que a série é divergente.

Isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Ou seja, calcular o valor (caso exista) de uma série se resume a calcular o limite das somas parciais da série.

E nesse caso, valem todas as propriedades de limites estudadas no Cálculo I.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ é convergente.

2. Determine a convergência ou divergência das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}-5};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

REFERÊNCIAS

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A – Funções, limite, derivação e integração**. Editora Pearson Prentice Hall, 6ª edição. São Paulo, 2006.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, 5ª Edição, vol. 1. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos S.A., 2002.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, 5ª Edição, vol. 2. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos S.A., 2002.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, 5ª Edição, vol. 4. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos S.A., 2002.

STEWART, J. **Cálculo**: vol. 1 e 2. Editora Cengage Learning, tradução da 6ª edição, 2010.

THOMAS, G. B. **Cálculo**, vol. 1 e 2. Editora Pearson Prentice Hall, 10ª edição. São Paulo, 2003.

[illegible]

[illegible]

EDITORIA

EdUFERSA - Editora da Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Campus Leste da UFERSA
Av. Francisco Mota, 572 - Bairro Costa e Silva
Mossoró-RN | CEP: 59.625-900
edufersa@ufersa.edu.br

IMPRESSÃO

Imprima Soluções Gráfica Ltda/ME
Rua Capitão Lima, 170 - Santo Amaro
Recife-PE | CEP: 50040-080
Telefone: (91) 3061 6411

COMPOSIÇÃO

Formato: 21cm x 29,7cm
Capa: Couchê, plastificada, alceado e grampeado
Papel: Couchê liso
Número de páginas: 92
Tiragem: 400

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-63145-37-6



9 788563 145376



UNIVERSIDADE FEDERAL
UFERSA
RURAL DO SEMI-ÁRIDO



PROGRAD
PRÓ-REITORIA DE
GRADUAÇÃO



Ministério
da Educação
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA