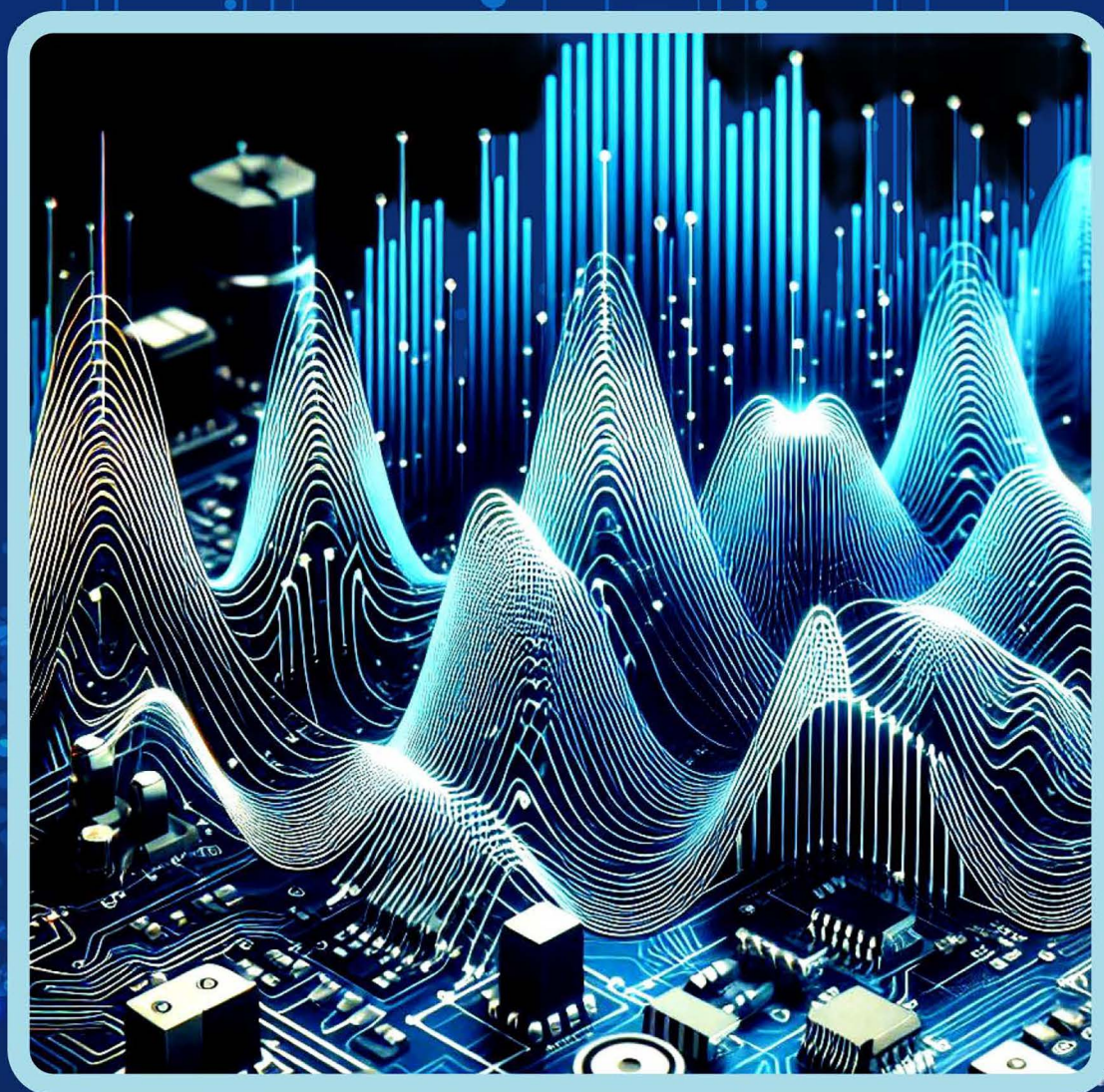


**Jumar L. Russi**  
**Fátima C. Soares**

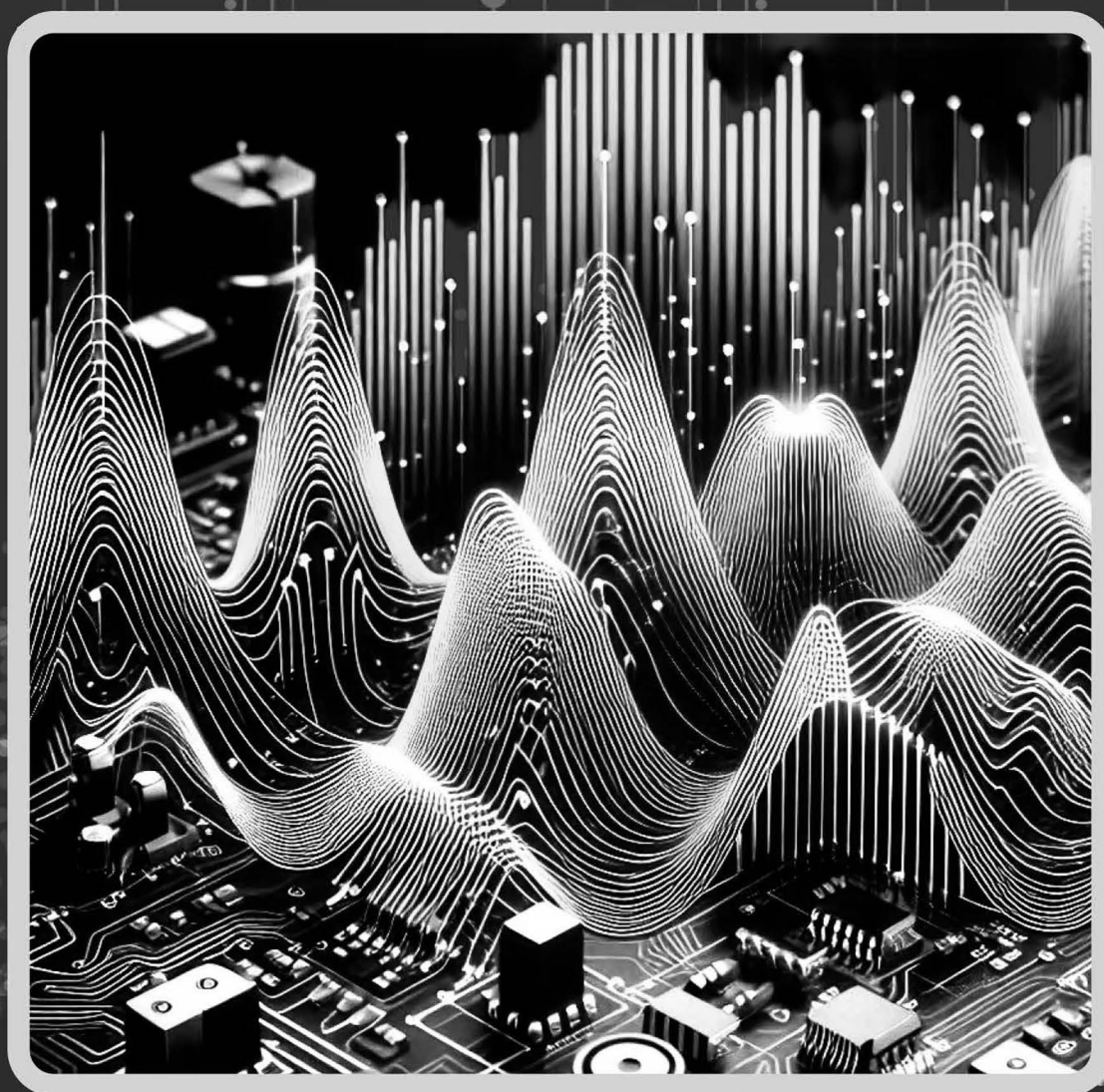
# **ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETIFICADORAS À DIODO**



**Atena**  
Editora  
Ano 2025

**Jumar L. Russi**  
**Fátima C. Soares**

# **ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETIFICADORAS À DIODO**



**Atena**  
Editora  
Ano 2025

**Editora chefe**

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira

**Editora executiva** 2025 by Atena Editora

Natalia Oliveira Scheffer Copyright © 2025 Atena

**Assistente editorial** Editora

Flávia Barão Copyright do texto © 2025,

**Bibliotecária** o autor

Janaina Ramos Copyright da edição © 2025,

**Projeto gráfico** Atena Editora

Nataly Evilin Gayde Os direitos desta edição

Thamires Camili Gayde foram cedidos à Atena

**Imagens da capa** Editora pelo autor.

iStock *Open access publication by*

**Edição de arte** Atena Editora

Yago Raphael Massuqueto Rocha



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo desta obra, em sua forma, correção e confiabilidade, é de responsabilidade exclusiva dos autores. As opiniões e ideias aqui expressas não refletem, necessariamente, a posição da Atena Editora, que atua apenas como mediadora no processo de publicação. Dessa forma, a responsabilidade pelas informações apresentadas e pelas interpretações decorrentes de sua leitura cabe integralmente aos autores.

A Atena Editora atua com transparência, ética e responsabilidade em todas as etapas do processo editorial. Nosso objetivo é garantir a qualidade da produção e o respeito à autoria, assegurando que cada obra seja entregue ao público com cuidado e profissionalismo.

Para cumprir esse papel, adotamos práticas editoriais que visam assegurar a integridade das obras, prevenindo irregularidades e conduzindo o processo de forma justa e transparente. Nosso compromisso vai além da publicação, buscamos apoiar a difusão do conhecimento, da literatura e da cultura em suas diversas expressões, sempre preservando a autonomia intelectual dos autores e promovendo o acesso a diferentes formas de pensamento e criação.

# **Análise de estruturas retificadoras à diodo utilizando o MATLAB**

**Autores:** Jumar L. Russi  
Fátima C. Soares  
**Revisão:** Os autores  
**Diagramação:** Nataly Evilin Gayde  
**Capa:** Yago Raphael Massuqueto Rocha  
**Indexação:** Amanda Kelly da Costa Veiga

| Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| R969                                                    | <p>Russi, Jumar L.<br/>Análise de estruturas retificadoras à diodo<br/>utilizando o MATLAB / Jumar L. Russi, Fátima<br/>C. Soares. - Ponta Grossa - PR: Atena, 2025.</p> <p>Formato: PDF<br/>Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader<br/>Modo de acesso: World Wide Web<br/>Inclui bibliografia<br/>ISBN 978-65-258-3797-0<br/>DOI: <a href="https://doi.org/10.22533/at.ed.970251212">https://doi.org/10.22533/at.ed.970251212</a></p> <p>1. Eletrônica - circuitos retificadores. I.<br/>Russi, Jumar L. II. Soares, Fátima C. III.<br/>Título.</p> <p style="text-align: right;">CDD 621.3815</p> |
| Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos - CRB-8/9166  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

**Atena Editora**  
Ponta Grossa - Paraná - Brasil  
+55 (42) 3323-5493  
+55 (42) 99955-2866  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

## **Conselho Editorial**

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira - Instituto Federal Goiano  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Amanda Vasconcelos Guimarães - Universidade Federal de Lavras  
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto - Pontifícia Universidade Católica de Goiás  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ariadna Faria Vieira - Universidade Estadual do Piauí  
Prof. Dr. Arinaldo Pereira da Silva - Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará  
  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto - Universidade Federal de Goiás  
  
Prof. Dr. Cirênio de Almeida Barbosa - Universidade Federal de Ouro Preto  
Prof. Dr. Cláudio José de Souza - Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daniela Reis Joaquim de Freitas - Universidade Federal do Piauí  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Dayane de Melo Barros - Universidade Federal de Pernambuco  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior - Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Érica de Melo Azevedo - Instituto Federal do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos - Instituto Federal do Pará  
Prof. Dr. Fabrício Moraes de Almeida - Universidade Federal de Rondônia  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Glécilla Colombelli de Souza Nunes - Universidade Estadual de Maringá  
Prof. Dr. Humberto Costa - Universidade Federal do Paraná  
Prof. Dr. Joachin de Melo Azevedo Sobrinho Neto - Universidade de Pernambuco  
Prof. Dr. João Paulo Roberti Junior - Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Juliana Abonizio - Universidade Federal de Mato Grosso  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior - Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Keyla Christina Almeida Portela - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Miranilde Oliveira Neves - Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará  
Prof. Dr. Sérgio Nunes de Jesus - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Talita de Santos Matos - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
  
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo - Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior - Universidade Federal de Alfenas

# Prefácio

O objetivo deste livro é demonstrar que softwares como o MATLAB podem ser utilizados para desenvolver integralmente, ou ao menos uma parte substancial, do estudo analítico de um determinado assunto. Especificamente no presente caso, serão estudadas as estruturas retificadoras, analisando o seu funcionamento, seus estágios de operação, suas principais formas de onda e as equações analíticas que permitem analisar o funcionamento, condições de operação e a realização do projeto dos componentes. O uso de softwares como o MATLAB pode trazer muitas vantagens para o estudo analítico de um assunto, como a possibilidade de automatizar cálculos complexos, a facilidade de visualização de resultados e a redução de erros humanos. Além disso, o uso de softwares pode economizar tempo e recursos, tendo em vista que muitas análises podem ser realizadas de forma mais rápida e precisa do que por meio de desenvolvimento manual. Ao longo deste livro, serão apresentados exemplos práticos de como utilizar o MATLAB para analisar as estruturas retificadoras, desde o seu funcionamento básico até a análise de questões mais específicas de sua operação. Serão abordados tópicos como o retificador monofásico de meia onda, o retificador monofásico de onda completa, bem como estes retificadores com alimentação trifásica. Com o conhecimento adquirido neste livro, espera-se que o leitor possa compreender melhor o funcionamento das estruturas retificadoras e ser capaz de analisá-las de forma mais precisa e eficiente. Além disso, espera-se que o leitor possa aplicar os conceitos aprendidos em outras áreas de estudo, utilizando o MATLAB como uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento de análises analíticas.

# Lista de Abreviaturas

| Abreviatura             | Significado                                                       |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\beta$                 | ângulo de extinção da corrente                                    |
| $\phi$                  | ângulo do fator de potência                                       |
| $\phi_n$                | ângulo do fator de potência da n-ésima harmônica                  |
| $\pi$                   | Pi, constante 3,1415...                                           |
| $\sigma_{1,2,3...}$     | partes das equações                                               |
| $\tau$                  | constante de tempo do circuito indutivo                           |
| $\theta_1$ e $\theta_2$ | ângulos de comutação do(s) diodo(s)                               |
| $\omega$                | frequência angular                                                |
| $a_0$                   | valor médio da forma de onda da série de Fourier                  |
| $a_n$                   | coeficiente da n-ésima harmônica dos cossenos da série de Fourier |
| $asin$                  | função trigonométrica arco-seno                                   |
| $atan, atan2$           | função trigonométrica arco-tangente                               |
| $b_n$                   | coeficiente da n-ésima harmônica dos senos da série de Fourier    |
| $cos$                   | função trigonométrica cosseno                                     |
| $D, D_1, D_2, \dots$    | diodo, diodo1, diodo2...                                          |
| $e$                     | função exponencial                                                |
| $E$                     | fonte de tensão constante                                         |
| $i_L$                   | corrente através da carga                                         |
| $i_{L,E1}(wt)$          | corrente através da carga durante a etapa um, em função do ângulo |
| $IL_0$                  | valor inicial da corrente                                         |
| $IL_s$                  | corrente elétrica no domínio da frequência                        |
| $L$                     | indutância                                                        |
| $n$                     | ordem da frequência harmônica                                     |
| $R$                     | resistência, carga resistiva                                      |
| $RE$                    | carga resistiva com fonte de tensão em série                      |
| $s$                     | frequência (no domínio da frequência)                             |
| $sen, sin$              | função trigonométrica seno                                        |
| $t$                     | tempo                                                             |
| $T$                     | período da forma de onda de corrente ou tensão                    |
| $tan$                   | função trigonométrica tangente                                    |
| $v(\omega t)$           | tensão senoidal em função do ângulo                               |
| $V_p$                   | tensão de pico                                                    |
| $V_{DMax}, I_{DMax}$    | tensão, corrente máxima sobre o diodo                             |
| $V_L$                   | tensão na carga                                                   |

|                      |                                                 |
|----------------------|-------------------------------------------------|
| $V_{LMed}, I_{LMed}$ | tensão, corrente média sobre a carga            |
| $V_{LRMS}, I_{LRMS}$ | tensão, corrente eficaz sobre a carga           |
| $V_o$                | valor eficaz da tensão                          |
| $X_L$                | reatância indutiva                              |
| $Z$                  | impedância da carga                             |
| $Z_n$                | impedância da carga na frequência harmônica $n$ |

# Lista de Figuras

|      |                                                                                                                                      |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Retificador monofásico de meia onda à diodo. . . . .                                                                                 | 19 |
| 1.2  | Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga resistiva. . . . .                                                             | 19 |
| 1.3  | Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo. . . . .                                                           | 20 |
| 1.4  | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                   | 20 |
| 1.5  | Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão. . . . .                                           | 24 |
| 1.6  | Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão. . . . .                     | 24 |
| 1.7  | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                   | 25 |
| 1.8  | Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva. . . . .                                                              | 30 |
| 1.9  | Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva. . . . .                                        | 31 |
| 1.10 | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                   | 31 |
| 1.11 | Formas de onda da corrente através da carga e de suas componentes. . . . .                                                           | 36 |
| 1.12 | Ângulo de extinção $\beta$ em função de $\phi$ [rad]. . . . .                                                                        | 37 |
| 1.13 | Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre. . . . .                                        | 42 |
| 1.14 | Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre. . . . .                  | 43 |
| 1.15 | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                   | 43 |
| 1.16 | Forma de onda da corrente através da carga para o MCD. . . . .                                                                       | 48 |
| 1.17 | Forma de onda da corrente através da carga para o MCC. . . . .                                                                       | 51 |
| 1.18 | Forma de onda da corrente através da carga para o MCD. . . . .                                                                       | 54 |
| 1.19 | Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga de fonte de corrente. . . . .                                                  | 68 |
| 1.20 | Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga I. . . . .                                               | 68 |
| 1.21 | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                   | 69 |
| 2.1  | Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo. . . . .                                                             | 73 |
| 2.2  | Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga R. . . . .                                                 | 74 |
| 2.3  | Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga R. . . . .                           | 74 |
| 2.4  | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                   | 75 |
| 2.5  | Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga resistiva e fonte de tensão. . . . .                       | 78 |
| 2.6  | Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga resistiva e fonte de tensão. . . . . | 79 |
| 2.7  | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                   | 79 |
| 2.8  | Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva. . . . .                                          | 85 |

|      |                                                                                                                                         |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.9  | Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva. . . . .                       | 85  |
| 2.10 | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                      | 85  |
| 2.11 | Forma de onda da corrente através da carga e de suas componentes. . . . .                                                               | 89  |
| 2.12 | Forma de onda da corrente através da carga. . . . .                                                                                     | 91  |
| 2.13 | Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre. . . . .                       | 96  |
| 2.14 | Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre. . . . . | 96  |
| 2.15 | Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga de fonte de corrente. . . . .                                 | 97  |
| 2.16 | Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga de fonte de corrente. . . . .           | 97  |
| 2.17 | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                      | 98  |
| 3.1  | Retificador monofásico de onda completa à diodo. . . . .                                                                                | 101 |
| 3.2  | Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga R. . . . .                                                                    | 102 |
| 3.3  | Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga R. . . . .                                              | 102 |
| 3.4  | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                      | 103 |
| 3.5  | Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga resistiva e fonte de tensão. . . . .                                          | 104 |
| 3.6  | Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga resistiva e fonte de tensão. . . . .                    | 105 |
| 3.7  | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                      | 105 |
| 3.8  | Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva. . . . .                                                             | 108 |
| 3.9  | Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva. . . . .                                       | 108 |
| 3.10 | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                      | 109 |
| 3.11 | Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre. . . . .                                       | 111 |
| 3.12 | Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre. . . . .                 | 111 |
| 3.13 | Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga de fonte de corrente. . . . .                                                 | 112 |
| 3.14 | Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga de fonte de corrente. . . . .                           | 113 |
| 3.15 | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                      | 113 |
| 4.1  | Retificador trifásico de meia onda à diodo. . . . .                                                                                     | 115 |
| 4.2  | Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga R. . . . .                                                                         | 116 |
| 4.3  | Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga R. . . . .                                                   | 116 |
| 4.4  | Formas de onda trifásicas. . . . .                                                                                                      | 117 |
| 4.5  | Tensões sobre os diodos. . . . .                                                                                                        | 120 |
| 4.6  | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                      | 122 |
| 4.7  | Fasores de tensão sobre os diodos. . . . .                                                                                              | 124 |
| 4.8  | Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão. . . . .                                               | 127 |
| 4.9  | Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão. . . . .                         | 127 |
| 4.10 | Principais formas de onda. . . . .                                                                                                      | 128 |

|      |                                                                                                                    |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.11 | Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva. . . . .                                             | 133 |
| 4.12 | Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva. . . . .                       | 134 |
| 4.13 | Principais formas de onda. . . . .                                                                                 | 134 |
| 4.14 | Forma de onda da corrente através da carga e de suas componentes. . . . .                                          | 139 |
| 4.15 | Forma de onda da corrente através da carga para o MCC . . . . .                                                    | 144 |
| 4.16 | Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre. . . . .                       | 148 |
| 4.17 | Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre. . . . . | 148 |
| 4.18 | Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga de fonte de corrente. . . . .                                 | 149 |
| 4.19 | Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga de fonte de corrente. . . . .           | 149 |
| 4.20 | Principais formas de onda. . . . .                                                                                 | 150 |
| 5.1  | Retificador trifásico de onda completa à diodo. . . . .                                                            | 155 |
| 5.2  | Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga R. . . . .                                                | 156 |
| 5.3  | Etapas de operação do retificador trifásico de onda completa à diodo com carga R. . . . .                          | 157 |
| 5.4  | Formas de onda trifásicas. . . . .                                                                                 | 158 |
| 5.5  | Diagrama fasorial . . . . .                                                                                        | 159 |
| 5.6  | Formas de onda das tensões de linha. . . . .                                                                       | 159 |
| 5.7  | Principais formas de onda. . . . .                                                                                 | 160 |
| 5.8  | Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga resistiva e fonte de tensão. . . . .                      | 163 |
| 5.9  | Principais formas de onda. . . . .                                                                                 | 164 |
| 5.10 | Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga indutiva. . . . .                                         | 169 |
| 5.11 | Principais formas de onda. . . . .                                                                                 | 170 |
| 5.12 | Forma de onda da corrente através da carga e de suas componentes. . . . .                                          | 174 |
| 5.13 | Forma de onda da corrente através da carga. . . . .                                                                | 178 |
| 5.14 | Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre. . . . .                   | 183 |
| 5.15 | Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga de fonte de corrente. . . . .                             | 183 |
| 5.16 | Principais formas de onda. . . . .                                                                                 | 185 |

# Lista de Tabelas

|     |                                       |     |
|-----|---------------------------------------|-----|
| 1.1 | Correspondência de variáveis. . . . . | 32  |
| 1.1 | Correspondência de variáveis. . . . . | 45  |
| 5.1 | Intervalos de condução. . . . .       | 158 |

# Conteúdo

|          |                                                                      |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Retificador Monofásico de Meia Onda à Diodo</b>                   | <b>19</b> |
| 1.1      | Carga R . . . . .                                                    | 19        |
| 1.1.1    | Topologia . . . . .                                                  | 19        |
| 1.1.2    | Etapas de operação . . . . .                                         | 20        |
| 1.1.3    | Formas de onda . . . . .                                             | 20        |
| 1.1.4    | Equações para o projeto . . . . .                                    | 21        |
| 1.1.5    | Exemplos numéricos . . . . .                                         | 23        |
| 1.2      | Carga RE . . . . .                                                   | 23        |
| 1.2.1    | Topologia . . . . .                                                  | 23        |
| 1.2.2    | Etapas de operação . . . . .                                         | 24        |
| 1.2.3    | Formas de onda . . . . .                                             | 24        |
| 1.2.4    | Equações para o projeto . . . . .                                    | 26        |
| 1.2.5    | Exemplos numéricos . . . . .                                         | 29        |
| 1.3      | Carga Indutiva RL . . . . .                                          | 30        |
| 1.3.1    | Topologia . . . . .                                                  | 30        |
| 1.3.2    | Etapas de operação . . . . .                                         | 30        |
| 1.3.3    | Formas de onda . . . . .                                             | 31        |
| 1.3.3.1  | Determinação da corrente através da carga, $i_L(t)$ . . . . .        | 31        |
| 1.3.3.2  | Ângulo de extinção $\beta$ em função do ângulo $\phi$ . . . . .      | 37        |
| 1.3.4    | Equações para o projeto . . . . .                                    | 37        |
| 1.3.5    | Exemplos numéricos . . . . .                                         | 40        |
| 1.4      | Carga RL com Diodo de Roda Livre . . . . .                           | 42        |
| 1.4.1    | Topologia . . . . .                                                  | 42        |
| 1.4.2    | Etapas de operação . . . . .                                         | 42        |
| 1.4.3    | Formas de onda . . . . .                                             | 43        |
| 1.4.3.1  | Análise preliminar para a corrente de carga . . . . .                | 44        |
| A.       | 1ª etapa . . . . .                                                   | 44        |
| B.       | 2ª etapa . . . . .                                                   | 45        |
| 1.4.3.2  | Corrente de carga para o modo de condução descontínua, MCD . . . . . | 47        |
| A.       | 1ª etapa . . . . .                                                   | 47        |
| B.       | 2ª etapa . . . . .                                                   | 48        |
| 1.4.3.3  | Corrente de carga para o modo de condução contínua, MCC . . . . .    | 48        |
| A.       | 1ª etapa . . . . .                                                   | 48        |
| B.       | 2ª etapa . . . . .                                                   | 50        |
| 1.4.3.4  | Análise através da utilização das séries de Fourier . . . . .        | 50        |
| 1.4.4    | Equações para o projeto . . . . .                                    | 53        |
| 1.4.4.1  | Tensão média através da carga, $V_{L\ Med}$ . . . . .                | 53        |
| 1.4.4.2  | Corrente média através da carga, $I_{L\ Med}$ . . . . .              | 54        |

|          |         |                                                                        |           |
|----------|---------|------------------------------------------------------------------------|-----------|
|          | A.      | MCD . . . . .                                                          | 54        |
|          | B.      | MCC . . . . .                                                          | 55        |
|          | 1.4.4.3 | Tensão eficaz através da carga, $V_{LRMS}$ . . . . .                   | 56        |
|          | 1.4.4.4 | Corrente eficaz através da carga, $I_{LRMS}$ . . . . .                 | 56        |
|          | A.      | MCD . . . . .                                                          | 56        |
|          | B.      | MCC . . . . .                                                          | 57        |
|          | 1.4.4.5 | Utilizando as séries de Fourier . . . . .                              | 58        |
|          | A.      | Corrente $I_{L\ Med}$ . . . . .                                        | 60        |
|          | B.      | Corrente $I_{LRMS}$ . . . . .                                          | 61        |
|          | 1.4.4.6 | Tensão máxima sobre o diodo, $V_{D\ Max}$ . . . . .                    | 61        |
|          | 1.4.4.7 | Corrente máxima através do diodo, $I_{D\ Max}$ . . . . .               | 61        |
|          | A.      | Modo de condução descontínua . . . . .                                 | 61        |
|          | B.      | Modo de condução contínua . . . . .                                    | 62        |
| 1.4.5    |         | Exemplos numéricos . . . . .                                           | 62        |
|          | 1.4.5.1 | Modo de condução descontínua, MCD . . . . .                            | 63        |
|          | A.      | Equações . . . . .                                                     | 63        |
|          | B.      | Grandezas . . . . .                                                    | 64        |
|          | C.      | Grandezas séries de Fourier . . . . .                                  | 65        |
|          | 1.4.5.2 | Modo de Condução Contínua, MCC . . . . .                               | 65        |
|          | A.      | Equações . . . . .                                                     | 66        |
|          | B.      | Grandezas . . . . .                                                    | 66        |
|          | C.      | Séries de Fourier . . . . .                                            | 67        |
|          | D.      | Grandezas pelas Séries de Fourier . . . . .                            | 68        |
| 1.5      |         | Carga I com Diodo de Roda-Livre . . . . .                              | 68        |
|          | 1.5.1   | Topologia . . . . .                                                    | 68        |
|          | 1.5.2   | Etapas de operação . . . . .                                           | 68        |
|          | 1.5.3   | Formas de onda . . . . .                                               | 69        |
|          | 1.5.4   | Equações para o projeto . . . . .                                      | 70        |
|          | 1.5.5   | Exemplos numéricos . . . . .                                           | 71        |
| 1.6      |         | Conclusão . . . . .                                                    | 72        |
| <b>2</b> |         | <b>Retificador Monofásico de Onda Completa com Ponto Médio à Diodo</b> | <b>73</b> |
| 2.1      |         | Carga R . . . . .                                                      | 73        |
|          | 2.1.1   | Topologia . . . . .                                                    | 73        |
|          | 2.1.2   | Etapas de operação . . . . .                                           | 74        |
|          | 2.1.3   | Formas de onda . . . . .                                               | 75        |
|          | 2.1.4   | Equações para o projeto . . . . .                                      | 75        |
|          | 2.1.5   | Exemplos numéricos . . . . .                                           | 77        |
| 2.2      |         | Carga RE . . . . .                                                     | 77        |
|          | 2.2.1   | Topologia . . . . .                                                    | 77        |
|          | 2.2.2   | Etapas de operação . . . . .                                           | 78        |
|          | 2.2.3   | Formas de onda . . . . .                                               | 78        |
|          | 2.2.4   | Equações para o projeto . . . . .                                      | 80        |
|          | 2.2.5   | Exemplos numéricos . . . . .                                           | 83        |
| 2.3      |         | Carga Indutiva RL . . . . .                                            | 84        |
|          | 2.3.1   | Topologia . . . . .                                                    | 84        |
|          | 2.3.2   | Etapas de operação . . . . .                                           | 84        |
|          | 2.3.3   | Formas de onda . . . . .                                               | 86        |

|          |                                                         |            |
|----------|---------------------------------------------------------|------------|
| 2.3.3.1  | Determinação de $i_L(t)$ . . . . .                      | 86         |
| 2.3.3.2  | Análise utilizando a série de Fourier . . . . .         | 89         |
| 2.3.4    | Equações para o projeto . . . . .                       | 92         |
| 2.3.5    | Exemplos numéricos . . . . .                            | 93         |
| 2.4      | Carga RL com diodo de Roda Livre . . . . .              | 95         |
| 2.4.1    | Topologia . . . . .                                     | 95         |
| 2.4.2    | Etapas de operação . . . . .                            | 95         |
| 2.4.3    | Formas de onda . . . . .                                | 96         |
| 2.4.4    | Equações para o projeto . . . . .                       | 96         |
| 2.4.5    | Exemplos numéricos . . . . .                            | 96         |
| 2.5      | Carga I com Diodo de Roda-Livre . . . . .               | 96         |
| 2.5.1    | Topologia . . . . .                                     | 96         |
| 2.5.2    | Etapas de operação . . . . .                            | 97         |
| 2.5.3    | Formas de onda . . . . .                                | 97         |
| 2.5.4    | Equações para o projeto . . . . .                       | 97         |
| 2.5.5    | Exemplos numéricos . . . . .                            | 99         |
| 2.6      | Conclusão . . . . .                                     | 100        |
| <b>3</b> | <b>Retificador Monofásico de Onda Completa em Ponte</b> | <b>101</b> |
| 3.1      | Carga R . . . . .                                       | 101        |
| 3.1.1    | Topologia . . . . .                                     | 101        |
| 3.1.2    | Etapas de operação . . . . .                            | 102        |
| 3.1.3    | Formas de onda . . . . .                                | 102        |
| 3.1.4    | Equações para o projeto . . . . .                       | 102        |
| 3.1.5    | Exemplos numéricos . . . . .                            | 103        |
| 3.2      | Carga RE . . . . .                                      | 104        |
| 3.2.1    | Topologia . . . . .                                     | 104        |
| 3.2.2    | Etapas de operação . . . . .                            | 104        |
| 3.2.3    | Formas de onda . . . . .                                | 105        |
| 3.2.4    | Equações para o projeto . . . . .                       | 105        |
| 3.2.5    | Exemplos numéricos . . . . .                            | 106        |
| 3.3      | Carga Indutiva RL . . . . .                             | 107        |
| 3.3.1    | Topologia . . . . .                                     | 107        |
| 3.3.2    | Etapas de operação . . . . .                            | 108        |
| 3.3.3    | Formas de onda . . . . .                                | 108        |
| 3.3.4    | Equações para o projeto . . . . .                       | 108        |
| 3.3.5    | Exemplos numéricos . . . . .                            | 108        |
| 3.4      | Carga RL com Diodo de Roda Livre . . . . .              | 111        |
| 3.4.1    | Topologia . . . . .                                     | 111        |
| 3.4.2    | Etapas de operação . . . . .                            | 111        |
| 3.4.3    | Formas de onda . . . . .                                | 111        |
| 3.4.4    | Equações para o projeto . . . . .                       | 111        |
| 3.4.5    | Exemplos numéricos . . . . .                            | 112        |
| 3.5      | Carga I com Diodo de Roda-Livre . . . . .               | 112        |
| 3.5.1    | Topologia . . . . .                                     | 112        |
| 3.5.2    | Etapas de operação . . . . .                            | 112        |
| 3.5.3    | Formas de onda . . . . .                                | 112        |
| 3.5.4    | Equações para o projeto . . . . .                       | 113        |

|          |                                                       |            |
|----------|-------------------------------------------------------|------------|
| 3.5.5    | Exemplos numéricos . . . . .                          | 114        |
| 3.6      | Conclusão . . . . .                                   | 114        |
| <b>4</b> | <b>Retificador Trifásico de Meia Onda à Diodo</b>     | <b>115</b> |
| 4.1      | Carga R . . . . .                                     | 115        |
| 4.1.1    | Topologia . . . . .                                   | 115        |
| 4.1.2    | Etapas de operação . . . . .                          | 116        |
| 4.1.2.1  | Condução dos diodos . . . . .                         | 117        |
| A.       | Condições de condução para o diodo $D_1$ . . . . .    | 119        |
| B.       | Condições de condução para o diodo $D_2$ . . . . .    | 119        |
| C.       | Condições de condução para o diodo $D_3$ . . . . .    | 120        |
| 4.1.2.2  | Determinação dos instantes de comutação . . . . .     | 121        |
| 4.1.3    | Formas de onda . . . . .                              | 122        |
| 4.1.4    | Equações para o projeto . . . . .                     | 122        |
| 4.1.5    | Exemplos numéricos . . . . .                          | 125        |
| 4.2      | Carga RE . . . . .                                    | 126        |
| 4.2.1    | Topologia . . . . .                                   | 126        |
| 4.2.2    | Etapas de operação . . . . .                          | 127        |
| 4.2.3    | Formas de onda . . . . .                              | 128        |
| 4.2.4    | Equações para o projeto . . . . .                     | 129        |
| 4.2.5    | Exemplos numéricos . . . . .                          | 132        |
| 4.3      | Carga Indutiva RL . . . . .                           | 133        |
| 4.3.1    | Topologia . . . . .                                   | 133        |
| 4.3.2    | Etapas de operação . . . . .                          | 133        |
| 4.3.3    | Formas de onda . . . . .                              | 134        |
| 4.3.3.1  | Determinação de $i_L(t)$ . . . . .                    | 134        |
| 4.3.3.2  | Análise utilizando a série de Fourier . . . . .       | 138        |
| 4.3.4    | Equações para o projeto . . . . .                     | 143        |
| 4.3.5    | Exemplos numéricos . . . . .                          | 146        |
| 4.4      | Carga RL com diodo de Roda Livre . . . . .            | 148        |
| 4.4.1    | Topologia . . . . .                                   | 148        |
| 4.4.2    | Etapas de operação . . . . .                          | 148        |
| 4.4.3    | Formas de onda . . . . .                              | 148        |
| 4.4.4    | Equações para o projeto . . . . .                     | 148        |
| 4.4.5    | Exemplos numéricos . . . . .                          | 149        |
| 4.5      | Carga I com Diodo de Roda-Livre . . . . .             | 149        |
| 4.5.1    | Topologia . . . . .                                   | 149        |
| 4.5.2    | Etapas de operação . . . . .                          | 149        |
| 4.5.3    | Formas de onda . . . . .                              | 150        |
| 4.5.4    | Equações para o projeto . . . . .                     | 150        |
| 4.5.5    | Exemplos numéricos . . . . .                          | 152        |
| 4.6      | Conclusão . . . . .                                   | 153        |
| <b>5</b> | <b>Retificador Trifásico de Onda Completa à Diodo</b> | <b>155</b> |
| 5.1      | Carga R . . . . .                                     | 155        |
| 5.1.1    | Topologia . . . . .                                   | 155        |
| 5.1.2    | Etapas de operação . . . . .                          | 155        |
| 5.1.3    | Formas de onda . . . . .                              | 157        |

|         |                                                 |     |
|---------|-------------------------------------------------|-----|
| 5.1.4   | Equações para o projeto . . . . .               | 159 |
| 5.1.5   | Exemplos numéricos . . . . .                    | 162 |
| 5.2     | Carga RE . . . . .                              | 162 |
| 5.2.1   | Topologia . . . . .                             | 162 |
| 5.2.2   | Etapas de operação . . . . .                    | 163 |
| 5.2.3   | Formas de onda . . . . .                        | 163 |
| 5.2.4   | Equações para o projeto . . . . .               | 165 |
| 5.2.5   | Exemplos numéricos . . . . .                    | 168 |
| 5.3     | carga indutiva RL . . . . .                     | 169 |
| 5.3.1   | Topologia . . . . .                             | 169 |
| 5.3.2   | Etapas de operação . . . . .                    | 169 |
| 5.3.3   | Formas de onda . . . . .                        | 169 |
| 5.3.3.1 | Determinação de $i_L(t)$ . . . . .              | 170 |
| 5.3.3.2 | Análise utilizando a Série de Fourier . . . . . | 174 |
| 5.3.4   | Equações para o projeto . . . . .               | 178 |
| 5.3.5   | Exemplos numéricos . . . . .                    | 180 |
| 5.4     | Carga RL com Diodo de Roda Livre . . . . .      | 182 |
| 5.4.1   | Topologia . . . . .                             | 182 |
| 5.4.2   | Etapas de operação . . . . .                    | 182 |
| 5.4.3   | Formas de onda . . . . .                        | 182 |
| 5.4.4   | Equações para o projeto . . . . .               | 183 |
| 5.4.5   | Exemplos numéricos . . . . .                    | 183 |
| 5.5     | Carga I com Diodo de Roda-Livre . . . . .       | 183 |
| 5.5.1   | Topologia . . . . .                             | 183 |
| 5.5.2   | Etapas de operação . . . . .                    | 184 |
| 5.5.3   | Formas de onda . . . . .                        | 184 |
| 5.5.4   | Equações para o projeto . . . . .               | 184 |
| 5.5.5   | Exemplos numéricos . . . . .                    | 187 |
| 5.6     | Conclusão . . . . .                             | 187 |

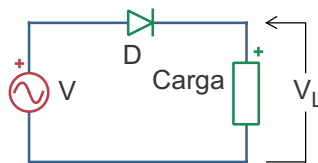
# Capítulo 1

## Retificador Monofásico de Meia Onda à Diodo

Este capítulo apresenta a análise dos retificadores de meia onda à diodo. Serão obtidas as equações fundamentais para cada modo de operação e serão apresentados os gráficos com as principais formas de onda. Também será explicado como ocorre a operação das topologias apresentadas.

A Fig. 1.1 ilustra o retificador monofásico de meia onda à diodo. Inicialmente, será realizada uma análise com carga puramente resistiva ( $R$ ). Em seguida, serão introduzidas diferentes cargas e serão analisados seus efeitos na operação do retificador.

Figura 1.1. Retificador monofásico de meia onda à diodo.

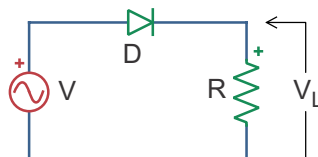


### 1.1 Carga R

#### 1.1.1 Topologia

O retificador mostrado na Fig. 1.2 é formado por uma fonte de tensão ( $V$ ), um diodo ( $D$ ) e pela carga  $R$ . Todos os componentes estão conectados em série.

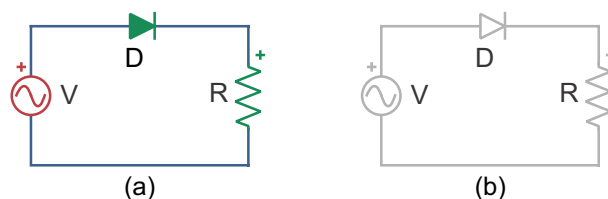
Figura 1.2. Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga resistiva.



### 1.1.2 Etapas de operação

Para esta topologia, quando a carga é puramente resistiva, o diodo conduz durante o semiciclo positivo (Fig. 1.3(a)) e bloqueia durante o semiciclo negativo (Fig. 1.3(b)). Dessa forma, durante o semiciclo positivo é aplicada a tensão da fonte de entrada sobre a Carga R enquanto a corrente elétrica flui através da mesma. A tensão através da carga é nula durante o semiciclo negativo porque no decorrer deste semiciclo o diodo se encontra reversamente polarizado e assim não circula nenhuma corrente através da mesma.

Figura 1.3. Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo.

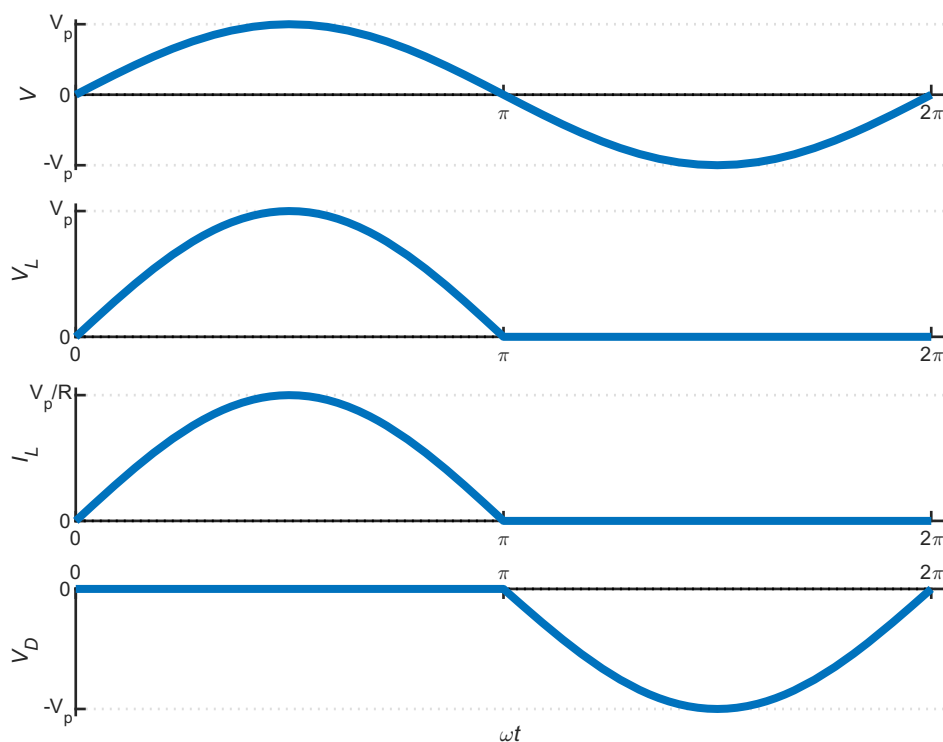


### 1.1.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 1.4, a seguir. Observa-se que a tensão e a corrente através da carga são proporcionais, sendo sempre positivas. No semiciclo negativo o diodo se encontra bloqueado e ambas grandezas são nulas.

1 `Figura_WF_1pulso_para_carga_R();`

Figura 1.4. Principais formas de onda.



### 1.1.4 Equações para o projeto

A tensão de alimentação é dada por:

$$v(\omega t) = V_p \text{sen}(\omega t) [V] \quad (1.1)$$

onde

$V_p$  é a tensão de pico; e

$\omega$  é a frequência angular.

Durante o semiciclo positivo a fonte de entrada está conectada à carga. Como a corrente é nula durante o semiciclo negativo, a tensão através da carga é nula. Dessa forma,

$$v_L(\omega t) = \begin{cases} V_p \text{sen}(\omega t) & 0 \leq \omega t < \pi \\ 0 & \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases} \quad (1.2)$$

A corrente é proporcional à tensão, pois a carga é puramente resistiva:

$$i_L(\omega t) = \frac{v_L(\omega t)}{R} \quad (1.3)$$

A tensão média sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\text{Med}} := \frac{1}{T} \int_0^T v(\omega t) d(\omega t) \quad (1.4)$$

Esta equação pode ser desenvolvida, tendo em vista que a tensão sobre a carga corresponde à tensão de alimentação durante o semiciclo positivo e é nula durante o negativo, conforme a Fig. 1.4.

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi V_p \text{sen}(\omega t) d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} (0) d(\omega t) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V_p \text{sen}(\omega t) d(\omega t) \quad (1.5)$$

```
1 syms V_p wt
2 V_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,pi)
```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{V_p}{\pi} \quad (1.6)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```
1 I_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt)/R,wt,0,pi)
```

$$I_{L\ Med} = \frac{V_p}{R\pi} \quad (1.7)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\ RMS} := \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (v(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (1.8)$$

Assim, de maneira semelhante, como a tensão da carga corresponde à tensão de alimentação durante o semiciclo positivo e é nula durante o semiciclo negativo, tem-se

$$V_{L\ RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (1.9)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/(2*pi)*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,pi))
```

$$V_{L\ RMS} = 0.5 V_p \quad (1.10)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```
1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(1/(2*pi)*int((V_p*sin(wt)/R)^2,wt,0,pi))
```

$$I_{L\ RMS} = \frac{0.5 V_p}{R} \quad (1.11)$$

A tensão máxima sobre o diodo corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação.

$$V_{D\ Max} = V_p$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\ Max} = V_p \quad (1.12)$$

E a corrente máxima é proporcional à tensão máxima,

$$I_{D\ Max} = V_p/R$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{D\ Max} = \frac{V_p}{R} \quad (1.13)$$

### 1.1.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir. Serão utilizadas as equações 1.6, 1.7, 1.10, 1.11, 1.12 e 1.13, desenvolvidas na seção 1.1.4.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3
4 V_LMed = V_p/pi
```

$$V_{L\ Med} = 99.0348$$

```
1 I_LMed = V_p/(R*pi)
```

$$I_{L\ Med} = 9.9035$$

```
1 V_LRMS = 0.5*V_p
```

$$V_{L\ RMS} = 155.5635$$

```
1 I_LRMS = (0.5*V_p)/R
```

$$I_{L\ RMS} = 15.5563$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\ Max} = 311.1270$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{D\ Max} = 31.1127$$

## 1.2 Carga RE

### 1.2.1 Topologia

Esta topologia é semelhante à topologia analisada na seção 1.1, exceto que a carga é formada por uma resistência em série com uma fonte de tensão de valor  $E$ , conforme ilustrado na Fig. 1.5.

$$V_p > E$$

Figura 1.5. Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.

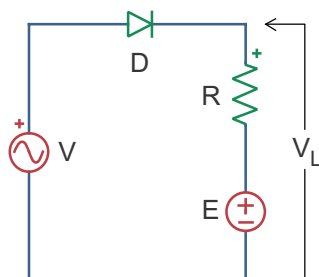
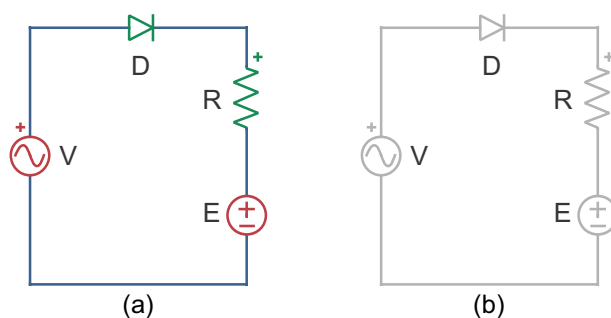


Figura 1.6. Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.



### 1.2.2 Etapas de operação

Para esta topologia, o diodo  $D$  conduz quando a tensão da fonte de entrada  $V(\omega t)$ , for maior que a tensão da fonte  $E$  (Fig. 1.6(a)). Caso contrário, este diodo se encontra bloqueado e assim não há corrente através da carga de forma que não há nenhuma queda de tensão sobre a resistência  $R$  (Fig. 1.6(b)). Portanto, quando o diodo não está conduzindo, a tensão  $V_L(\omega t)$  será igual a  $E$ .

Os circuitos equivalentes são mostrados na Fig. 1.6.

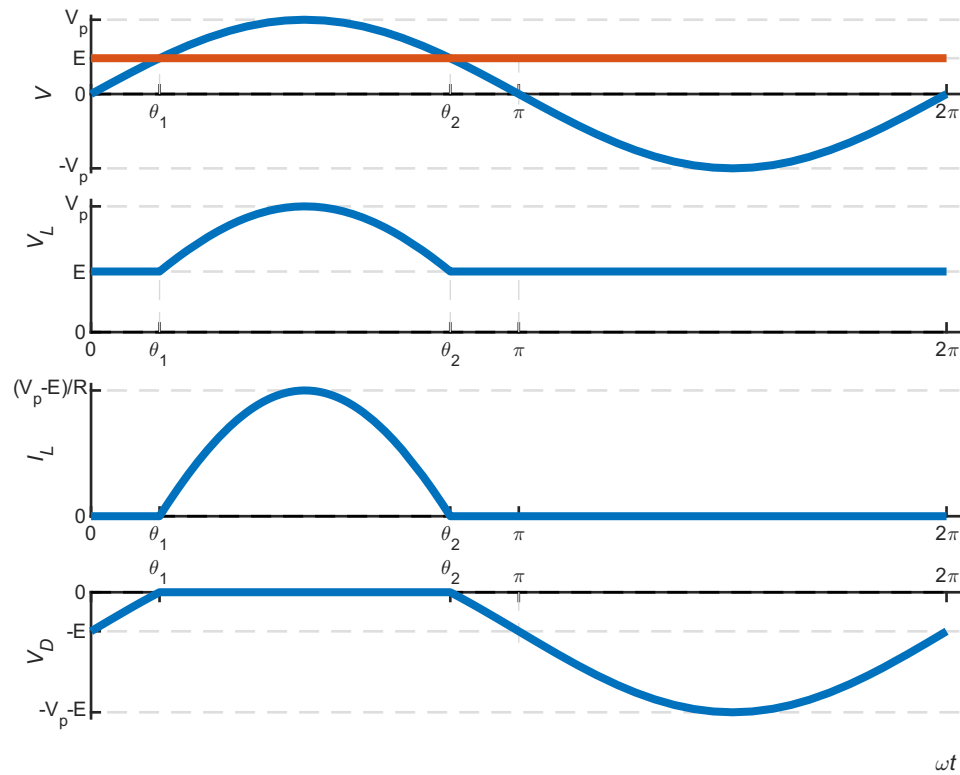
### 1.2.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 1.7. Observa-se que as interseções entre as formas de onda  $V(\omega t)$  e  $E$  ocorrem para os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . A tensão na carga é sempre igual ou superior à tensão da fonte  $E$ . A corrente através da carga é proporcional à tensão sobre a resistência  $R$ .

1 Figura\_WF\_1pulso\_para\_carga\_RE()

Primeiramente devem ser determinadas as interseções entre as formas de onda das duas fontes. A tensão da fonte  $E$  deverá ser inferior ao pico de tensão da fonte de alimentação  $V$  para que as interseções ocorram.

Figura 1.7. Principais formas de onda.



```

1 clearvars
2 syms V_p wt E R
3
4 % Exemplos de valores de grandezas
5 % Vp = sqrt(2)*220;
6 % f = 60;
7 % omega = 2*pi*f;
8 % Va = Vp*sin(omega*t);
9 % E = 100;
10 % R = 10;
11
12 eq = V_p*sin(wt) == E;
13
14 thetas = solve(eq,wt)

```

$$\theta_{1,2} = \left[ \begin{array}{c} \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \\ \pi - \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \end{array} \right] \quad (1.14)$$

```
1 theta_1 = thetas(1)
```

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \quad (1.15)$$

```
1 theta_2 = thetas(2)
```

$$\theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \quad (1.16)$$

O diodo estará no estado de condução entre os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , aplicando a tensão da fonte de entrada à carga.

Dessa forma, a tensão através da carga é dada por:

$$v_L(\omega t) = \begin{cases} E & 0 \leq \omega t < \theta_1 \\ V_p \sin(\omega t) & \theta_1 \leq \omega t < \theta_2 \\ E & \theta_2 \leq \omega t < 2\pi \end{cases} \quad (1.17)$$

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os ângulos de interseção entre as formas de onda de  $V$  e  $E$ , conforme já comentado.

A corrente através da carga pode ser obtida através da tensão sobre a resistência. Dessa forma,

$$V_R(\omega t) = \frac{v(\omega t) - E}{R}$$

### 1.2.4 Equações para o projeto

Como visto, os instantes de comutação influem no funcionamento do conversor. Desta forma, utilizam-se os valores de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  para o projeto deste retificador.

A tensão média sobre a carga pode ser obtida através de

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\theta_1} E d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{2\pi} E d(\omega t) \right] \quad (1.18)$$

Que pode ser simplificada para

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{0+\theta_2}^{\theta_1+2\pi} E d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (1.19)$$

Assim,

```
1 syms wt theta_1 theta_2
2
3 V_LMed = 1/(2*sym('pi'))*(int(V_p*sin(wt),wt,theta_1,theta_2)+...
4 int(E,wt,theta_2,2*sym('pi')+theta_1))
```

$$V_{L\ Med} = \frac{0.5 (E (2\pi + \theta_1 - \theta_2) + V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)))}{\pi} \quad (1.20)$$

Obtém-se então a tensão média sobre a resistência para calcular a corrente através da mesma. A tensão média sobre R corresponde à

$$V_{R\ Med} = V_{L\ Med} - E$$

durante o período compreendido entre  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Assim,

$$V_{R\ Med} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (V_p \sin(\omega t) - E) d(\omega t) \quad (1.21)$$

```
1 V_RMed = 1/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E),wt,theta_1,theta_2)
```

$$V_{R\ Med} = \frac{0.5 (V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E (\theta_1 - \theta_2))}{\pi}$$

$I_{L\ Med}$  é proporcional à  $V_{R\ Med}$ . Dessa forma

```
1 I_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E)/R,wt,theta_1,theta_2)
```

$$I_{L\ Med} = \frac{0.5 \left( \frac{V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))}{R} + \frac{E (\theta_1 - \theta_2)}{R} \right)}{\pi}$$

```
1 I_LMed = simplifyFraction(I_LMed)
```

$$I_{L\ Med} = \frac{0.5 (E \theta_1 - E \theta_2 + V_p \cos(\theta_1) - V_p \cos(\theta_2))}{R \pi}$$

```
1 %I_LMed = simplify(I_LMed)
2 I_LMed = collect(I_LMed, {'E', 'V_p', 'R'})
```

$$I_{L\ Med} = \frac{V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E (\theta_1 - \theta_2)}{2 R \pi} \quad (1.22)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\ RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\theta_1} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p (\sin(\omega t))^2 d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{2\pi} E^2 d(\omega t) \right]} \quad (1.23)$$

Que como visto anteriormente, pode ser simplificada para

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left[ \int_{\theta_1+\theta_2}^{\theta_1+2\pi} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p^2 (\sin(\omega t))^2 d(\omega t) \right]} \quad (1.24)$$

```

1 syms V_p wt, assume([V_p, sym('pi')], 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*(int((V_p*sin(wt))^2,wt,theta_1,theta_2)+...
3 int((E)^2,wt,theta_2,2*sym('pi')+theta_1)))

```

$$V_{LRMS} = \frac{\sqrt{0.5 E^2 (2\pi + \theta_1 - \theta_2) - 0.1250 V_p^2 (2\theta_1 - 2\theta_2 - \sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2))}}{\pi^{0.5}} \quad (1.25)$$

```

1 V_RRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E)^2,wt,theta_1,theta_2));
2 MostrarEquacoesLongas(V_RRMS,[2,1])

```

$$V_{RRMS} = \frac{\sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8}}{\pi^{0.5}} \quad (1.26)$$

onde:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 0.1250 V_p^2 \sin(2\theta_1) \\
\sigma_2 &= -0.1250 V_p^2 \sin(2\theta_2) \\
\sigma_3 &= -0.5 E^2 \theta_1 \\
\sigma_4 &= 0.5 E^2 \theta_2 \\
\sigma_5 &= -0.2500 V_p^2 \theta_1 \\
\sigma_6 &= 0.2500 V_p^2 \theta_2 \\
\sigma_7 &= -E V_p \cos(\theta_1) \\
\sigma_8 &= E V_p \cos(\theta_2)
\end{aligned}$$

Como a corrente através do circuito auxiliar é proporcional à tensão sobre o resistor,

```

1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sym('V_RRMS')/R

```

$$I_{LRMS} = \frac{V_{RRMS}}{R} \quad (1.27)$$

A tensão máxima sobre o diodo corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação acrescida da fonte E.

$$V_{DMax} = V_p + E$$

```

1 V_DMax = V_p + E

```

$$V_{DMax} = E + V_p \quad (1.28)$$

E a corrente máxima,

$$I_{DMax} = (V_p - E)/R$$

```

1 I_DMax = (V_p - E)/R

```

$$I_{DMax} = -\frac{E - V_p}{R} \quad (1.29)$$

### 1.2.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, conforme as equações 1.20, 1.22, 1.25, 1.27, 1.28 e 1.29.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 f = 60;
4 E = 150;
5 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 theta_1 = asin(E/V_p)
```

$$\theta_1 = 0.5031$$

```
1 theta_2 = pi - asin(E/V_p)
```

$$\theta_2 = 2.6385$$

```
1 V_LMed = (0.5*(E*(2*pi + theta_1 - theta_2) + V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2))))/pi
```

$$V_{LMed} = 185.7849$$

```
1 I_LMed = (V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)) + E*(theta_1 - theta_2))/(2*R*pi)
```

$$I_{LMed} = 3.5785$$

```
1 V_LRMS = sqrt(0.5*E^2*(2*pi + theta_1 - theta_2) - ...
2 0.1250*V_p^2*(2*theta_1 - 2*theta_2 - sin(2*theta_1) + ...
3 sin(2*theta_2)))/pi^0.5
```

$$V_{LRMS} = 194.4478$$

```
1 sigma1 = 0.125*V_p^2*sin(2*theta_1);
2 sigma2 = -0.125*V_p^2*sin(2*theta_2);
3 sigma3 = -0.5*E^2*theta_1;
4 sigma4 = 0.5*E^2*theta_2;
5 sigma5 = -0.25*V_p^2*theta_1;
6 sigma6 = 0.25*V_p^2*theta_2;
7 sigma7 = -E*V_p*cos(theta_1);
8 sigma8 = E*V_p*cos(theta_2);
9 V_RRMS = sqrt(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + sigma6 + sigma7 + sigma8)/
  pi^0.5
```

$$V_{RRMS} = 67.6349$$

$$1 \quad I_{LRMS} = V_{RRMS}/R$$

$$I_{LRMS} = 6.7635$$

$$1 \quad V_{DMax} = V_p + E$$

$$V_{DMax} = 461.1270$$

$$1 \quad I_{DMax} = (V_p - E)/R$$

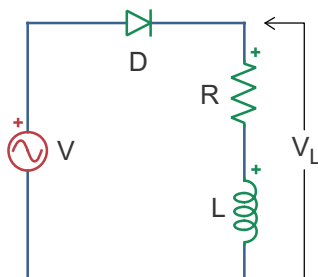
$$I_{DMax} = 16.1127$$

## 1.3 Carga Indutiva RL

### 1.3.1 Topologia

Este retificador é idêntico àquele da seção 1.1. No entanto, sua carga apresenta um comportamento indutivo, sendo formada por um resistor e por um indutor conectados em série, conforme a Fig. 1.8.

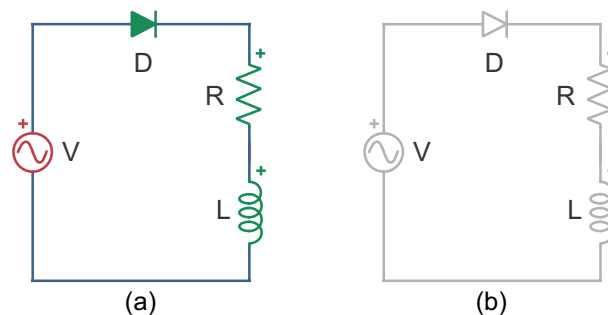
Figura 1.8. Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva.



### 1.3.2 Etapas de operação

Conforme comentado, a carga desta topologia é composta por uma indutância em série com uma resistência de modo que a mesma apresenta uma característica indutiva. Dessa forma, o comportamento do circuito é alterado em relação ao circuito estudado na seção 1.1. O diodo permanecerá em condução enquanto a corrente através do mesmo for positiva (Fig. 1.9(a)). No momento em que a sua corrente se anular, o diodo irá bloquear e quando isto ocorre não será mais possível aplicar a tensão da fonte  $V(\omega t)$  à carga formada pelo conjunto resistor e indutor, (Fig. 1.9(b)), de modo que a corrente através da carga permanecerá nula até o início do próximo ciclo.

Figura 1.9. Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva.

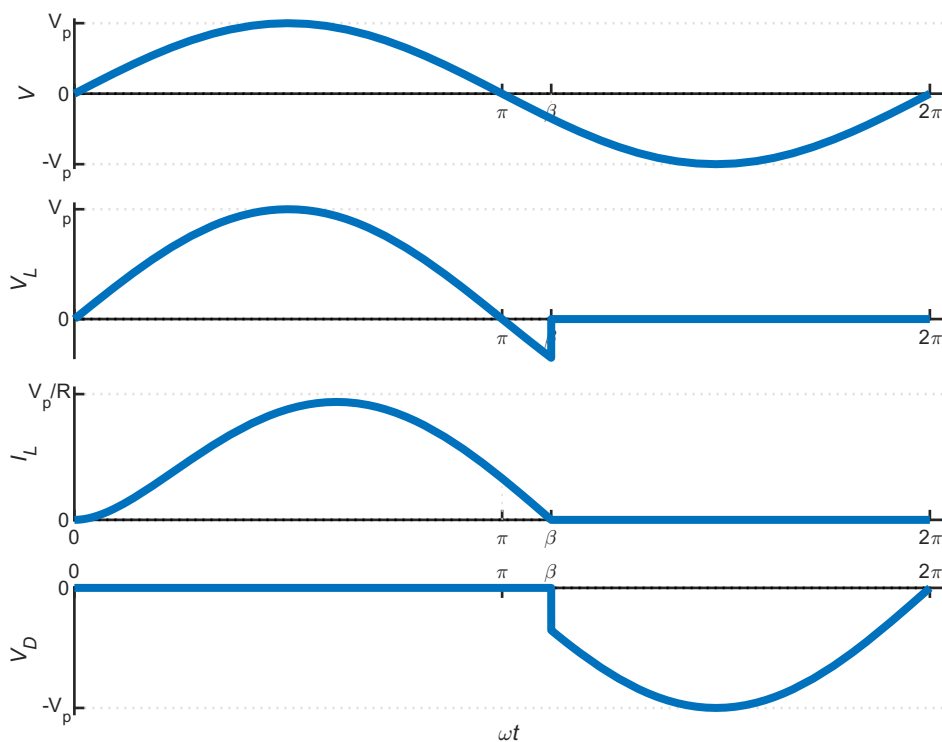


### 1.3.3 Formas de onda

As principais formas de onda podem ser vistas na Fig. 1.10, a seguir. Observa-se que a corrente se anula quando  $\omega t = \beta$ . Durante o intervalo entre os ângulos  $\pi$  e  $\beta$  é aplicada tensão negativa sobre a carga, reduzindo o seu valor médio e assim a potência que pode ser transferida para a mesma.

1 Figura\_WF\_1pulso\_para\_carga\_RL();

Figura 1.10. Principais formas de onda.



#### 1.3.3.1 Determinação da corrente através da carga, $i_L(t)$

O procedimento para a determinação de  $i_L(t)$  consta da aplicação da lei das tensões de Kirchhoff (LTK) ao laço formado pela fonte, diodo e carga, e então, da resolução da equação diferencial obtida.

Tabela 1.1. Correspondência de variáveis.

| Definição original               |                              | Substituição      |              |
|----------------------------------|------------------------------|-------------------|--------------|
| Código                           | Visualização                 | Código            | Visualização |
| <code>laplace(i_L(t),t,s)</code> | $\text{laplace}(i_L(t),t,s)$ | <code>IL_s</code> | $IL_s$       |
| <code>i_L(0)</code>              | $i_L(0)$                     | <code>IL_0</code> | $IL_0$       |

Inicialmente necessita-se definir algumas variáveis simbólicas para obter a corrente através do indutor.

```

1 % V_o — tensão eficaz da fonte de alimentação
2 % V_p — tensão de pico da fonte de alimentação
3 % omega — frequência angular da fonte de alimentação
4 % R — resistência da carga
5 % L — indutância da carga
6 % i_L(t) — corrente através da carga no domínio do tempo
7 % t — tempo no domínio do tempo
8 % s — frequência no domínio da frequência
9
10 % inicialização
11 clearvars
12 syms V_o omega R L t i_L(t) s V_p

```

A tensão aplicada ao circuito é definida por

```

1 %V = sqrt(2)*V_o*sin(w*t)
2 V = V_p*sin(omega*t)

```

$$V = V_p \sin(\omega t)$$

Aplicando a LTK à malha do circuito da Fig. 1.11 se obtém:

```

1 % LTK: -V + V_R + V_L == 0
2 eq = -V + R*i_L + L*diff(i_L,t) == 0

```

$$eq(t) = L \frac{\partial}{\partial t} i_L(t) - V_p \sin(\omega t) + R i_L(t) = 0 \quad (1.30)$$

Empregando a transformada de Laplace,

```

1 Leq = laplace(eq)

```

$$Leq = R \text{laplace}(i_L(t), t, s) - L(i_L(0) - s \text{laplace}(i_L(t), t, s)) - \frac{V_p \omega}{\omega^2 + s^2} = 0$$

A seguir, substitui-se a transformada de Laplace da corrente através da malha,  $\text{laplace}(I_L(t), t, s)$ , por  $IL_s$  e o valor inicial desta corrente  $i_L(0)$  por  $IL_0$  para facilitar a obtenção de  $I_L(s)$  que é a corrente através da malha no domínio da frequência, conforme a tabela 1.1.

```
1 syms IL_s IL_0 I_L(s) Z X_L beta phi tau
2 Leq = subs(Leq,{laplace(i_L(t), t, s), i_L(0)},{IL_s, IL_0})
```

$$Leq = IL_s R - L (IL_0 - IL_s s) - \frac{V_p \omega}{\omega^2 + s^2} = 0$$

Então isola-se  $I_L(s)$

```
1 IL_s = solve(Leq,IL_s)
```

$$IL_s = \frac{IL_0 L + \frac{V_p \omega}{\omega^2 + s^2}}{R + L s}$$

Calcula-se a transformada inversa de Laplace para retornar a equação para o domínio do tempo.

```
1 i_L(t) = ilaplace(IL_s,t)
```

$$i_L(t) = \frac{R V_p \sin(\omega t) - L V_p \omega \cos(\omega t)}{L^2 \omega^2 + R^2} + \frac{e^{-\frac{R}{L}t} (IL_0 L^2 \omega^2 + V_p L \omega + IL_0 R^2)}{L^2 \omega^2 + R^2}$$

Define-se a constante de tempo do circuito LR,

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (1.31)$$

e a reatância indutiva,

$$X_L = \omega L \quad (1.32)$$

substitui-se:

- $R/L$  por  $1/\tau$ ;
- $\omega L$  por  $X_L$  e;
- $X_L^2 + R^2$  por  $Z^2$ , onde  $Z$  é a impedância do circuito.

```
1 i_L(t) = subs(i_L(t),(R/L),1/tau);
2 i_L(t) = subs(i_L(t),(omega*L),X_L);
3 i_L(t) = subs(i_L(t),(X_L^2 + R^2),Z^2)
```

$$i_L(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} (IL_0 R^2 + IL_0 X_L^2 + V_p X_L)}{Z^2} - \frac{V_p X_L \cos(\omega t) - R V_p \sin(\omega t)}{Z^2}$$

Novamente substitui-se  $R^2 + X_L^2 = Z^2$ , porém multiplicados por  $IL_0$ .

```
1 i_L(t) = subs(i_L(t), IL_0*R^2 + IL_0*X_L^2, IL_0*Z^2)
```

$$i_L(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} (IL_0 Z^2 + V_p X_L)}{Z^2} - \frac{V_p X_L \cos(\omega t) - R V_p \sin(\omega t)}{Z^2}$$

Da trigonometria tem-se que

$$A \sin(x) + B \cos(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x - \phi)$$

onde

$$\phi = \text{atan}(A/B) \quad (1.33)$$

Dessa forma, pode-se executar a seguinte substituição

$$V_p R \sin(\omega) - V_p X_L \cos(\omega) = V_p \sqrt{R^2 + X_L^2} \sin(\omega - \phi) = V_p Z \sin(\omega - \phi)$$

```
1 i_L(t) = subs(i_L(t), (V_p*R*sin(omega*t) - V_p*X_L*cos(omega*t)), V_p*Z*sin(omega*t-phi))
```

$$i_L(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} (IL_0 Z^2 + V_p X_L)}{Z^2} - \frac{V_p \sin(\phi - \omega t)}{Z}$$

Considerando-se o triângulo das impedâncias, percebe-se que

$$\sin(\phi) = \frac{X_L}{Z}$$

Então substitui-se  $X_L$  por  $Z \sin(\phi)$

```
1 i_L(t) = subs(i_L(t), (X_L), Z*sin(phi))
```

$$i_L(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} (IL_0 Z^2 + V_p \sin(\phi) Z)}{Z^2} - \frac{V_p \sin(\phi - \omega t)}{Z}$$

Reescrevendo  $i_L(t)$

```
1 i_L(t) = collect(i_L, {'Z', 'V_p'})
```

$$i_L(t) = -\frac{V_p (\sin(\phi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\phi)) - IL_0 Z e^{-\frac{t}{\tau}}}{Z} \quad (1.34)$$

Que pode ser escrita em função do ângulo, fazendo-se

$$t = \frac{wt}{\omega}.$$

```
1 syms wt omega
2 i_L(wt) = subs(i_L(t),{omega*t, t},{wt, wt/omega})
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z} \quad (1.35)$$

onde

- $wt$  é o ângulo da senoide da fonte de alimentação e corresponde ao produto entre  $\omega$  e  $t$ .
- $\omega$  é a frequência angular,  $\omega = 2\pi f$ .

$\omega$  é a mesma variável nos dois casos, sendo escrita de maneira diferente apenas para permitir que o ângulo  $wt$  seja escrito explicitamente ( $w = \omega$ ).

Como a corrente inicial através do indutor é nula,

$$i_L(0) = 0$$

Executando-se esta substituição,

```
1 i_L(wt) = subs(i_L(wt), IL_0, 0)
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right)}{Z} \quad (1.36)$$

Assim é obtida a equação da corrente através do indutor. Observa-se na Fig. 1.11 que a corrente cresce gradualmente, atinge o seu valor máximo, decresce até zero e circularia no circuito no sentido oposto, o que não é permitido pelo diodo em série com a carga que bloqueia esta corrente no momento que a mesma iria se tornar negativa.

```
1 Figura_IL_1pulso_para_carga_RL();
```

$IL_0$  não foi substituída por zero na equação 1.35 pois a mesma será utilizada na seção 1.4.

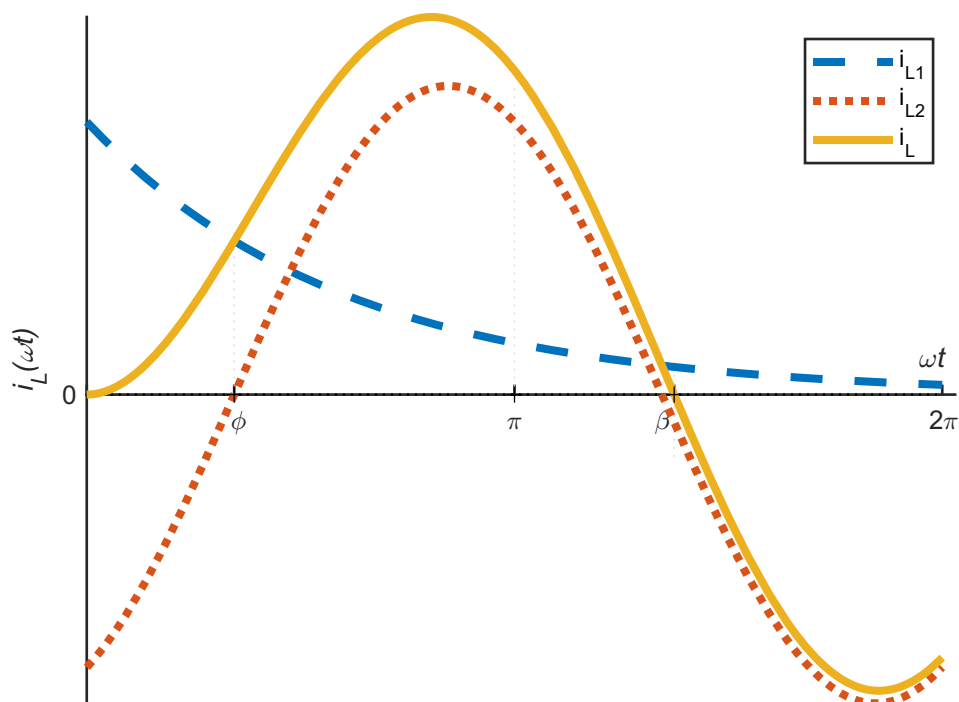
Na Fig. 1.11 é mostrada a forma de onda da corrente  $i_L(\omega t)$  e as formas de onda das componentes ( $i_{L1}(\omega t)$  e  $i_{L2}(\omega t)$ ) que somadas compõem a corrente através do circuito. Nesta figura,  $i_{L1}(\omega t)$  é o termo exponencial e  $i_{L2}(\omega t)$  corresponde ao termo senoidal.

$$i_L(\omega t) = i_{L1}(\omega t) + i_{L2}(\omega t)$$

Dessa forma, o próximo passo é determinar o ângulo para o qual a corrente se anula, denominado ângulo de extinção,  $\beta$ .

Sabendo-se que a corrente de carga se anula para o ângulo  $\beta$ , ou seja, para  $wt = \beta$  tem-se  $i_L(0) = 0$ .

Figura 1.11. Formas de onda da corrente através da carga e de suas componentes.



Fazendo  $\omega t = \beta$ ,

```
1 eq = i_L(beta) == 0
```

$$eq = \frac{V_p \left( \sin(\beta - \phi) + e^{-\frac{\beta}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right)}{Z} = 0$$

Que pode ser simplificada multiplicando-se ambos os lados da equação por  $Z/V_p$

```
1 eq = eq*Z/V_p
```

$$eq = \sin(\beta - \phi) + e^{-\frac{\beta}{\omega\tau}} \sin(\phi) = 0 \quad (1.37)$$

Como não há solução algébrica para a equação 1.37, pode-se traçar um gráfico de  $\beta$  em função de  $\phi$ . É importante observar que  $\phi$  pode ser determinado em função da frequência, da indutância e da resistência.

$$\phi = \text{atan}(X_L/R)$$

```
1 phi = atan2(X_L,R)
```

$$\phi = \text{atan2}(X_L, R) \quad (1.38)$$

Para a solução numérica, o palpite inicial para buscar o valor de beta deve situar-se entre  $\pi$  e  $2\pi$ .

Por exemplo:

```
1 % syms beta
2 % beta = vpasolve(sin(beta - phi) + exp((-beta/(tau*w)))*sin(phi) == 0, beta, pi)
```

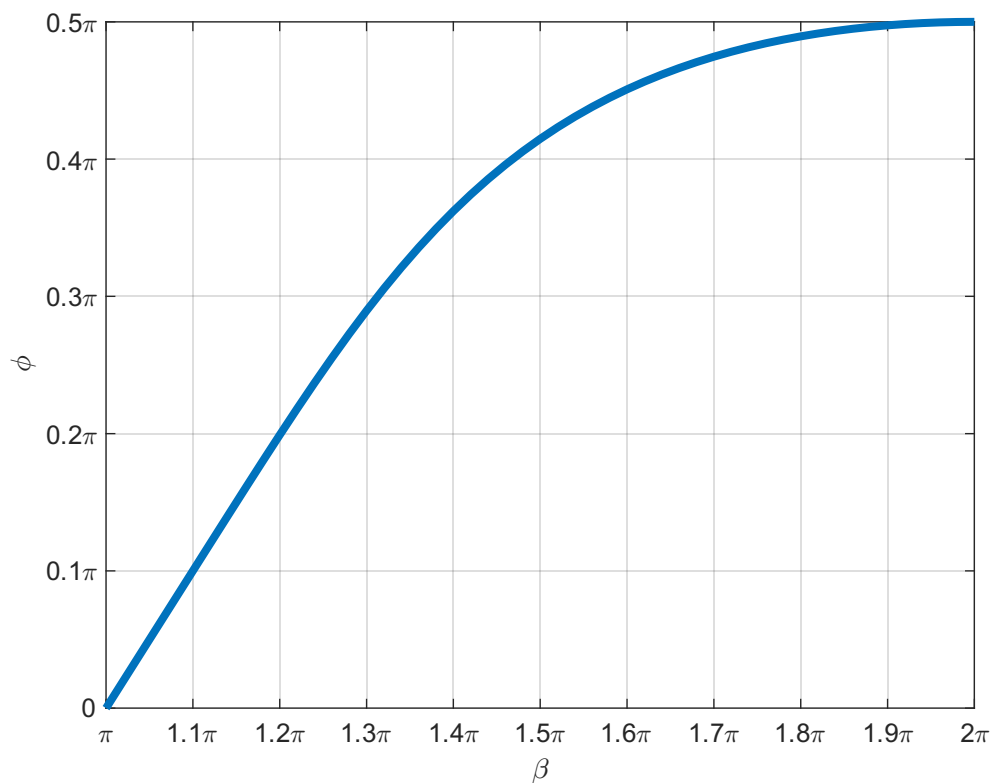
### 1.3.3.2 Ângulo de extinção $\beta$ em função do ângulo $\phi$

Na Fig. 1.12 é traçado um gráfico que permite a determinação do ângulo de extinção  $\beta$  em função do ângulo de deslocamento  $\phi$ . Observa-se que  $\beta$  varia entre  $\pi$  e  $2\pi$ , sendo sempre superior ao ângulo em que a corrente se anula para um circuito com carga puramente resistiva e menor que  $2\pi$  porque a tensão média sobre a carga não pode ser negativa neste caso. Por sua vez  $\phi$  varia entre 0 e  $\pi$ , que é a faixa de variação do ângulo do fator de potência.

```
1 Figura_Angulo_Extincao_Beta_Um_Pulso();
```

Dessa forma, calcula-se  $\phi$  através de 1.38 e determina-se  $\beta$  com o auxílio do gráfico da Fig. 1.12.

Figura 1.12. Ângulo de extinção  $\beta$  em função de  $\phi$  [rad].



### 1.3.4 Equações para o projeto

Tendo determinado  $\beta$ , a tensão média sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\ Med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\beta V_p \sin(\omega t) d(\omega t)$$

```
1 syms V_p wt
2 V_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,beta)
```

$$V_{L\ Med} = -\frac{0.5 V_p (\cos(\beta) - 1)}{\pi} \quad (1.39)$$

A tensão média através do indutor é nula pois, caso contrário a corrente através deste indutor decresceria ou cresceria com o passar dos ciclos. Assim,

$$V_{R\text{Med}} = V_{L\text{Med}}$$

Dessa forma, a corrente através do circuito é proporcional à tensão  $v_L(\omega t)$  e assim à  $V_{L\text{Med}}$ .

```
1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt)/R,wt,0,beta)
```

$$I_{L\text{Med}} = -\frac{0.5 V_p (\cos(\beta) - 1)}{R \pi} \quad (1.40)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\beta (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (1.41)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,beta))
```

$$V_{LRMS} = \frac{V_p \sqrt{0.2500 \beta - 0.1250 \sin(2\beta)}}{\pi^{0.5}} \quad (1.42)$$

A corrente eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$I_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\beta \left( -\frac{V_p}{Z} (\sin(\phi - \omega t) - e^{-t/\tau} \sin(\phi)) \right)^2 d(\omega t)}$$

```
1 %clearvars
2 syms V_p phi wt w tau Z beta, assume([V_p, Z], 'positive')
3 i_Lt = - (V_p*(sin(phi - wt) - exp((-wt/(w*tau)))*sin(phi)))/Z;
4 I_LRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*int((i_Lt)^2,wt,0,beta));
5 MostrarEquacoesLongas(I_LRMS, [4, 1]);
```

$$I_{LRMS} = \frac{V_p \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8 + \sigma_9 + \sigma_{10}}}{Z \pi^{0.5}} \quad (1.43)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0.2500 \beta \cos(\beta - \phi)^2 \\ \sigma_2 &= -0.2500 \cos(\phi) \sin(\phi) \\ \sigma_3 &= 0.2500 \beta \sin(\beta - \phi)^2 \\ \sigma_4 &= -0.2500 \sin(\beta - \phi) \cos(\beta - \phi) \\ \sigma_5 &= 0.2500 \tau w \sin(\phi)^2 \\ \sigma_6 &= -\frac{\tau w \sin(\phi)^2}{\tau^2 w^2 + 1} \\ \sigma_7 &= -0.2500 \tau w e^{-\frac{2\beta}{\tau w}} \sin(\phi)^2 \\ \sigma_8 &= \frac{\tau^2 w^2 \cos(\phi) \sin(\phi)}{\tau^2 w^2 + 1} \\ \sigma_9 &= -\frac{\tau^2 w^2 e^{-\frac{\beta}{\tau w}} \sin(\phi) \cos(\beta - \phi)}{\tau^2 w^2 + 1} \\ \sigma_{10} &= -\frac{\tau w \sin(\beta - \phi) e^{-\frac{\beta}{\tau w}} \sin(\phi)}{\tau^2 w^2 + 1} \end{aligned}$$

Devido à complexidade do resultado, pode ser mais interessante calcular-se  $I_{L\text{RMS}}$  numericamente.

A tensão máxima sobre o diodo corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação.

$$V_{D\text{Max}} = V_p$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\text{Max}} = V_p \quad (1.44)$$

A corrente máxima pode ser obtida derivando-se a equação da corrente e igualando a zero,

```
1 eq = diff(i_L(t),t)==0
```

$$eq = \frac{V_p \left( \cos(\phi - t) - \frac{e^{-\frac{t}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau} \right)}{Z} = 0$$

que pode ser multiplicada por  $Z/V_p$  em ambos os lados para sua simplificação. Então substitui-se  $t$  por  $t_{\text{Max}}$  que é o instante de tempo em que a corrente é máxima.

```
1 eq = subs(eq*Z/V_p,t, sym('t_Max'))
```

$$eq = \cos(\phi - t_{\text{Max}}) - \frac{e^{-\frac{t_{\text{Max}}}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau} = 0$$

encontra-se  $t_{\text{Max}}$  numericamente e substitui-se em  $i_L(t)$ . Um palpite inicial para a solução é  $T/4 = \pi/2$  ( $90^\circ$ ).

Por exemplo:

```
1 % t_Max = vpasolve(eq,sym('t_Max'),1/(4*f))
2 % I_LMax = i_L(t_Max)
```

No entanto, em termos práticos, o valor máximo que a corrente de carga poderá atingir é dado por

$$I_{D\text{Max}} = V_p/R$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{D\text{Max}} = \frac{V_p}{R} \quad (1.45)$$

Observa-se, porém, que esta pode ser uma aproximação bastante grosseira, principalmente se o circuito for muito indutivo.

### 1.3.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, por meio das equações 1.39, 1.40, 1.42, 1.43, 1.44 e 1.45.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 L = 50e-3;
4 f = 60;
5
6 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 tau = L/R
```

$$\tau = 0.0050$$

```
1 X_L = w*L
```

$$X_L = 18.8496$$

```
1 Z = sqrt(R^2+(X_L)^2)
```

$$Z = 21.3379$$

```
1 phi = atan2(X_L,R)
```

$$\phi = 1.0830$$

```
1 i_L(t) = - (V_p*(sin(phi - t*w) - exp((-t/tau))*sin(phi)))/Z
```

$$i_L(t) = 12.8806 e^{-200t} + 14.5810 \sin(376.9911t - 1.0830)$$

```
1 syms beta
2 eq = sin(beta - phi) + exp((-beta/(tau*w)))*sin(phi) == 0
```

$$eq = 0.8834 e^{-0.5305\beta} + \sin(\beta - 1.0830) = 0$$

```
1 beta = vpasolve(eq,beta,pi)
```

$$\beta = 4.3143$$

```

1 % Beta em segundos
2 deltaTBeta = beta/pi*1/f/2

```

$$\Delta t(\beta) = 0.0114$$

```

1 V_LMed = - 0.5*V_p*(cos(beta) - 1)/pi

```

$$V_{L\ Med} = 68.7127$$

```

1 I_LMed = - 0.5*V_p*(cos(beta) - 1)/(R*pi)

```

$$I_{L\ Med} = 6.8713$$

```

1 V_LRMS = V_p*sqrt((0.125*(2*beta - sin(2*beta)))/pi)

```

$$V_{L\ RMS} = 174.5880$$

```

1 sigma1 = -0.5*beta*cos(beta - phi)^2;
2 sigma2 = 0.5*cos(phi)*sin(phi);
3 sigma3 = -0.5*beta*sin(beta - phi)^2;
4 sigma4 = 0.5*sin(beta - phi)*cos(beta - phi);
5 sigma5 = -0.5*tau*w*sin(phi)^2;
6 sigma6 = (2*tau*w*sin(phi)^2)/(tau^2*w^2 + 1);
7 sigma7 = 0.5*tau*w*exp((-2*beta)/(tau*w))*sin(phi)^2;
8 sigma8 = -(2*tau^2*w^2*cos(phi)*sin(phi))/(tau^2*w^2 + 1);
9 sigma9 = (2*tau^2*w^2*exp((-beta)/(tau*w))*sin(phi)*cos(beta - phi))/(tau^2*w^2 + 1);
10 sigma10 = (2*tau*w*sin(beta - phi)*exp((-beta)/(tau*w))*sin(phi))/(tau^2*w^2 + 1);
11
12 I_LRMS = (V_p*sqrt(-(0.5*(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + ...
13 sigma6 + sigma7 + sigma8 + sigma9 + sigma10))/pi))/Z

```

$$I_{L\ RMS} = 9.6977$$

```

1 V_DMax = V_p

```

$$V_{D\ Max} = 311.1270$$

```

1 syms t_Max
2 eq = w*cos(phi - t_Max*w) - (exp((-t_Max/tau))*sin(phi))/tau == 0

```

$$eq = 376.9911 \cos(376.9911 t_{Max} - 1.0830) - 176.6768 e^{-200 t_{Max}} = 0$$

```

1 t_Max = vpasolve(eq, sym('t_Max'), 1/(4*f))

```

$$t_{Max} = 0.0067$$

```
1 I_LMax = i_L(t_Max)
```

$$I_{LMax} = 17.8346$$

ou menor que

```
1 I_DMax = V_p/R
```

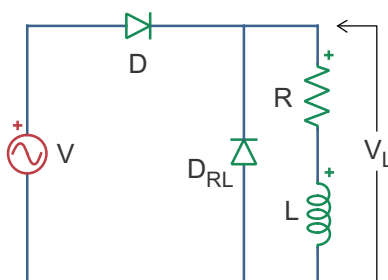
$$I_{DMax} = 31.1127$$

## 1.4 Carga RL com Diodo de Roda Livre

### 1.4.1 Topologia

Esta topologia é semelhante àquela estudada na seção 1.3, porém a mesma apresenta um diodo em paralelo com a carga, o qual tem por objetivo evitar que a a tensão sobre a mesma se torne negativa. Dessa forma, este diodo possibilita que uma maior quantidade de potência seja transferida à carga. Esta topologia está ilustrada na Fig. 1.13.

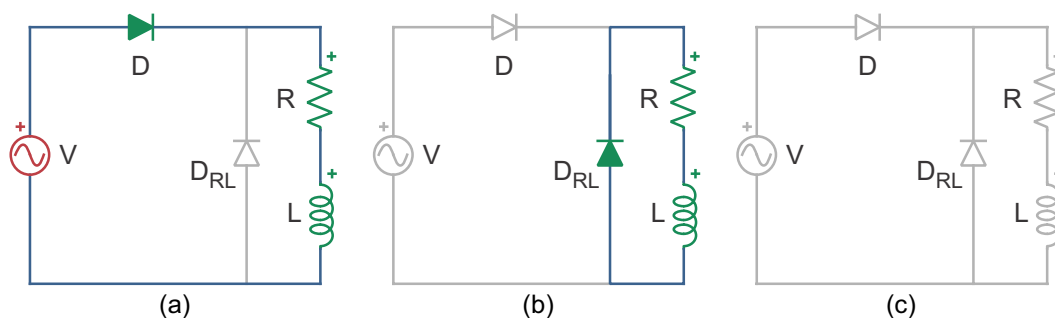
Figura 1.13. Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



### 1.4.2 Etapas de operação

O diodo D está polarizado diretamente durante o semiciclo positivo, estando no estado de condução, Fig. 1.14(a). Dessa forma a tensão da fonte da entrada é aplicada à carga. No início do semiciclo negativo o diodo  $D_{RL}$  entra em condução, aplicando uma tensão negativa sobre o diodo D, fazendo com que este bloqueie e a corrente de carga passa a circular através do diodo de roda livre até que esta corrente se anule, Fig. 1.14(b). Finalmente, nenhum diodo conduz até o final do semiciclo negativo, Fig. 1.14(c).

Figura 1.14. Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.

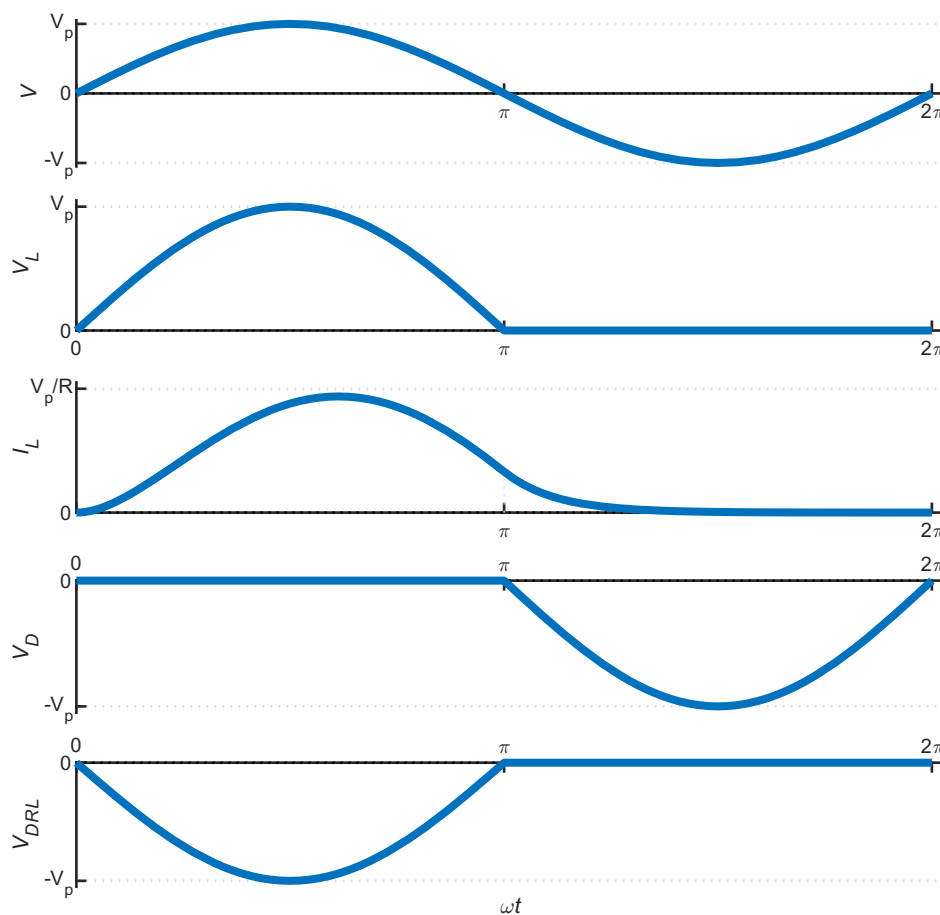


### 1.4.3 Formas de onda

As principais formas de onda para o modo de condução descontínua são mostradas na Fig. 1.15. Observa-se que a corrente  $i_L(\omega t)$  sofre um atraso devido à indutância, se anulando somente após o ângulo  $\pi$ . Devido ao diodo de roda-livre,  $D_{RL}$ , a tensão na carga fica grampeada em zero, não podendo atingir valores negativos.

1 `Figura_WF_1pulso_para_carga_RL_com_DRL();`

Figura 1.15. Principais formas de onda.



A tensão através da carga é dada por:

$$v_L(\omega t) = \begin{cases} V_p \sin(\omega t) & 0 \leq \omega t < \pi \\ 0 & \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases} \quad (1.46)$$

A corrente através da carga será definida mais adiante.

Dependendo da relação entre os valores do resistor, do indutor e da frequência, o retificador poderá operar no modo de condução descontínua (MCD), que ocorre quando a corrente se anula durante um período de operação ou no modo de condução contínua (MCC) em que a corrente é sempre superior à zero. Valores menores de resistência e maiores de indutância e frequência direcionam a operação deste retificador para o modo de condução contínua.

#### 1.4.3.1 Análise preliminar para a corrente de carga

A seguir, são obtidas as equações para a corrente através da carga.

##### A. 1ª etapa

Parte-se da equação para a corrente obtida para o retificador de um pulso com carga RL (equação 1.35).

```

1 clearvars
2 syms t tau phi omega wt V_p Z R L IL_E1_0
3
4 i_L_E1(wt) = - (V_p*(sin(phi - wt) - exp((-wt/(omega*tau)))*sin(phi))...
5 - IL_E1_0*Z*exp((-wt/(omega*tau))))/Z

```

$$i_{L,E1}(wt) = - \frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_{E1,0} Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z} \quad (1.47)$$

onde  $i_{L,E1}$  é a equação da corrente através do indutor durante a etapa 1.

Calcula-se o valor final da corrente para esta etapa, fazendo-se  $\omega t = \pi$ . Este será o valor inicial da corrente para a próxima etapa.

```

1 i_L_E1_Final = i_L_E1(sym('pi'))

```

$$i_{L,E1,Final} = - \frac{V_p \left( \sin(\phi - \pi) - e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_{E1,0} Z e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}}}{Z}$$

Da trigonometria sabe-se que

$$\sin(\phi - \pi) = -\sin(\phi)$$

Fazendo esta substituição

```

1 i_L_E1_Final = subs(i_L_E1_Final, {sin(phi-sym('pi'))},{-sin(phi)})

```

$$i_{L,E1,Final} = \frac{V_p \left( \sin(\phi) + e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) + IL_{E1,0} Z e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}}}{Z} \quad (1.48)$$

**B. 2ª etapa**

Aplicando a LTK ao circuito

```
1 syms i_L_E2(t)
2
3 % -Va + VR + VL == 0
4 eq = R*i_L_E2 + L*diff(i_L_E2,t) == 0
```

$$eq(t) = L \frac{\partial}{\partial t} i_{L,E2}(t) + R i_{L,E2}(t) = 0 \quad (1.49)$$

$i_{L,E2}$  é a corrente através da carga durante a etapa 2.

Então calcula-se a transformada de Laplace

```
1 Leq = laplace(eq)
```

$$Leq = R \text{laplace}(i_{L,E2}(t), t, s) - L(i_{L,E2}(0) - s \text{laplace}(i_{L,E2}(t), t, s)) = 0$$

substitui-se  $\text{laplace}(i_{L,E2}(t), t, s)$  por  $IL_{E2,s}$  e  $i_{L,E2}(0)$  por  $IL_{E2,0}$ , conforme explicado anteriormente, tabela 1.1.

Tabela 1.1. Correspondência de variáveis.

| Definição original                  |                                     | Substituição |              |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------|--------------|
| Código                              | Visualização                        | Código       | Visualização |
| $\text{laplace}(i_{L,E2}(t), t, s)$ | $\text{laplace}(i_{L,E2}(t), t, s)$ | $IL_{E2,s}$  | $IL_{E2,s}$  |
| $i_{L,E2}(0)$                       | $i_{L,E2}(0)$                       | $IL_{E2,0}$  | $IL_{E2,0}$  |

```
1 syms IL_E2_s I_L_E2(s) IL_E2_0 beta Z phi
2 Leq = subs(Leq, {laplace(i_L_E2(t), t, s), i_L_E2(0)}, {IL_E2_s, IL_E2_0})
```

$$Leq = IL_{E2,s} R - L(IL_{E2,0} - IL_{E2,s} s) = 0$$

```
1 IL_E2_s = solve(Leq, IL_E2_s)
```

$$IL_{E2,s} = \frac{IL_{E2,0} L}{R + L s}$$

Calcula-se a transformada inversa de Laplace

```
1 i_L_E2(t) = ilaplace(IL_E2_s, t)
```

$$i_{L,E2}(t) = IL_{E2,0} e^{-\frac{R}{L}t}$$

substitui-se  $R/L$  por  $1/\tau$

```
1 i_L_E2(t) = subs(i_L_E2(t),(R/L),1/tau)
```

$$i_{L,E2}(t) = IL_{E2,0} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Esta equação foi obtida considerando o instante de tempo inicial na referência, ou seja,  $wt = 0$ . Deslocando-se o eixo do tempo por um semiciclo,  $wt = \pi$  (que é quando a segunda etapa tem início),

```
1 i_L_E2(t) = subs(i_L_E2(t),t,t-sym('pi')/omega)
```

$$i_{L,E2}(t) = IL_{E2,0} e^{-\frac{t-\frac{\pi}{\omega}}{\tau}}$$

Que pode ser reescrito em função do ângulo, bastando para isso substituir  $t$  por  $wt/\omega$ .

```
1 i_L_E2(wt) = subs(i_L_E2, {t}, {wt/omega})
```

$$i_{L,E2}(wt) = IL_{E2,0} e^{\frac{\frac{\pi}{\omega}-\frac{wt}{\omega}}{\tau}}$$

$IL_{E2,0}$  é o valor inicial da corrente do indutor nesta etapa, correspondendo ao valor final da etapa anterior. Assim,

```
1 i_L_E2(wt) = subs(i_L_E2(wt), IL_E2_0, i_L_E1_Final)
```

$$i_{L,E2}(wt) = \frac{e^{\frac{\frac{\pi}{\omega}-\frac{wt}{\omega}}{\tau}} \left( V_p \left( \sin(\phi) + e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) + IL_{E1,0} Z e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} \right)}{Z}$$

reescrevendo

```
1 i_L_E2 = expand(i_L_E2)
```

$$i_{L,E2}(wt) = IL_{E1,0} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} + \frac{V_p e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z} + \frac{V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z}$$

A seguir, tenta-se simplificar esta equação, agrupando termos comuns,

```
1 i_L_E2 = collect(i_L_E2,Z)
```

$$i_{L,E2}(wt) = \frac{V_p e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) + IL_{E1,0} Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z}$$

```
1 i_L_E2 = collect(i_L_E2,sin(phi))
```

$$i_{L,E2}(wt) = IL_{E1,0} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} + \frac{\sin(\phi) \left( V_p e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}{Z}$$

```
1 i_L_E2 = collect(i_L_E2,V_p)
```

$$i_{L,E2}(wt) = IL_{E1,0} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} + \frac{V_p \sin(\phi) \left( e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} + e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}{Z}$$

```
1 i_L_E2 = collect(i_L_E2,exp((-wt/(omega*tau))))
```

$$i_{L,E2}(wt) = e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \left( IL_{E1,0} + \frac{V_p \sin(\phi) \left( e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} + 1 \right)}{Z} \right) \quad (1.50)$$

Dessa forma, obteve-se  $i_{L,E2}(wt)$ , a equação da corrente através do indutor durante a etapa 2.

Esta equação pode ser interpretada como um decaimento exponencial, pois é formada por um termo exponencial que é multiplicado pelos termos entre parênteses que são constantes.

#### 1.4.3.2 Corrente de carga para o modo de condução descontínua, MCD

Quando a corrente de carga se anula durante um ciclo de operação, se diz que o retificador opera no modo de condução descontínua, MCD.

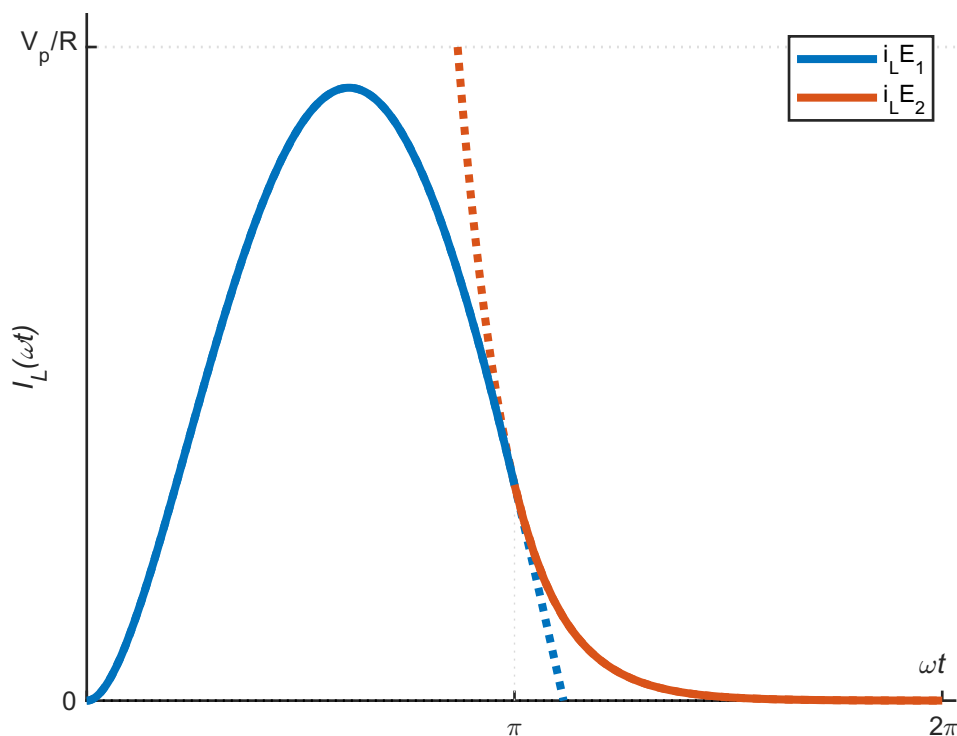
##### A. 1ª etapa

Para o MCD, fazendo  $IL_{0,E1} = 0$  em 1.47, tem-se

```
1 i_L_E1_MCD = subs(i_L_E1,IL_E1_0,0)
```

$$i_{L,E1,MCD}(wt) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right)}{Z} \quad (1.51)$$

Figura 1.16. Forma de onda da corrente através da carga para o MCD.



### B. 2ª etapa

Fazendo  $i_{L,0,E1} = 0$  em 1.50, obtém-se

```
1 i_L_E2_MCD = subs(i_L_E2, IL_E1_0, 0)
```

$$i_{L,E2,MCD}(\omega t) = \frac{V_p e^{-\frac{\omega t}{\tau}} \sin(\phi) \left( e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} + 1 \right)}{Z} \quad (1.52)$$

Na Fig. 1.16 é ilustrada a forma de onda da corrente através da carga para o modo de condução descontínuo. As linhas pontilhadas representam a continuação das formas de onda para cada uma das etapas, caso a comutação do diodo não tivesse acontecido.

```
1 Figura_IL_1pulso_para_carga_RL_com_DRL_MCD()
```

De maneira geral, quando  $\pi/\omega < 5\tau$  o conversor deve operar no modo de condução descontínuo.

### 1.4.3.3 Corrente de carga para o modo de condução contínua, MCC

#### A. 1ª etapa

Neste caso, o valor da corrente ao final da etapa 2 deve corresponder ao valor inicial da etapa 1 quando o conversor opera em regime permanente. Dessa forma, resolvendo 1.50 para o ângulo  $\omega t = 2\pi$  e fazendo igual a  $i_{L,E1,0}$ , que é o valor da corrente no início da etapa 1,

```
1 eq = i_L_E2(2*sym('pi')) == IL_E1_0
```

$$eq = e^{-\frac{2\pi}{\omega\tau}} \left( IL_{E1,0} + \frac{V_p \sin(\phi) \left( e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} + 1 \right)}{Z} \right) = IL_{E1,0}$$

Resolvendo para  $IL_{E1,0}$ ,

```
1 IL_E1_0 = solve(eq, IL_E1_0)
```

$$IL_{E1,0} = -\frac{V_p \sin(\phi)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}} \quad (1.53)$$

Substituindo o valor de  $IL_{E1,0}$  na equação de  $i_{L,E1}$ , 1.47

```
1 i_L_E1_MCC = subs(i_L_E1, 'IL_E1_0', IL_E1_0)
```

$$i_{L,E1,MCC}(wt) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) + \frac{V_p Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}}{Z} \quad (1.54)$$

Simplificando

```
1 i_L_E1_MCC = collect(i_L_E1_MCC,Z)
```

$$i_{L,E1,MCC}(wt) = -\frac{V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) + V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z \left( e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}$$

```
1 i_L_E1_MCC = collect(i_L_E1_MCC,exp((wt/(omega*tau))))
```

$$i_{L,E1,MCC}(wt) = -\frac{e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \left( e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \left( V_p \sin(\phi - wt) - V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \right) + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Como não foi possível simplificar a equação acima via software, será demonstrada a simplificação manual no anexo 1. O resultado obtido é

$$i_{L,E1,MCC}(\omega t) = -\frac{V_p}{Z} \left[ \sin(\phi - wt) + \frac{\sin(\phi) e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1} \right] \quad (1.55)$$

Ou seja,

```
1 i_L_E1_MCC(wt) = - V_p/Z*(sin(phi - wt) + sin(phi)*exp(-wt/(omega*tau))/(exp((-sym('pi'))/(omega*tau)) - 1))
```

$$i_{L,E1,MCC}(wt) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) + \frac{e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1} \right)}{Z} \quad (1.56)$$

## B. 2ª etapa

Para a etapa 2, substitui-se o valor de  $IL_{E1,0}$ , 1.53, na equação de  $i_{L,E2}(\omega t)$ , 1.50.

```
1 i_L_E2_MCC = subs(i_L_E2, 'IL_E1_0', IL_E1_0)
```

$$i_{L,E2,MCC}(\omega t) = -e^{-\frac{\omega t}{\omega \tau}} \left( \frac{V_p \sin(\phi)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega \tau}}} - \frac{V_p \sin(\phi) (e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} + 1)}{Z} \right)$$

reescrevendo

```
1 i_L_E2_MCC = expand(i_L_E2_MCC)
```

$$i_{L,E2,MCC}(\omega t) = \frac{V_p e^{-\frac{\omega t}{\omega \tau}} \sin(\phi)}{Z} - \frac{V_p e^{-\frac{\omega t}{\omega \tau}} \sin(\phi)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega \tau}}} + \frac{V_p e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} e^{-\frac{\omega t}{\omega \tau}} \sin(\phi)}{Z}$$

Simplificando

```
1 i_L_E2_MCC = collect(i_L_E2_MCC, Z);
2 i_L_E2_MCC = collect(i_L_E2_MCC, sin(phi));
3 i_L_E2_MCC = collect(i_L_E2_MCC, exp((-wt/(omega*tau))));
4 i_L_E2_MCC = collect(i_L_E2_MCC, V_p)
```

$$i_{L,E2,MCC}(\omega t) = -\frac{V_p e^{\frac{2\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)}{Z \left( e^{\frac{\omega t}{\omega \tau}} - e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} e^{\frac{\omega t}{\omega \tau}} \right)} \quad (1.57)$$

A forma de onda da corrente através da carga para o modo de condução contínua é ilustrada na Fig. 1.17. As linhas pontilhadas representam a continuação das formas de onda para cada uma das etapas, caso não houvesse acontecido a comutação do diodo.

```
1 Figura_IL_1pulso_para_carga_RL_com_DRL_MCC()
```

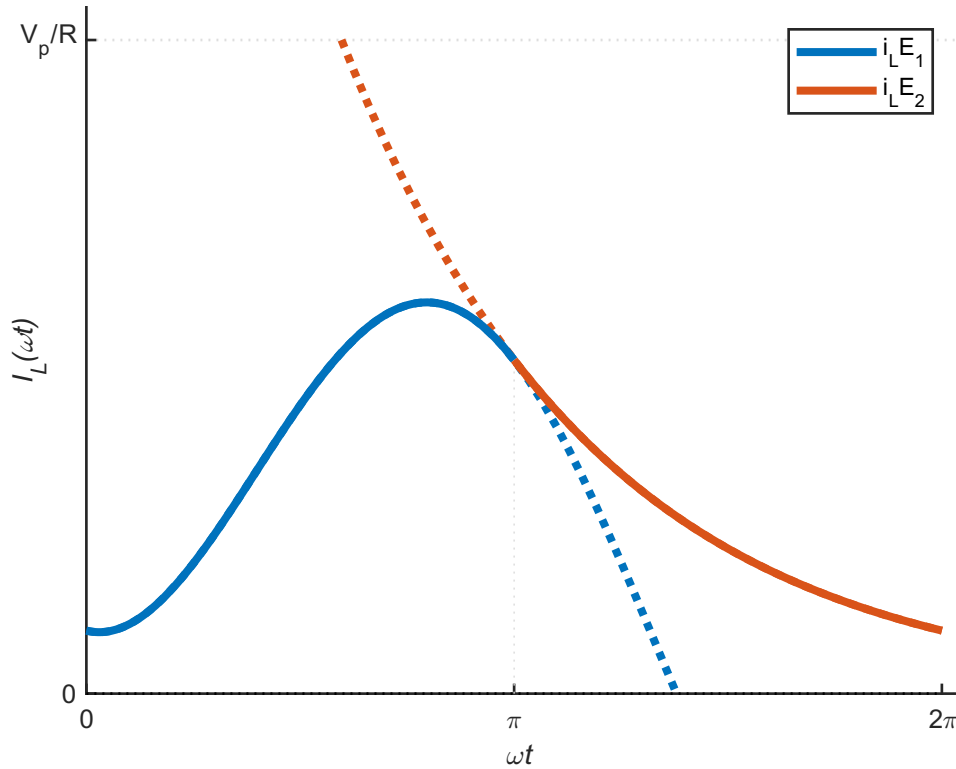
### 1.4.3.4 Análise através da utilização das séries de Fourier

No modo de condução contínua, a corrente não se anula ao final de um ciclo de operação. Desta forma, é interessante o uso de uma outra ferramenta, no caso, as Séries de Fourier para fazer a análise e também para a obtenção da forma de onda de corrente através do circuito.

A Série de Fourier de uma variável pode ser calculada através da equação a seguir, 1.58.

$$v(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (1.58)$$

Figura 1.17. Forma de onda da corrente através da carga para o MCC.



Quando é considerado um período de  $2\pi$  radianos os coeficientes são dados por:

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \mathbf{d}(\omega t) \quad (1.59)$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cos(n\omega t) \mathbf{d}(\omega t) \quad (1.60)$$

$$\mathbf{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \sin(n\omega t) \mathbf{d}(\omega t) \quad (1.61)$$

O ponto de partida para a Série de Fourier é a tensão aplicada à carga, pois esta variável é conhecida. Então, pode-se calcular a corrente através das equação a seguir, incluindo a impedância do circuito para cada frequência envolvida.

$$i_n(\omega t) = \frac{v_n(\omega t)}{Z_n}$$

onde  $Z_n$  é a impedância do circuito para o múltiplo  $n$  da frequência fundamental.

Assim, calcula-se:

$$Z_n = \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2} \quad (1.62)$$

$Z_n$  é a impedância na frequência harmônica  $n$ .

$$\phi_n = \text{atan}\left(\frac{n\omega L}{R}\right) \quad (1.63)$$

$\phi_n$  é o deslocamento sofrido por cada senoide na frequência harmônica  $n$ .

Desse modo, obtém-se a equação para a corrente

$$i(\omega t) = \frac{a_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\omega t - \phi_n) + b_n \sin(n\omega t - \phi_n)}{Z_n} \quad (1.64)$$

Após estas definições preliminares busca-se determinar as séries de Fourier para a tensão e corrente na carga.

Definição das variáveis simbólicas utilizadas:

```
1 syms V_p wt n omega L R % definição das variáveis simbólicas
2 assume(n,{'positive', 'integer'})%, definição das restrições
```

#### - Limites de integração

```
1 lim_inf = 0;
2 lim_sup = sym(pi);
```

#### - Forma de onda da tensão sobre a carga

```
1 v_L(wt) = V_p*sin(wt);
```

#### - Determinação dos coeficientes

```
1 a_0 = 1/(2*sym('pi'))*int(v_L,wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_0 = \frac{V_p}{\pi} \quad (1.65)$$

```
1 a_n(n) = 1/sym('pi')*int(v_L*cos(n*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_n(n) = \begin{cases} -\frac{V_p((-1)^n+1)}{\pi(n^2-1)} & \text{if } n \neq 1 \\ 0 & \text{if } n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \quad (1.66)$$

Que para este caso pode ser interpretada da seguinte forma: as harmônicas ímpares são nulas e as harmônicas pares são dadas pela equação a seguir, considerando a condição "par".

$$a_n(n) = \begin{cases} -\frac{V_p((-1)^n+1)}{\pi(n^2-1)} & \text{quando } n \text{ é par} \\ 0 & \text{quando } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

ou seja,

$$a_n(n) = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 1 \\ -\frac{2V_p}{3\pi} & \text{para } n = 2 \\ 0 & \text{para } n = 3 \\ -\frac{2V_p}{15\pi} & \text{para } n = 4 \\ 0 & \text{para } n = 5 \\ -\frac{2V_p}{35\pi} & \text{para } n = 6 \\ 0 & \text{para } n = 7 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

```
1 b_n(n) = 1/sym(pi)*int(v_L*sin(n*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$b_n(n) = 0.5 (0)^{n-1} V_p \quad (1.67)$$

ou seja, os coeficientes  $b_n$  são nulos para todas as frequências, exceto a fundamental ( $n = 1$ ).

$$b_1 = \frac{V_p}{2}$$

A impedância é dada por

```
1 Z_n(n) = sqrt(R^2+(n*omega*L)^2)
```

$$Z_n(n) = \sqrt{n^2 \omega^2 L^2 + R^2} \quad (1.68)$$

```
1 phi_n(n) = atan2(n*omega*L,R)% atan2 e a funcao arco tangente para quatro quadrantes
```

$$\phi_n(n) = \text{atan2}(1 L n \omega, R) \quad (1.69)$$

A Fig. 1.18 mostra o gráfico das Séries de Fourier obtidas para a tensão e para a corrente através da carga, sendo que foi variada a quantidade de termos utilizados para a geração da série. Foram utilizados dois termos para gerar um par de formas de onda (tensão e corrente) e dez termos para gerar o par seguinte.

```
1 Figura_VL_IL_1pulso_para_carga_RL_com_DRL_Serie_Fourier();
```

## 1.4.4 Equações para o projeto

### 1.4.4.1 Tensão média através da carga, $V_{L Med}$

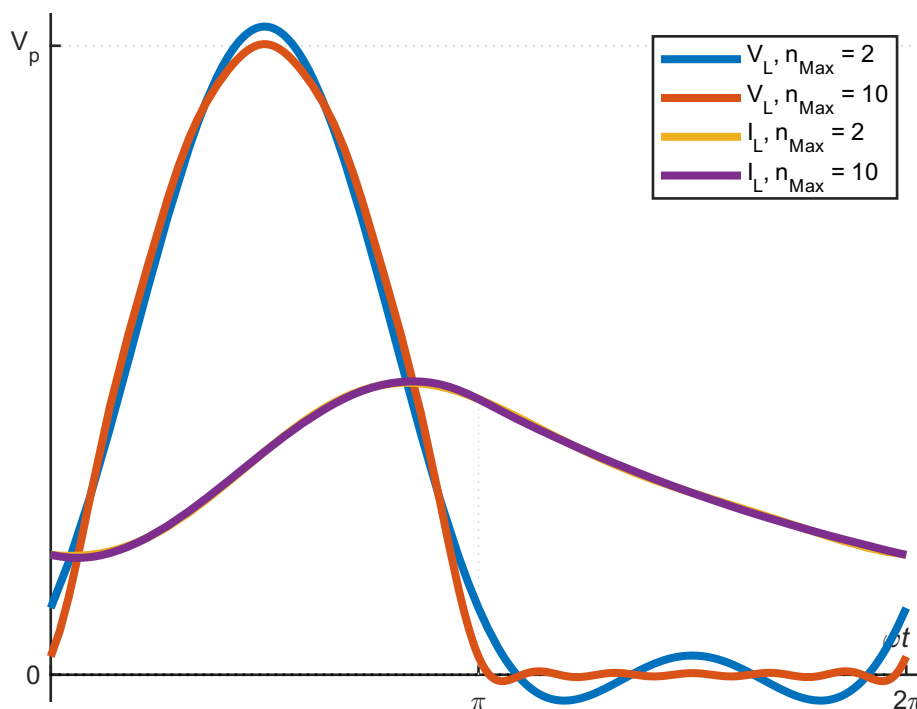
A tensão média sobre a carga é a mesma do retificador de um pulso com carga R, sendo independente do modo de operação. Pode ser calculada através da equação

$$V_{L Med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (1.70)$$

```
1 syms V_p wt w
2 V_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,pi)
```

$$V_{L Med} = \frac{V_p}{\pi} \quad (1.71)$$

Figura 1.18. Forma de onda da corrente através da carga para o MCD.



#### 1.4.4.2 Corrente média através da carga, $I_{L\text{Med}}$

##### A. MCD

A corrente média através do indutor para o MCD pode ser determinada, conforme segue,

```

1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 1/(2*sym('pi'))*(int(i_L_E1_MCD,wt,0,sym('pi')) + ...
3   int(i_L_E2_MCD,wt,sym('pi'),2*sym('pi')))
```

$$I_{L\text{Med}} = -\frac{0.5000 \left( \frac{V_p (\cos(\phi - \pi) - \cos(\phi))}{Z} + \frac{V_p \omega \tau \sin(\phi) (e^{-\frac{\pi}{\omega \tau}} - 1)}{Z} + \frac{V_p \omega \tau \sin(\phi) (e^{-\frac{2\pi}{\omega \tau}} - 1)}{Z} \right)}{\pi}$$

Como

$$\cos(\phi - \pi) = -\cos(\phi)$$

```

1 I_LMed = subs(I_LMed, {cos(phi-sym('pi'))}, {-cos(phi)});
```

Expandindo  $I_{L\text{Med}}$  e agrupando termos comuns como  $Z$ ,  $\omega$ ,...

```

1 I_LMed = expand(I_LMed);
2 I_LMed = collect(I_LMed,Z);
3 I_LMed = collect(I_LMed,omega);
4 I_LMed = collect(I_LMed,sin(phi));
5 I_LMed = collect(I_LMed,tau);
6 I_LMed = collect(I_LMed,V_p);
7 I_LMed = collect(I_LMed,IL_E1_0)
```

$$I_{L\ Med} = V_p \left( \frac{\cos(\phi)}{Z\pi} - \frac{\omega\tau \sin(\phi) \left( e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} + e^{-\frac{2\pi}{\omega\tau}} - 2 \right)}{2Z\pi} \right) \quad (1.72)$$

Que pode ser reescrito manualmente como

```
1 I_LMed = (V_p/(Z*sym('pi'))*(cos(phi) - (omega*tau*sin(phi)*(exp((-sym('pi'))/(omega*
tau))) + exp((-2*sym('pi'))/(omega*tau))) - 2))/(2))
```

$$I_{L\ Med} = \frac{V_p \left( \cos(\phi) - 0.5000 \omega\tau \sin(\phi) \left( e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} + e^{-\frac{2\pi}{\omega\tau}} - 2 \right) \right)}{Z\pi} \quad (1.73)$$

## B. MCC

A corrente média pode ser calculada por

```
1 I_LMed = 1/(2*sym('pi'))*(int(i_L_E1_MCC,wt,0,sym('pi')) + ...
2 int(i_L_E2_MCC,wt,sym('pi'),2*sym('pi')))
```

$$I_{L\ Med} = \frac{0.5000 \left( \frac{V_p (\cos(\phi) - \cos(\phi - \pi) + \omega\tau \sin(\phi))}{Z} + \frac{V_p \omega\tau \sin(\phi)}{Z} \right)}{\pi} \quad (1.74)$$

Como

$$\cos(\phi - \pi) = -\cos(\phi)$$

```
1 I_LMed = subs(I_LMed, {cos(phi-sym('pi'))},{-cos(phi)})
```

$$I_{L\ Med} = \frac{0.5000 \left( \frac{V_p (2 \cos(\phi) + \omega\tau \sin(\phi))}{Z} + \frac{V_p \omega\tau \sin(\phi)}{Z} \right)}{\pi} \quad (1.75)$$

Expandindo  $I_{L\ Med}$  e agrupando termos comuns como  $Z, V_p, \dots$

```
1 I_LMed = expand(I_LMed)
```

$$I_{L\ Med} = \frac{V_p \cos(\phi)}{Z\pi} + \frac{V_p \omega\tau \sin(\phi)}{Z\pi} \quad (1.76)$$

```
1 I_LMed = collect(I_LMed,Z)
```

$$I_{L\ Med} = \frac{V_p \cos(\phi) + V_p \omega\tau \sin(\phi)}{Z\pi} \quad (1.77)$$

```
1 I_LMed = collect(I_LMed,V_p)
```

$$I_{L\ Med} = \frac{V_p (\cos(\phi) + \omega\tau \sin(\phi))}{Z\pi} \quad (1.78)$$

### 1.4.4.3 Tensão eficaz através da carga, $V_{LRMS}$

A tensão eficaz sobre a carga é a mesma do retificador de um pulso com carga R, podendo ser calculada através da equação

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\beta (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)}$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,sym('pi')))
```

$$V_{LRMS} = V_p \sqrt{\frac{0.1250 (2\pi - \sin(2\pi))}{\pi}}$$

```
1 V_LRMS = eval(simplify(V_LRMS))
```

$$V_{LRMS} = 0.5 V_p \quad (1.79)$$

### 1.4.4.4 Corrente eficaz através da carga, $I_{LRMS}$

A corrente eficaz sobre a carga é calculada através da equação a seguir.

$$I_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi (i_{L,E1}(\omega t))^2 + \int_\pi^{2\pi} (i_{L,E2}(\omega t))^2 \right) d(\omega t)}$$

## A. MCD

Quando o retificador opera no MCD,

```
1 syms V_p wt R, assume([V_p, R, Z], 'positive')
2
3 I_LRMS = sqrt(1/(2*sym(pi))*(int((i_L_E1_MCD)^2,sym('wt'),0,sym(pi)) + ...
4             int((i_L_E2_MCD)^2,sym('wt'),sym(pi),2*sym(pi))));
5 % para evidenciar a constante pi
6 I_LRMS = subs(I_LRMS, {sym(pi)},{sym('pi')});
7 I_LRMS = expand(I_LRMS)
8 MostrarEquacoesLongas(I_LRMS,[2,1])
```

$$I_{LRMS} = \frac{\sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8 + \sigma_9 + \sigma_{10} + \sigma_{11}}}{\pi^{0.5}} \quad (1.80)$$

onde:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{0.2500 V_p^2 \pi \cos(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_2 &= \frac{0.2500 V_p^2 \pi \sin(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_3 &= -\frac{V_p^2 \omega \tau \sin(\phi)^2}{Z^2 \omega^2 \tau^2 + Z^2} \\ \sigma_4 &= \frac{0.5000 V_p^2 \omega \tau \sin(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_5 &= -\frac{V_p^2 \omega \tau e^{-\frac{\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2}{Z^2 \omega^2 \tau^2 + Z^2} \\ \sigma_6 &= \frac{V_p^2 \omega^2 \tau^2 \cos(\phi) \sin(\phi)}{Z^2 \omega^2 \tau^2 + Z^2} \\ \sigma_7 &= \frac{0.5000 V_p^2 \omega \tau e^{-\frac{\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_8 &= -\frac{0.2500 V_p^2 \omega \tau e^{-\frac{2\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_9 &= -\frac{0.5000 V_p^2 \omega \tau e^{-\frac{3\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_{10} &= -\frac{0.2500 V_p^2 \omega \tau e^{-\frac{4\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_{11} &= \frac{V_p^2 \omega^2 \tau^2 e^{-\frac{\pi}{\omega \tau}} \cos(\phi) \sin(\phi)}{Z^2 \omega^2 \tau^2 + Z^2}\end{aligned}$$

Novamente, devido à complexidade do resultado, pode ser mais interessante calcular-se  $I_{LRMS}$  numericamente.

## B. MCC

Para o modo de condução contínua,

```
1 syms V_p wt R, assume([V_p, R, Z], 'positive')
2
3 I_LRMS = sqrt(1/(2*sym(pi))*(int((i_L_E1_MCC)^2,sym('wt'),0,sym(pi)) + ...
4     int((i_L_E2_MCC)^2,sym('wt'),sym(pi),2*sym(pi))));
```

Simplificando

```
1 I_LRMS = subs(I_LRMS, {sym(pi)},{sym('pi')});
2 I_LRMS = simplifyFraction(I_LRMS);
3 MostrarEquacoesLongas(I_LRMS,[2, 1, 5]);
```

$$I_{LRMS} = \frac{\sqrt{\frac{0.2500 V_p^2 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8 + \sigma_9 + \sigma_{10} + \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{14})}{Z^2 \left( e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} - 1 \right) (\omega^2 \tau^2 + 1)}}}{\pi^{0.5000}} \quad (1.81)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= -\pi \cos(\phi)^2 \\
 \sigma_2 &= -\pi \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_3 &= 2\omega^3 \tau^3 \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_4 &= -2\omega \tau \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_5 &= \pi e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} \cos(\phi)^2 \\
 \sigma_6 &= \pi e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_7 &= 2\omega^3 \tau^3 e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_8 &= -2\omega \tau e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_9 &= -\omega^2 \pi \tau^2 \cos(\phi)^2 \\
 \sigma_{10} &= -\omega^2 \pi \tau^2 \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_{11} &= 4\omega^2 \tau^2 \cos(\phi) \sin(\phi) \\
 \sigma_{12} &= \omega^2 \pi \tau^2 e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} \cos(\phi)^2 \\
 \sigma_{13} &= \omega^2 \pi \tau^2 e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_{14} &= 4\omega^2 \tau^2 e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} \cos(\phi) \sin(\phi)
 \end{aligned}$$

Devido à complexidade dos resultados obtidos, pode ser mais interessante calcular-se  $I_{LRMS}$  numericamente.

#### 1.4.4.5 Utilizando as séries de Fourier

Conforme foi visto anteriormente

$$v(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

De onde é derivada a equação para a corrente

$$i(\omega t) = \frac{a_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\omega t - \phi_n) + b_n \sin(n\omega t - \phi_n)}{Z_n}$$

Os coeficientes são:

$$1 \quad a_0 = V_p / \text{sym}('pi')$$

$$a_0 = \frac{V_p}{\pi} \quad (1.82)$$

$$1 \quad a_n(n) = \text{piecewise}(n > 1, -(V_p * ((-\text{sym}(1))^n + 1)) / (\text{sym}('pi') * (n^2 - 1)), n == 1, 0)$$

$$a_n(n) = \begin{cases} -\frac{V_p((-1)^n + 1)}{\pi(n^2 - 1)} & \text{if } n \geq 2 \\ 0 & \text{if } n = 1 \end{cases} \quad (1.83)$$

Assim seus primeiros termos são:

$$1 \quad a_n(1)$$

$$a_n(1) = 0$$

1 `a_n(2)`

$$a_n(2) = -\frac{0.6667 V_p}{\pi}$$

1 `a_n(3)`

$$a_n(3) = 0$$

Por sua vez:

1 `b_n(n) = (1/2)*0^(n - 1)*V_p`

$$b_n(n) = 0.5 0^{n-1} V_p \quad (1.84)$$

E seus primeiros termos são:

1 `b_n(1)`

$$b_n(1) = 0.5 V_p$$

1 `b_n(2)`

$$b_n(2) = 0$$

1 `b_n(3)`

$$b_n(3) = 0$$

Assim pode-se obter a forma de onda de tensão, ou seja,

```
1 v(wt) = a_0 + ...
2 a_n(1)*cos( wt ) + b_n(1)*sin( wt ) +...
3 a_n(2)*cos(2*wt) + b_n(2)*sin(2*wt) +...
4 a_n(3)*cos(3*wt) + b_n(3)*sin(3*wt)
```

$$v(wt) = \frac{V_p}{\pi} + 0.5 V_p \sin(wt) - \frac{0.6667 V_p \cos(2 wt)}{\pi}$$

A impedância para cada frequência é

```
1 Z_n(n) = sqrt(R^2 + (n*w*L)^2)
```

$$Z_n(n) = \sqrt{L^2 n^2 w^2 + R^2}$$

E assim,

```
1 Z_0 = R
```

$$Z_0 = R$$

```
1 Z_1 = sqrt(R^2 + (w*L)^2)
```

$$Z_1 = \sqrt{L^2 w^2 + R^2}$$

```
1 Z_2 = sqrt(R^2 + (2*w*L)^2)
```

$$Z_2 = \sqrt{4 L^2 w^2 + R^2}$$

```
1 Z_3 = sqrt(R^2 + (3*w*L)^2)
```

$$Z_3 = \sqrt{9 L^2 w^2 + R^2}$$

De modo que a equação para a corrente se torna,

```
1 syms phi2 phi2 phi3
2
3 i_L_SF(wt) = a_0/R + ...
4 a_n(1)/Z_1*cos( wt-phi1 ) + b_n(1)/Z_1*sin( wt-phi1 ) +...
5 a_n(2)/Z_2*cos(2*wt-phi2) + b_n(2)/Z_2*sin(2*wt-phi2) +...
6 a_n(3)/Z_3*cos(3*wt-phi3) + b_n(3)/Z_3*sin(3*wt-phi3)
```

$$i_{L,SF}(wt) = \frac{V_p}{R\pi} - \frac{0.5 V_p \sin(\phi_1 - wt)}{(L^2 w^2 + R^2)^{0.5}} - \frac{0.6667 V_p \cos(\phi_2 - 2wt)}{\pi (4 L^2 w^2 + R^2)^{0.5}}$$

Os ângulos  $\phi_n$  não interferem no valor médio da tensão pois apenas deslocam as formas de onda no eixo do tempo (ou do ângulo,  $\omega t$ ).

### A. Corrente $I_{L Med}$

Como as funções senoidais possuem valores médios nulos durante um período, obtém-se para o valor médio da corrente,

```
1 I_L_SF_Med = a_0/R
```

$$I_{L,SF,Med} = \frac{V_p}{R\pi} \quad (1.85)$$

### B. Corrente $I_{L\text{RMS}}$

Para o cálculo da tensão eficaz, utilizam-se os primeiros termos da Série de Fourier. Observa-se que os termos com senóides simples possuem integrais nulas, produtos de senóides de diferentes frequências também possuem integrais nulas pois as áreas positivas são iguais às negativas do gráfico da curva.

```
1 I_L_SF_RMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*(int((i_LSF)^2,wt,0,2*sym(pi))))
```

$$I_{L,SF,RMS} = \frac{1.7725 \sqrt{\frac{0.0139 V_p^2 (288 L^4 w^4 + 36 L^2 R^2 \pi^2 w^2 + 376 L^2 R^2 w^2 + 9 R^4 \pi^2 + 88 R^4)}{4 L^4 w^4 + 5 L^2 R^2 w^2 + R^4}}}{R \pi^{1.5}} \quad (1.86)$$

#### 1.4.4.6 Tensão máxima sobre o diodo, $V_{D\text{Max}}$

A tensão máxima sobre o diodo corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação, como no caso de carga puramente resistiva.

$$V_{D\text{Max}} = V_p \quad (1.87)$$

#### 1.4.4.7 Corrente máxima através do diodo, $I_{D\text{Max}}$

##### A. Modo de condução descontínua

A corrente máxima para o MCD pode ser obtida derivando-se a equação da corrente e igualando a zero, como no caso de carga puramente resistiva.

```
1 i_L_E1_MCD
```

$$i_{L,E1,MCD}(wt) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega \tau}} \sin(\phi) \right)}{Z}$$

```
1 eq = diff(i_L_E1_MCD(wt),wt)==0
```

$$eq = \frac{V_p \left( \cos(\phi - wt) - \frac{e^{-\frac{wt}{\omega \tau}} \sin(\phi)}{\omega \tau} \right)}{Z} = 0$$

multiplica-se o resultado por  $Z/V_p$  para simplificar e substitui-se  $wt$  por  $wt_{\text{Max}}$ .

```
1 eq = subs(eq*Z/V_p,wt, sym('wt_Max'))
```

$$eq = \cos(\phi - wt_{\text{Max}}) - \frac{e^{-\frac{wt_{\text{Max}}}{\omega \tau}} \sin(\phi)}{\omega \tau} = 0 \quad (1.88)$$

Então, encontra-se  $wt_{\text{Max}}$  numericamente e substitui-se em  $i_{L,E1,MCD}(wt)$ . Um palpite inicial para a raiz é  $T/4$ .

Por exemplo:

```
1 % wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),pi/2)
2 % I_LMax = i_L_E1_MCD(wt_Max)
```

## B. Modo de condução contínua

A corrente máxima para o MCC pode ser obtida de maneira semelhante ao que foi feito para o MCD, ou seja,

```
1 i_L_E1_MCC
```

$$i_{L,E1,MCC}(wt) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) + \frac{e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1} \right)}{Z}$$

```
1 eq = diff(i_L_E1_MCC(wt),wt)==0
```

$$eq = \frac{V_p \left( \cos(\phi - wt) + \frac{e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau \left( e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1 \right)} \right)}{Z} = 0$$

multiplica-se o resultado por  $Z/V_p$  para simplificar e substitui-se  $wt$  por  $wt_{Max}$ .

```
1 eq = subs(eq*Z/V_p,wt, sym('wt_Max'))
```

$$eq = \cos(\phi - wt_{Max}) + \frac{e^{-\frac{wt_{Max}}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau \left( e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1 \right)} = 0 \quad (1.89)$$

Finalmente, encontra-se  $wt_{Max}$  numericamente e substitui-se em  $i_{L,E1,MCC}(wt)$ . Um palpite inicial para a raiz é  $T/4$ .

Por exemplo:

```
1 % wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),pi/2)
2 % I_LMax = i_L_E1_MCC(wt_Max)
```

No entanto, em termos práticos, o valor máximo que a corrente de carga poderá atingir é dado por

$$I_{DMax} = V_p/R \quad (1.90)$$

Esta última abordagem simplificada é indicada para o projeto do diodo, uma vez que leva em consideração o valor limite para a corrente através do mesmo.

### 1.4.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, através das equações 1.71, 1.73 ou 1.78, 1.79, 1.80 ou 1.81, 1.87 e 1.90.

## 1.4.5.1 Modo de condução descontínua, MCD

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 L = 10e-3;
4 f = 60;
5
6 w = 2*pi*f

```

$$w = 376.9911$$

```

1 omega = w;
2 tau = L/R

```

$$\tau = 1.0000e - 03$$

```

1 X_L = w*L

```

$$X_L = 3.7699$$

```

1 Z = sqrt(R^2+(X_L)^2)

```

$$Z = 10.6870$$

```

1 phi = atan2(X_L,R)

```

$$\phi = 0.3605$$

## A. Equações

```

1 i_L_E1_MCD(wt) = - (V_p*(sin(phi - wt) - exp(-wt/(omega*tau))*sin(phi)))/Z

```

$$i_{L,E1,MCD}(wt) = 10.2697 e^{-2.6526 wt} + 29.1126 \sin(wt - 0.3605)$$

```

1 i_L_E1_MCD_final = - (V_p*(sin(phi - pi) - exp(-pi/(omega*tau))*sin(phi)))/Z

```

$$i_{L,E1,MCD,final} = 10.2721$$

```

1 i_L_E2_MCD(wt) = V_p*(exp(-wt/(omega*tau))*sin(phi) + sin(phi)*exp((pi-wt)/(omega*tau)))/Z

```

$$i_{L,E2,MCD}(wt) = 10.2697 e^{8.3333-2.6526 wt} + 10.2697 e^{-2.6526 wt}$$

```

1 i_L_E2_MCD_final = 0

```

$$i_{L,E2,MCD,final} = 0$$

## B. Grandezas

```
1 V_LMed = V_p/pi
```

$$V_{LMed} = 99.0348$$

```
1 I_LMed = (V_p*(2*cos(phi) + 2*omega*tau*sin(phi) - ...
2 omega*tau*exp((-pi/(omega*tau)))*sin(phi) - ...
3 omega*tau*exp((-2*pi)/(omega*tau))*sin(phi)))/(2*Z*pi)
```

$$I_{LMed} = 9.9033$$

```
1 V_LRMS = V_p*sqrt((0.125*(2*pi - sin(2*pi)))/pi)
```

$$V_{LRMS} = 155.5635$$

```
1 sigma1 = 0.5*pi*cos(phi)^2;
2 sigma2 = 0.5*pi*sin(phi)^2;
3 sigma3 = 0.5*omega*tau*sin(phi)^2;
4 sigma4 = -(2*omega*tau*sin(phi)^2)/(omega^2*tau^2 + 1);
5 sigma5 = -0.5*omega*tau*exp((-2*pi)/(omega*tau))*sin(phi)^2;
6 sigma6 = -(2*omega*tau*exp((-pi/(omega*tau)))*sin(phi)^2)/((omega*tau)^2 + 1);
7 sigma7 = (2*omega^2*tau^2*cos(phi)*sin(phi))/(omega^2*tau^2 + 1);
8 sigma8 = (2*(omega*tau)^2*exp(-pi/(omega*tau))*cos(phi)*sin(phi))/((omega*tau)^2 + 1);
9
10 I_LRMS = sqrt((0.5*V_p^2*(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + sigma7 ...
11 + sigma4*exp(-pi/(omega*tau)) + sigma7*exp(-pi/(omega*tau)))/Z^2 + ...
12 (0.25*V_p^2*omega*tau*exp((-4*pi)/(omega*tau))*(exp((2*pi)/...
13 (omega*tau) - 1)*(sin(phi) + exp((pi/(omega*tau))*sin(phi))^2)/Z^2)/pi^0.5
```

$$I_{LRMS} = 14.7721$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{DMax} = 311.1270$$

```
1 syms wt_Max
2 eq = cos(phi - wt_Max) - (exp((-wt_Max/(omega*tau)))*sin(phi))/(omega*tau) == 0
```

$$eq = \cos(wt_{Max} - 0.3605) - 0.9357 e^{-2.6526 wt_{Max}} = 0$$

```
1 wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),pi/2)
```

$$wt_{Max} = 1.9257$$

```
1 I_DMax = i_L_E1(wt_Max)
```

$$I_{DMax} = 29.1743$$

ou

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{DMax} = 31.1127$$

### C. Grandezas séries de Fourier

```
1 I_L_SF_Med = V_p/(pi*R)
```

$$I_{LSFMed} = 9.9035$$

```
1 I_L_SF_RMS = (1.7725*V_p*sqrt((0.0139*(288*L^4*w^4 + 36*L^2*R^2*pi^2*w^2 + ...
2 376*L^2*R^2*w^2 + 9*R^4*pi^2 + 88*R^4))/(pi^3*(4*L^4*w^4 + 5*L^2*R^2*w^2 + R^4))))/R
```

$$I_{LSFRMS} = 14.7683$$

#### 1.4.5.2 Modo de Condução Contínua, MCC

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 L = 50e-3;
4 f = 60;
5
6 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 tau = L/R
```

$$\tau = 0.0050$$

```
1 X_L = w*L
```

$$X_L = 18.8496$$

```
1 Z = sqrt(R^2+(X_L)^2)
```

$$Z = 21.3379$$

```
1 phi = atan2(X_L,R)
```

$$\phi = 1.0830$$

## A. Equações

```
1 i_L_E1_MCC(wt) = - V_p/Z*(sin(phi - wt) + sin(phi)*exp(-wt/(w*tau)))/...
2 (exp((-sym(pi))/(w*tau)) - 1))
```

$$i_{L,E1,MCC} = 15.8799 e^{-0.5305 wt} + 14.5810 \sin(wt - 1.0830)$$

```
1 i_L_E1_final = - V_p/Z*(sin(phi - pi) + sin(phi)*exp(-pi/(w*tau))/(exp((-pi)/(w*tau))
- 1))
```

$$i_{L,E1,final} = 15.8799$$

```
1 i_L_E2_MCC(wt) = -(V_p*exp((2*sym(pi))/(w*tau))*sin(phi))/(Z*(exp(wt/(w*tau))...
2 - exp(sym(pi)/(w*tau))*exp(wt/(w*tau))))
```

$$i_{L,E2,MCC} = 84.0761 e^{-0.5305 wt}$$

```
1 i_L_E2_final = -(V_p*sin(phi))/(Z - Z*exp((sym(pi)/(w*tau))))
```

$$i_{L,E2,final} = 2.9993$$

## B. Grandezas

```
1 % syms beta
2 % eq = sin(beta - phi) + exp((-beta/(tau*w)))*sin(phi) == 0
3 % beta = vpasolve(eq,beta,pi)
4
5 V_LMed = V_p/pi
```

$$V_{LMed} = 99.0348$$

```
1 I_LMed = V_p/(R*pi)
```

$$I_{LMed} = 9.9035$$

```
1 V_LRMS = 0.5*V_p
```

$$V_{LRMS} = 155.5635$$

```
1 I_LRMS = (vpa('1.7725')*V_p*sqrt((vpa('0.0139')*(288*L^4*w^4 + ...
2 36*L^2*R^2*pi^2*w^2 + 376*L^2*R^2*w^2 + 9*R^4*pi^2 ...
3 + 88*R^4))/(4*L^4*w^4 + 5*L^2*R^2*w^2 + R^4)))/(R*pi^1.5)
```

$$I_{LRMS} = 11.2336$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{DMax} = 311.1270$$

```
1 syms wt_Max
2 eq = cos(phi - wt_Max) + (exp((-wt_Max/(w*tau)))*sin(phi))/(w*tau*(exp((-sym(pi)/(w*tau))) - 1)) == 0
```

$$eq = 376.9911 \cos(376.9911 t_{Max} - 1.0830) - 176.6768 e^{-200 t_{Max}} = 0$$

```
1 t_Max = vpasolve(eq, sym('t_Max'), 1/(4*f))
```

$$wt_{Max} = 2.4998$$

```
1 I_LMax = i_L_E1(wt_Max)
```

$$I_{LMax} = 18.6243$$

ou

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{DMax} = 31.1127$$

### C. Séries de Fourier

```
1 a_0 = V_p/pi
```

$$a_0 = 99.0348$$

```
1 a_n(n) = piecewise(n ~= 1, -(V_p*((-1)^n + 1))/(pi*(n^2 - 1)), n == 1, 0)
```

$$a_n(n) = \begin{cases} -\frac{99.0348((-1)^n + 1)}{n^2 - 1} & \text{if } n \neq 1 \\ 0 & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

```
1 b_n(n) = 0.5*0^(n-1)*V_p
```

$$b_n(n) = 155.5635 0^{n-1}$$

```
1 Z_n(n) = sqrt(R^2+(n*w*L)^2)
```

$$Z_n(n) = 2 \sqrt{88.8264 n^2 + 25}$$

```
1 phi_n(n) = atan2(n*w*L,R)
```

$$\phi_n(n) = \text{atan}(1.8850 n)$$

## D. Grandezas pelas Séries de Fourier

$$1 \quad I_{L\_SF\_Med} = V_p / (\pi \cdot R)$$

$$I_{L\_SF\_Med} = 9.9035$$

$$1 \quad I_{L\_SF\_RMS} = (1.7725 \cdot V_p \cdot \sqrt{((0.0139 \cdot (288 \cdot L^4 \cdot w^4 + 36 \cdot L^2 \cdot R^2 \cdot \pi^2 \cdot w^2 + \dots \\ 2 \quad 376 \cdot L^2 \cdot R^2 \cdot w^2 + 9 \cdot R^4 \cdot \pi^2 + 88 \cdot R^4)) / (\pi^3 \cdot (4 \cdot L^4 \cdot w^4 + 5 \cdot L^2 \cdot R^2 \cdot w^2 + R^4)))}) / R$$

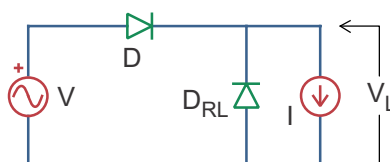
$$I_{L\_SF\_RMS} = 11.2336$$

## 1.5 Carga I com Diodo de Roda-Livre

### 1.5.1 Topologia

Esta topologia é formada por uma fonte de tensão em série com um diodo e uma carga que é uma fonte de corrente ou pode ser uma carga com uma indutância muito alta. Devido à característica indutiva da carga é necessário um diodo em paralelo com a mesma para que a corrente possa circular em roda livre para evitar o surgimento de sobre tensões nas chaves caso esta corrente seja interrompida, Fig. 1.19.

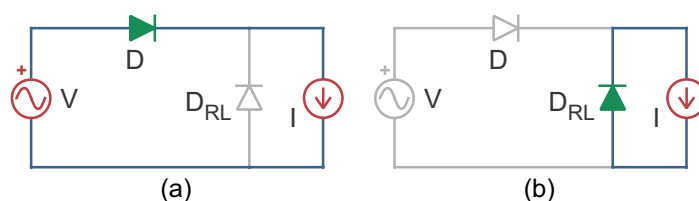
Figura 1.19. Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga de fonte de corrente.



### 1.5.2 Etapas de operação

Durante o semiciclo positivo toda a corrente de carga circula através do diodo D, pois este está polarizado diretamente, Fig. 1.20(a). Por outro lado, durante o semiciclo negativo, toda a corrente de carga circula através do diodo de roda livre ( $D_{RL}$ ) e o diodo D se encontra bloqueado, Fig. 1.20(b).

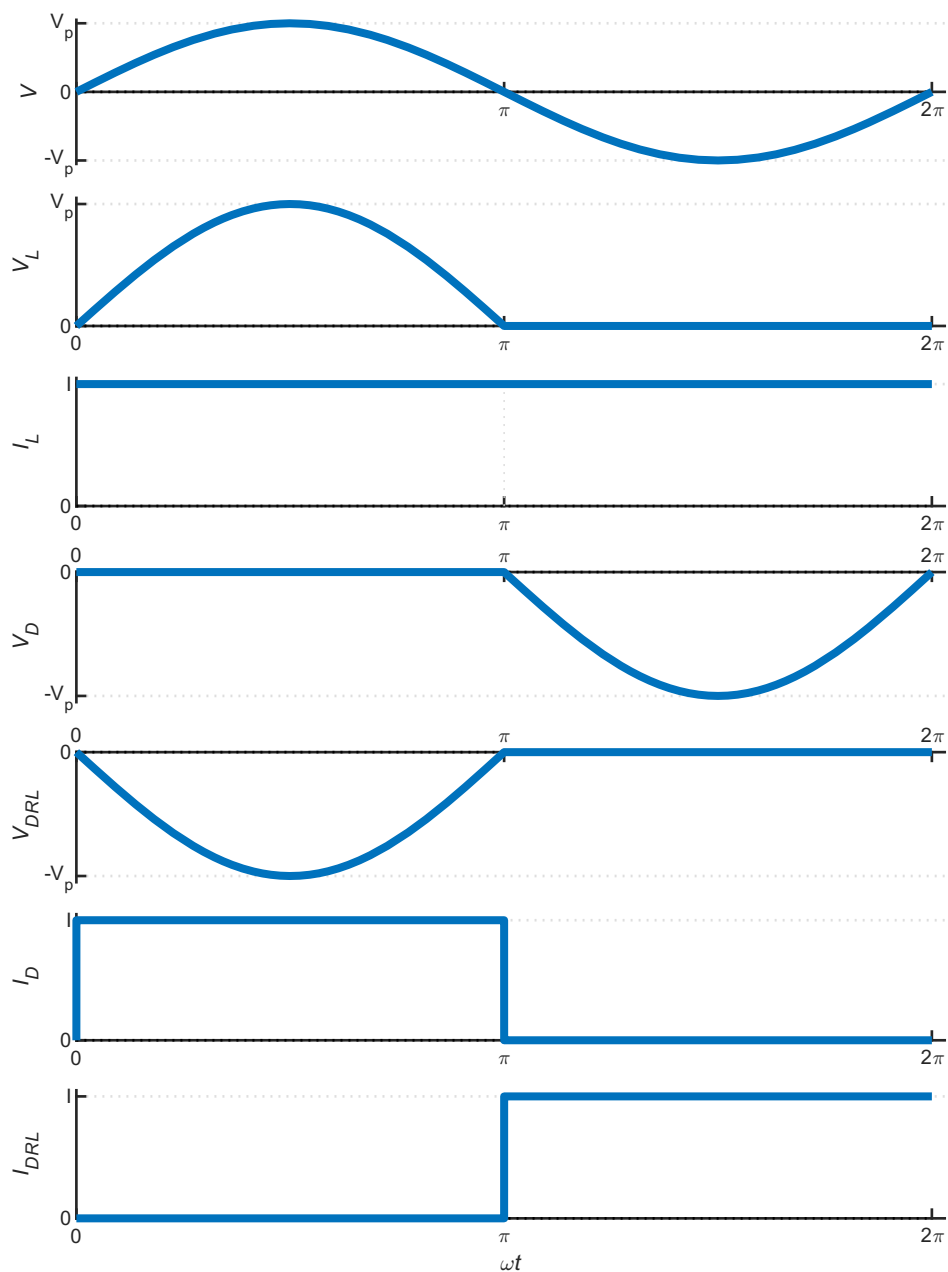
Figura 1.20. Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga I.



### 1.5.3 Formas de onda

As principais formas de ondas estão mostradas na Fig. 1.21. Observa-se que a corrente através da carga é contínua e igual a  $I$  e que a mesma circula através do diodo  $D$  durante o semiciclo positivo e através do diodo  $D_{RL}$  durante o semiciclo negativo.

Figura 1.21. Principais formas de onda.



A tensão através da carga é dada por:

$$v_L(\omega t) = \begin{cases} V_p \sin(\omega t) & 0 \leq \omega t < \pi \\ 0 & \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases} \quad (1.91)$$

A corrente através da carga é constante:

$$i_L(\omega t) = I \quad (1.92)$$

### 1.5.4 Equações para o projeto

A tensão média sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\ Med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (1.93)$$

```
1 syms V_p wt I
2 V_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,pi)
```

$$V_{L\ Med} = \frac{V_p}{\pi} \quad (1.94)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

```
1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(I,wt,0,2*sym('pi'))
```

$$I_{L\ Med} = I \quad (1.95)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\ RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (1.96)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/(2*pi)*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,pi))
```

$$V_{L\ RMS} = 0.5 V_p \quad (1.97)$$

Como mencionado, a corrente através da carga é constante. Então,

```
1 syms V_p wt R, assume([I, sym('pi')], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*int(I^2,wt,0,2*sym('pi')))
```

$$I_{L\ RMS} = I \quad (1.98)$$

A tensão máxima sobre os diodo corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação.

$$V_{D\,Max} = V_{DRL\,Max} = V_p$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\,Max} = V_p \quad (1.99)$$

E a corrente máxima,

$$I_{D\,Max} = I_{DRL\,Max} = I$$

```
1 I_DMax = I
```

$$I_{D\,Max} = I \quad (1.100)$$

### 1.5.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, por meio das equações 1.94, 1.95, 1.97, 1.98, 1.99 e 1.100.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 I = 10;
3
4 V_LMed = V_p/pi
```

$$V_{L\,Med} = 99.0348$$

```
1 I_LMed = I
```

$$I_{L\,Med} = 10$$

```
1 V_LRMS = 0.5*V_p
```

$$V_{L\,RMS} = 155.5635$$

```
1 I_LRMS = I
```

$$I_{L\,RMS} = 10$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\,Max} = 311.1270$$

```
1 I_DMax = I
```

$$I_{D\,Max} = 10$$

## 1.6 Conclusão

Neste capítulo foi estudado o retificador monofásico de meia onda. Foram estudados os modos de operação para carga resistiva ( $R$ ), carga resistiva em série com fonte de tensão, carga indutiva ( $RL$ ), carga indutiva com diodo de roda livre e carga com corrente constante ( $I$ ). Foram vistas as principais formas de onda e analisada a corrente de carga. Foram apresentadas equações para auxiliar no projeto dos retificadores analisados.

A estrutura estudada neste capítulo é a mais simples possível, necessitando de um único diodo. No entanto, somente um semiciclo da potência fornecida pela fonte de entrada é aproveitada, limitando a energia transferida para a carga e causando elevada ondulação na corrente de carga.

## Capítulo 2

# Retificador Monofásico de Onda Completa com Ponto Médio à Diodo

A Fig. 2.1 ilustra o retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo. Inicialmente será feita análise com carga R, puramente resistiva.

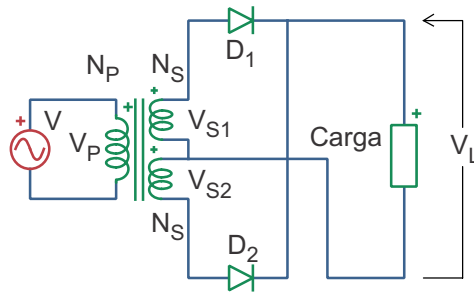
As relações entre espiras do transformador serão consideradas unitárias e, portanto, as relações entre as tensões nos enrolamentos do transformador também serão unitárias. Caso isso não ocorra, basta considerar  $V_{psen}(\omega t)$  como sendo a tensão de saída de cada um dos secundários do transformador, ou seja,  $V_{S1} = V_{S2} = V_{psen}(\omega t)$ , de forma que a tensão de alimentação será

$$v(\omega t) = V_{S1} \frac{N_P}{N_S} = V_{S2} \frac{N_P}{N_S}$$

E dessa forma:

$$V_p = V_{p,S1} = V_{p,S2} = V_{p,P} \frac{N_S}{N_P} = V_{p,in} \frac{N_S}{N_P}$$

Figura 2.1. Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo.

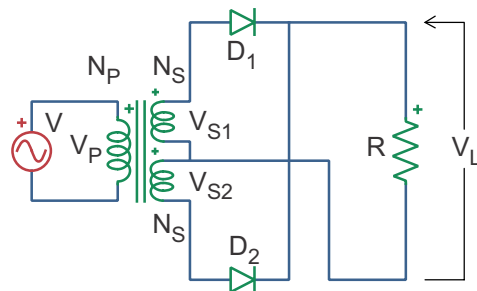


## 2.1 Carga R

### 2.1.1 Topologia

O retificador mostrado na Fig. 2.2 é formado por uma fonte de tensão, um transformador com dois enrolamentos secundários, dois diodos e pela carga R.

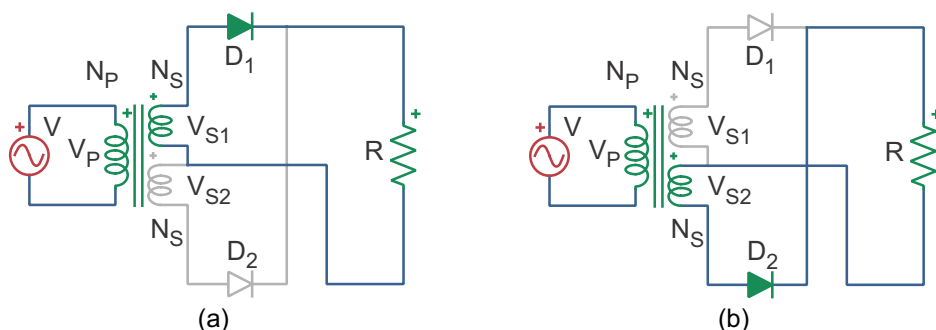
Figura 2.2. Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga R.



### 2.1.2 Etapas de operação

Para esta topologia o diodo  $D_1$  conduz durante o semiciclo positivo (Fig. 2.3(a)), enquanto o diodo  $D_2$  se encontra bloqueado. Dessa forma, durante o semiciclo positivo é aplicada a tensão da fonte de entrada sobre a Carga  $R$  e a corrente flui através da mesma no sentido positivo. Durante o semiciclo negativo, a tensão através da carga também é positiva porque a tensão da fonte de entrada agora é negativa e quem está em condução é o diodo  $D_2$ , enquanto o diodo  $D_1$  se encontra bloqueado (Fig. 2.3(b)). Consequentemente, como o diodo  $D_2$  está conectado ao terminal positivo da carga, a corrente através da mesma continua a fluir no sentido positivo.

Figura 2.3. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga R.



A tensão de alimentação é dada por:

$$v(\omega t) = V_p \sin(\omega t) [V]$$

- $V_p$  é a tensão de pico nos secundários do transformador; e
- $\omega$  é a frequência angular.

A tensão através da carga é dada por:

$$v_L(\omega t) = \begin{cases} V_p \sin(\omega t) & 0 \leq \omega t < \pi \\ -V_p \sin(\omega t) & \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases}$$

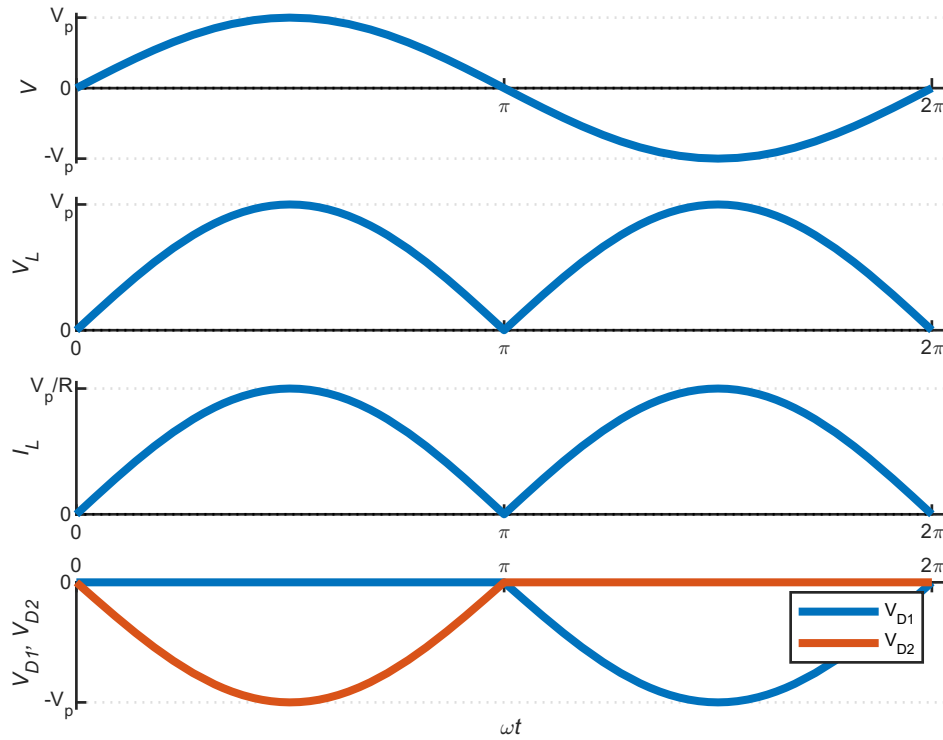
A corrente é proporcional à tensão, pois trata-se de um circuito resistivo:

$$i_L(\omega t) = \frac{v_L(\omega t)}{R}$$

### 2.1.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 2.4. Observa-se que tanto a tensão, como a corrente através da carga sempre são positivas, sendo proporcionais entre si.

Figura 2.4. Principais formas de onda.



### 2.1.4 Equações para o projeto

A tensão média sobre a carga é calculada através de

$$V_{L\ Med} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (2.1)$$

A principal diferença no cálculo da tensão média entre as topologias desta seção e da seção 1.1 está no fato que a frequência da tensão sobre a carga dobra para este retificador, então o período corresponde à metade daquele da seção 1.1.

```
1 syms V_p wt
2 V_LMed = 1/(sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,pi)
```

$$V_{L\ Med} = \frac{2V_p}{\pi} \quad (2.2)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```

1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 1/(sym('pi'))*int(V_p*sin(wt)/R,wt,0,pi)

```

$$I_{L\ Med} = \frac{2 V_p}{R \pi} \quad (2.3)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através de

$$V_{L\ RMS} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (2.4)$$

```

1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/pi*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,pi))

```

$$V_{L\ RMS} = 0.7071 V_p \quad (2.5)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```

1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(1/(pi)*int((V_p*sin(wt)/R)^2,wt,0,pi))

```

$$I_{L\ RMS} = \frac{0.7071 V_p}{R} \quad (2.6)$$

A tensão máxima sobre cada diodo corresponde ao dobro da tensão máxima da fonte de alimentação, pois os dois enrolamentos secundários do transformador estão conectados em série nas etapas que o outro diodo se encontra em condução.

$$V_{D\ Max} = 2 V_p$$

```

1 V_DMax = 2*V_p

```

$$V_{D\ Max} = 2 V_p \quad (2.7)$$

E a corrente máxima,

$$I_{D\ Max} = V_p / R$$

```

1 I_DMax = V_p/R

```

$$I_{D\ Max} = \frac{V_p}{R} \quad (2.8)$$

### 2.1.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir. Serão utilizadas as equações 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3
4 V_LMed = 2*V_p/pi
```

$$V_{LMed} = 198.0696$$

```
1 I_LMed = 2*V_p/(R*pi)
```

$$I_{LMed} = 19.8070$$

```
1 V_LRMS = (sqrt(2)/2)*V_p
```

$$V_{LRMS} = 220.0000$$

```
1 I_LRMS = ((sqrt(2)/2)*V_p)/R
```

$$I_{LRMS} = 22.0000$$

```
1 V_DMax = 2*V_p
```

$$V_{DMax} = 622.2540$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{DMax} = 31.1127$$

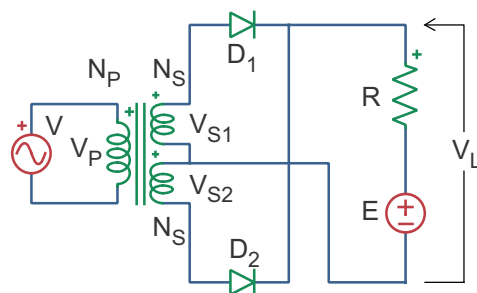
## 2.2 Carga RE

### 2.2.1 Topologia

Esta topologia é semelhante à topologia analisada na seção 2.1 exceto que a carga é formada por uma resistência em série com uma fonte de tensão de valor  $E$ , conforme ilustrado na Fig. 2.5. No decorrer desta seção considera-se sempre que o pico de tensão de entrada é maior que a tensão  $E$ .

$$V_p > E$$

Figura 2.5. Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.



### 2.2.2 Etapas de operação

Para esta topologia, o diodo  $D_1$  conduz durante o semiciclo positivo quando a tensão da fonte de entrada  $V(\omega t)$ , for maior que a tensão da fonte  $E$  (Fig. 2.6(a)). Por sua vez, o diodo  $D_2$  conduz durante o semiciclo negativo quando a tensão negativa da fonte de entrada  $-V(\omega t)$ , for maior que a tensão da fonte  $E$  (Fig. 2.6(b)). Caso contrário, ambos os diodos se encontram bloqueados e assim não há corrente através da carga, de forma que não há nenhuma queda de tensão sobre a resistência  $R$  (Fig. 2.6(c)). Portanto, quando não há nenhum diodo conduzindo, a tensão  $V_L(\omega t)$  será igual a  $E$ .

Os circuitos equivalentes são mostrados na (Fig. 2.6). Considerando esta figura, a sequência das etapas de operação será:

- Fig. 2.6(c) para  $0 < \omega t < \theta_1$
- Fig. 2.6(a) para  $\theta_1 < \omega t < \theta_2$
- Fig. 2.6(c) para  $\theta_2 < \omega t < \pi + \theta_1$
- Fig. 2.6(b) para  $\pi + \theta_1 < \omega t < \pi + \theta_2$
- Fig. 2.6(c) para  $\pi + \theta_2 < \omega t < 2\pi$

### 2.2.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 2.7. Observa-se que a interseção entre as formas de onda  $V(\omega t)$  e  $E$  ocorre para os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e se repete para  $\pi + \theta_1$  e  $\pi + \theta_2$ . Durante estes intervalos, a tensão na carga é sempre superior à tensão da fonte  $E$ . A corrente através da carga é proporcional à tensão sobre a resistência  $R$ .

1 Figura\_WF\_2pulsosPM\_para\_carga\_RE()

Primeiramente determina-se a interseção entre as formas de onda das duas fontes.

```
1 clearvars
2 syms V_p wt E R
3
4 eq = V_p*sin(wt) == E
```

Figura 2.6. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.

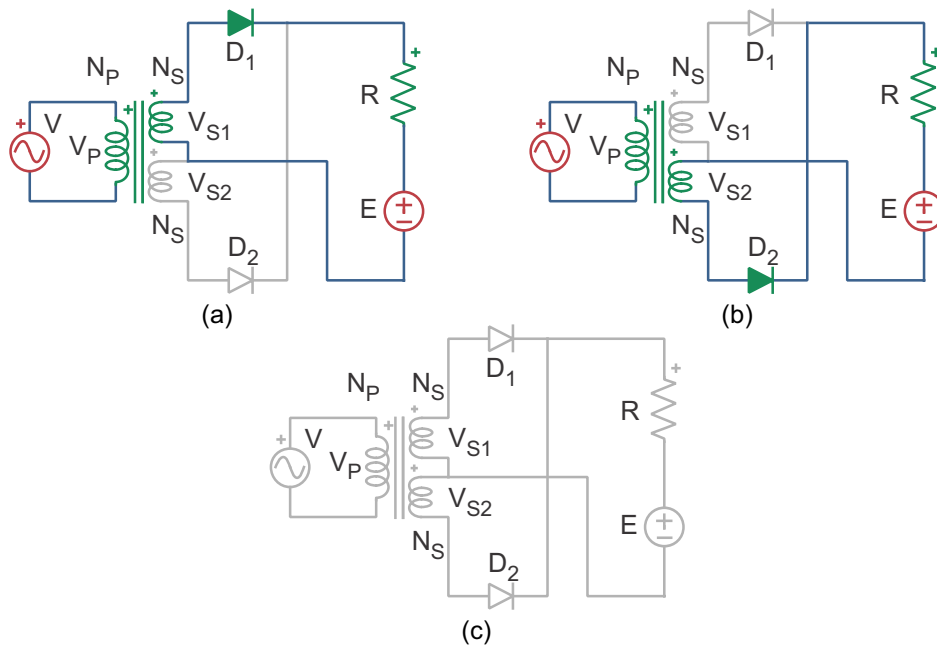
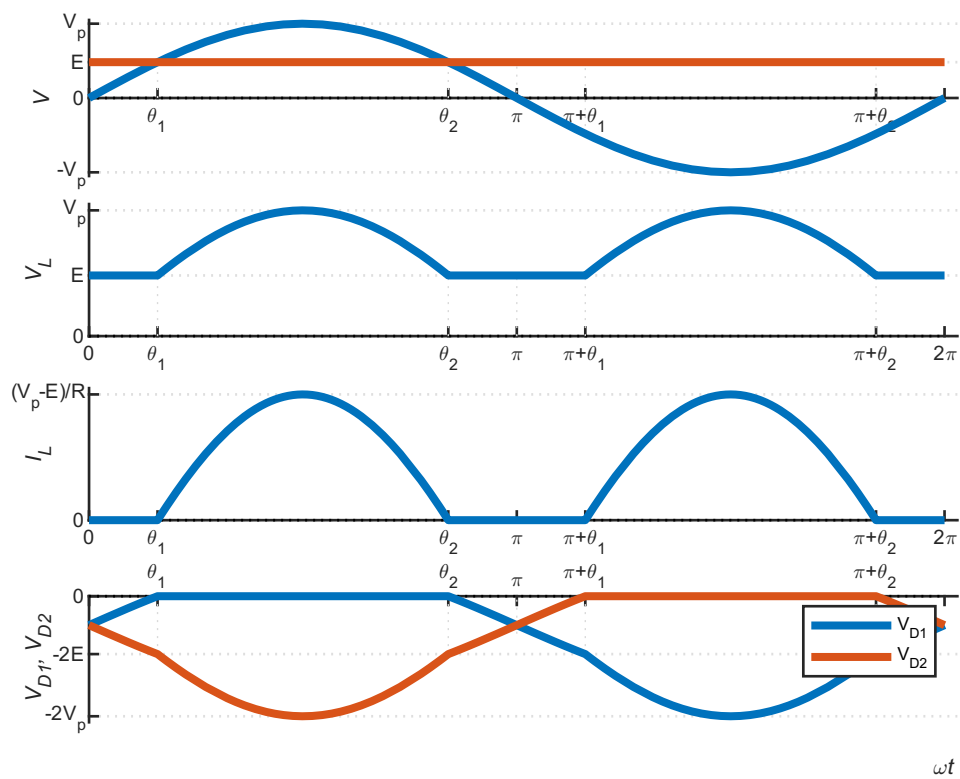


Figura 2.7. Principais formas de onda.



$$eq = V_p \sin(\omega t) = E$$

```
1 thetas = solve(eq,wt)
```

$$thetas = \begin{bmatrix} \text{asin}\left(\frac{E}{V_p}\right) \\ \pi - \text{asin}\left(\frac{E}{V_p}\right) \end{bmatrix}$$

```
1 theta_1 = thetas(1)
```

$$\theta_1 = \text{asin}\left(\frac{E}{V_p}\right)$$

```
1 theta_2 = thetas(2)
```

$$\theta_2 = \pi - \text{asin}\left(\frac{E}{V_p}\right)$$

Conforme já mencionado, o diodo  $D_1$  conduzirá entre  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Por sua vez, diodo  $D_2$  conduzirá entre  $\pi + \theta_1$  e  $\pi + \theta_2$

### Tensão sobre os diodos

- Entre  $\theta_1$  e  $\theta_2$ : o diodo  $D_1$  está conduzindo, logo sua tensão é nula;

$$V_{D1} = 0$$

- Entre  $\pi + \theta_1$  e  $\pi + \theta_2$  o diodo  $D_2$  está conduzindo; a tensão sobre  $D_1$  será o dobro da tensão fornecida pela fonte de alimentação, pois ambos os secundários do transformador estão em série com este diodo;

$$V_{D1} = 2 V_{S2}(\omega t)$$

- Nos intervalos  $[0, \theta_1]$ ,  $[\theta_2, \pi + \theta_1]$  e  $[\pi + \theta_2, 2\pi]$  nenhum diodo está em condução. Então

$$V_{D1} = V_{S2}(\omega t) - E$$

O mesmo raciocínio é válido para a tensão sobre o diodo  $D_2$ .

### 2.2.4 Equações para o projeto

Tendo em vista o que foi discutido nas seções anteriores, utilizam-se os valores de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  para o projeto deste retificador.

A tensão média sobre a carga pode ser calculada utilizando

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\theta_1} E d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{\pi} E d(\omega t) \right] \quad (2.9)$$

Que pode ser simplificada através da adição dos limites dos termos semelhantes para

$$V_{L Med} = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{0+\theta_2}^{\theta_1+\pi} E d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (2.10)$$

```

1 syms wt theta_1 theta_2
2
3 V_LMed = 1/(sym('pi'))*(int(V_p*sin(wt),wt,theta_1,theta_2)+...
4   int(E,wt,theta_2,sym('pi')+theta_1))

```

$$V_{L Med} = \frac{E (\pi + \theta_1 - \theta_2) + V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))}{\pi} \quad (2.11)$$

A corrente média através da carga pode ser obtida através da determinação da tensão média sobre R.

```

1 V_RMed = 1/(sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E),wt,theta_1,theta_2)

```

$$V_{R Med} = \frac{V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E (\theta_1 - \theta_2)}{\pi}$$

```

1 syms wt theta_1 theta_2
2
3 I_LMed = 1/(sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E)/R,wt,theta_1,theta_2)

```

$$I_{L Med} = \frac{\frac{V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))}{R} + \frac{E (\theta_1 - \theta_2)}{R}}{\pi}$$

```

1 I_LMed = simplifyFraction(I_LMed)

```

$$I_{L Med} = \frac{E \theta_1 - E \theta_2 + V_p \cos(\theta_1) - V_p \cos(\theta_2)}{R \pi}$$

```

1 %I_LMed = simplify(I_LMed)
2 I_LMed = collect(I_LMed, {'E', 'V_p', 'R'})

```

$$I_{L Med} = \frac{V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E (\theta_1 - \theta_2)}{R \pi} \quad (2.12)$$

A tensão eficaz sobre a carga pode ser obtida através da equação

$$V_{L RMS} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\theta_1} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{\pi} E^2 d(\omega t) \right]} \quad (2.13)$$

Que como visto anteriormente, corresponde a

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \left[ \int_{0+\theta_2}^{\theta_1+\pi} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) \right]} \quad (2.14)$$

```

1 syms V_p wt, assume([V_p, sym('pi')], {'positive', 'real'})
2 V_LRMS = sqrt(1/(sym('pi'))*(int((V_p*sin(wt))^2,wt,theta_1,theta_2)+...
3   int((E)^2,wt,theta_2,sym('pi')+theta_1)))

```

$$V_{LRMS} = \frac{\sqrt{E^2 (\pi + \theta_1 - \theta_2) - 0.2500 V_p^2 (2 \theta_1 - 2 \theta_2 - \sin(2 \theta_1) + \sin(2 \theta_2))}}{\pi^{0.5}} \quad (2.15)$$

```

1 V_RRMS = sqrt(1/(sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E)^2,wt,theta_1,theta_2));
2 MostrarEquacoesLongas(V_RRMS,[2,1])

```

$$eq = \frac{\sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8}}{\pi^{0.5}}$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0.2500 V_p^2 \sin(2 \theta_1) \\ \sigma_2 &= -0.2500 V_p^2 \sin(2 \theta_2) \\ \sigma_3 &= -E^2 \theta_1 \\ \sigma_4 &= E^2 \theta_2 \\ \sigma_5 &= -0.5000 V_p^2 \theta_1 \\ \sigma_6 &= 0.5000 V_p^2 \theta_2 \\ \sigma_7 &= -2 E V_p \cos(\theta_1) \\ \sigma_8 &= 2 E V_p \cos(\theta_2) \end{aligned}$$

Como a corrente através do circuito auxiliar é proporcional à tensão sobre o resistor,

```

1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sym('V_RRMS')/R

```

$$I_{LRMS} = \frac{V_{RRMS}}{R} \quad (2.16)$$

```

1 % I_LRMS = eval(sqrt(1/(2*sym('pi'))*int(((V_p/R)*sin(wt))^2,wt,0,sym('pi'))))
2 % I_LRMS = eval(I_LRMS)

```

A tensão máxima sobre os diodos corresponde ao dobro da tensão máxima da fonte de alimentação devido aos dois enrolamentos do secundário conectados em série.

$$V_{DMax} = 2 V_p$$

```

1 V_DMax = 2*V_p

```

$$V_{D\,Max} = 2 V_p \quad (2.17)$$

E a corrente máxima é proporcional à tensão sobre a resistência,

$$I_{D\,Max} = \frac{(V_p - E)}{R}$$

```
1 I_DMax = (V_p - E)/R
```

$$I_{D\,Max} = -\frac{E - V_p}{R} \quad (2.18)$$

### 2.2.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 2.11, 2.12, 2.15, 2.16, 2.17 e 2.18.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 f = 60;
4 E = 150;
5 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 theta_1 = asin(E/V_p)
```

$$\theta_1 = 0.5031$$

```
1 theta_2 = pi - asin(E/V_p)
```

$$\theta_2 = 2.6385$$

```
1 V_LMed = (E*(pi + theta_1 - theta_2) + V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)))/pi
```

$$V_{L\,Med} = 221.5697$$

```
1 I_LMed = (V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)) + E*(theta_1 - theta_2))/(R*pi)
```

$$I_{L\,Med} = 7.1570$$

```
1 V_LRMS = sqrt(E^2*(pi + theta_1 - theta_2) - ...
2 0.2500*V_p^2*(2*theta_1 - 2*theta_2 - sin(2*theta_1) + sin(2*theta_2)))/pi^0.5
```

$$V_{LRMS} = 230.4775$$

```

1 sigma1 = 0.250*V_p^2*sin(2*theta_1);
2 sigma2 = -0.250*V_p^2*sin(2*theta_2);
3 sigma3 = -E^sym(2)*theta_1;
4 sigma4 = E^sym(2)*theta_2;
5 sigma5 = -0.5*V_p^2*theta_1;
6 sigma6 = 0.5*V_p^2*theta_2;
7 sigma7 = -2*E*V_p*cos(theta_1);
8 sigma8 = 2*E*V_p*cos(theta_2);
9 V_RRMS = sqrt(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + sigma6 + sigma7 + ...
10 sigma8)/pi^0.5

```

$$V_{RRMS} = 95.6503$$

```

1 I_LRMS = V_RRMS/R

```

$$I_{LRMS} = 9.5650$$

```

1 V_DMax = 2*V_p

```

$$V_{DMax} = 622.2540$$

```

1 I_DMax = (V_p - E)/R

```

$$I_{DMax} = 16.1127$$

## 2.3 Carga Indutiva RL

### 2.3.1 Topologia

Este retificador é composto por uma fonte de tensão, um transformador com dois secundários e por dois diodos. A Carga é indutiva, formada por um resistor e por um indutor conectados em série, conforme a Fig. 2.8.

### 2.3.2 Etapas de operação

Para esta topologia foi acrescentada uma indutância em série com a carga resistiva, então a carga apresenta uma característica indutiva. O comportamento do circuito é similar ao do retificador da seção 2.1 em termos de etapas de operação, exceto que a corrente deixa de ser proporcional à tensão. O diodo  $D_1$  conduz durante o semiciclo positivo (Fig. 2.9(a)) e o diodo  $D_2$  durante o semiciclo negativo (Fig. 2.9(b)).

Figura 2.8. Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva.

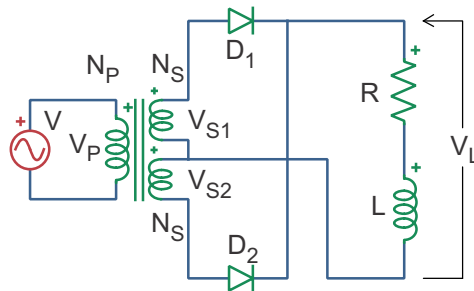


Figura 2.9. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva.

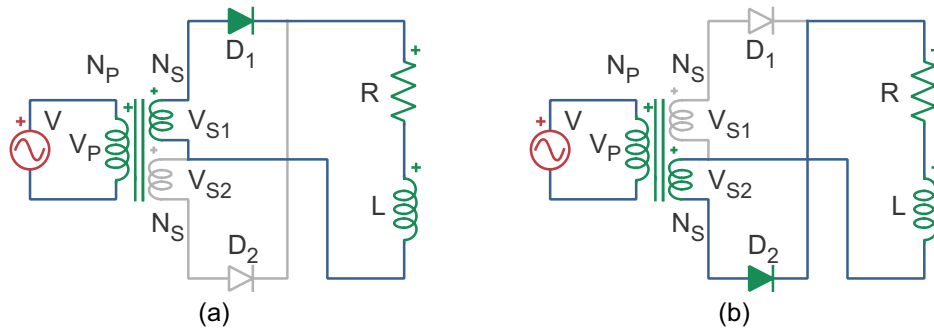
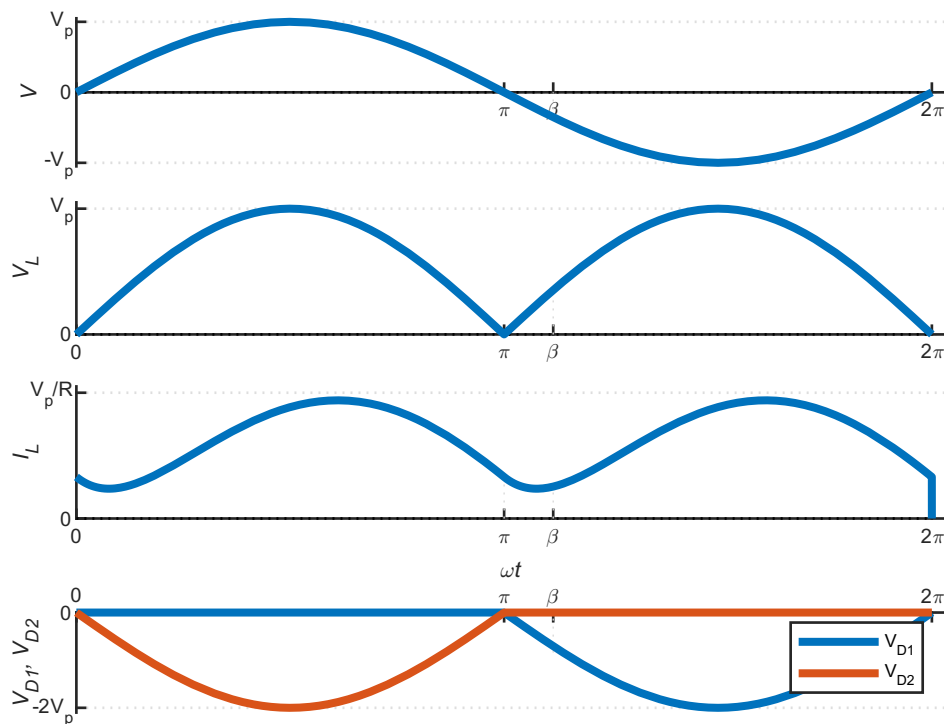


Figura 2.10. Principais formas de onda.



### 2.3.3 Formas de onda

As principais formas de onda podem ser vistas na Fig. 2.10, a seguir. Observa-se que a corrente nunca se anula e, portanto, o retificador sempre operará no modo de condução contínua, MCC.

```
1 Figura_WF_2pulsosPM_para_carga_RL();
```

#### 2.3.3.1 Determinação de $i_L(t)$

Inicialmente necessita-se definir algumas variáveis simbólicas para obter a corrente através do indutor.

```
1 % inicialização
2 clearvars
3 syms V_o w R L t i_L(t) s V_p X_L tau
```

Na seção 1.3 foi visto que a corrente através da carga é dada por 1.35, reproduzida aqui.

```
1 syms omega phi wt IL_0 Z
2 i_L(wt) = -(V_p*(sin(phi - wt) - exp((-wt/(omega*tau)))*sin(phi))...
3           - IL_0*Z*exp((-wt/(omega*tau))))/Z
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z}$$

A corrente inicial através do indutor,  $IL_0$ , não é nula, sendo necessário determiná-la, o que será feito a seguir.

Sabe-se que o valor da corrente ao final do semiciclo positivo pode ser obtido calculando-se 1.35 para  $\omega t = \pi$ .

```
1 i_L(sym('pi'))
```

$$i_L(\pi) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - \pi) - e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}}}{Z}$$

Fazendo-se  $i_L(0) = i_L(\pi)$ , pois a função é periódica, pode-se determinar  $IL_0$ .

```
1 eq = i_L(0)==i_L(sym('pi'))
```

$$eq = IL_0 = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - \pi) - e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}}}{Z}$$

E resolvendo para  $IL_0$

```
1 IL_0 = solve(eq, IL_0)
```

$$IL_0 = -\frac{V_p \sin(\phi) - V_p \sin(\phi - \pi) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Como

$$\sin(\phi) = -\sin(\phi - \pi)$$

Fazendo a substituição

```
1 IL_0 = subs(IL_0, sin(phi - sym('pi')), -sin(phi))
```

$$IL_0 = -\frac{V_p \sin(\phi) + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

```
1 IL_0 = simplifyFraction(IL_0)
```

$$IL_0 = -\frac{V_p \sin(\phi) + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Substituindo  $IL_0$  na equação de  $i_L(wt)$ , 1.35

```
1 i_L(wt)=subs(i_L(wt), 'IL_0', IL_0)
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) + \frac{Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \left( V_p \sin(\phi) + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}}{Z}$$

Tentando simplificar a equação...

```
1 i_L = simplifyFraction(i_L,"Expand",true)
```

$$i_L(wt) = -\frac{2 V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) + V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}}$$

Agrupando os termos comuns

```
1  
2 i_L = collect(i_L,{'V_p', 'Z'})
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left( 2 e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) + \sin(\phi - wt) e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}{Z \left( e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}$$

```
1 i_L = collect(i_L, sym(sin(phi - wt)))
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \sin(\phi - wt)}{Z} - \frac{2 V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z \left( e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}$$

Os termos exponenciais desta equação podem ser reescritos manualmente, multiplicando numerador e denominador por  $e^{-wt/(\tau\omega)}$ , conforme segue.

$$\frac{e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}{e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}} = \frac{e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{e^{\frac{wt}{\omega\tau}} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}} = \frac{e^{\frac{\pi-wt}{\omega\tau}}}{1 - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Assim,

```
1 i_L = subs(i_L, (exp((sym('pi'))/(omega*tau)))/(exp(wt/(omega*tau)) - ...
2 exp((sym('pi'))/(omega*tau))*exp(wt/(omega*tau)))), ...
3 exp(-(wt-sym('pi'))/(tau*omega))/(1-exp(sym('pi'))/(tau*omega))))
```

$$i_L(wt) = \frac{2 V_p e^{\frac{\pi-wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z (e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1)} - \frac{V_p \sin(\phi - wt)}{Z}$$

Que pode ser simplificada manualmente para:

$$i_L(wt) = \frac{V_p}{Z} \left( \frac{2 e^{\frac{\pi-wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1} - \sin(\phi - wt) \right)$$

Dessa forma tem-se

```
1 i_L = (V_p/Z)*((2*exp(((sym('pi')) - wt)/(omega*tau))*sin(phi))/...
2 ((exp((sym('pi'))/(omega*tau))) - 1)) - (sin(phi - wt)))
```

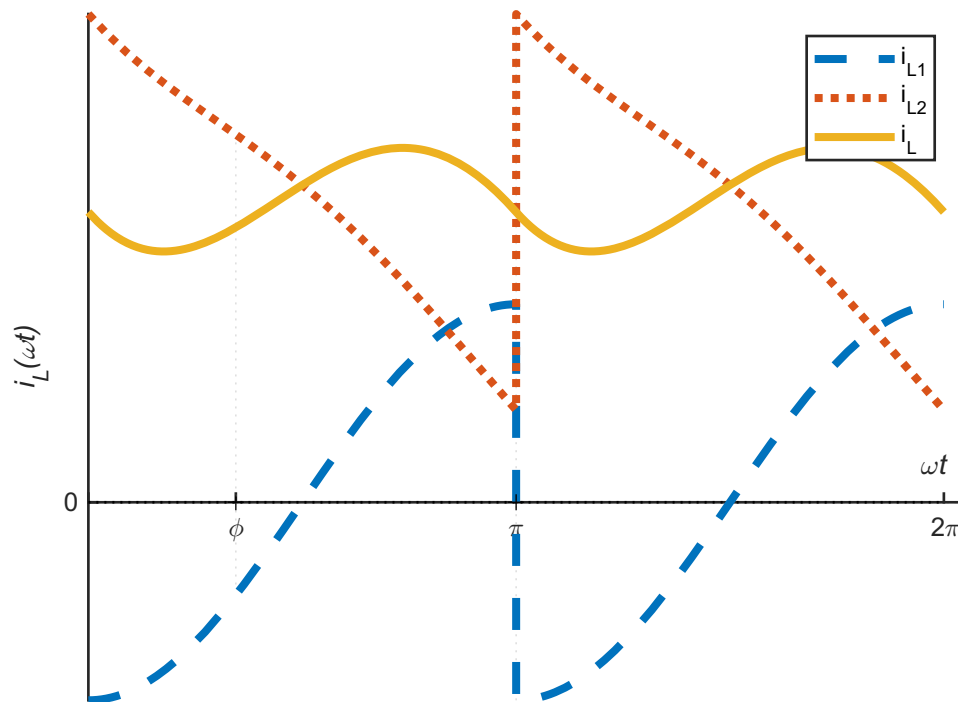
$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) - \frac{2 e^{\frac{\pi-wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1} \right)}{Z} \quad (2.19)$$

Assim é obtida a equação da corrente através do indutor.

Na Fig. 2.11 é mostrada a forma de onda da corrente  $i_L(wt)$  e as formas de onda das componentes ( $i_{L1}(wt)$  e  $i_{L2}(wt)$ ) que somadas compõem a corrente através da carga. A corrente  $i_{L1}(wt)$  corresponde ao decaimento exponencial, enquanto que  $i_{L2}(wt)$  é uma forma de onda senoidal defasada pelo ângulo  $\phi$ , que é o fator de potência do circuito. Observa-se que as frequências das formas de onda na carga correspondem ao dobro da frequência da fonte de entrada.

```
1 Figura_IL_2pulsosPM_para_carga_RL();
```

Figura 2.11. Forma de onda da corrente através da carga e de suas componentes.



### 2.3.3.2 Análise utilizando a série de Fourier

A Série de Fourier para a tensão através da carga pode ser calculada através da equação abaixo. Nessa equação observa-se que os argumentos do seno e do cosseno foram multiplicados por dois porque a frequência da tensão através da carga corresponde ao dobro da frequência da fonte que alimenta o retificador.

$$v(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2n\omega t) + b_n \sin(2n\omega t))$$

$$v(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2n\omega t) + b_n \sin(2n\omega t))$$

e a corrente através da carga pode ser calculada conforme abaixo.

$$i(\omega t) = \frac{a_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{Z_n} \cos(2n\omega t) + \frac{b_n}{Z_n} \sin(2n\omega t) \right)$$

$$i(\omega t) = \frac{a_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(2n\omega t - \phi_n) + b_n \sin(2n\omega t - \phi_n)}{Z_n}$$

Observa-se que para se obter a equação da corrente através da carga, basta dividir a tensão pelo valor de impedância correspondente. Como as impedâncias possuem termos complexos as senóides são deslocadas.

```
1 syms V_p wt n omega L R % definição das variáveis simbólicas
2 assume(n, {'positive', 'integer'}) % definição das restrições
```

Como a frequência da forma de onda sobre a carga é o dobro da frequência da entrada o intervalo a ser considerado inicia em zero e termina em  $\pi$ .

- Limites de integração

```

1 lim_inf = 0;
2 lim_sup = sym('pi');

```

A forma de onda de tensão sobre a carga durante o semiciclo positivo é dada por

```

1 vL(wt) = V_p*sin(wt);

```

### - Determinação dos coeficientes

```

1 a_0 = 1/(sym('pi'))*int(vL,wt,lim_inf,lim_sup)

```

$$a_0 = -\frac{V_p (\cos(\pi) - 1)}{\pi}$$

```

1 a_n(n) = 2/sym('pi')*int(vL*cos(n*2*wt),wt,lim_inf,lim_sup)

```

$$a_n(n) = \frac{2 V_p \left( \frac{\cos(\pi (2n-1))}{4n-2} - \frac{\cos(\pi (2n+1))}{4n+2} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n+2} \right)}{\pi}$$

Quando o argumento da função cosseno é múltiplo ímpar de  $\pi$ , como é o caso de  $2n - 1$  e  $2n + 1$ ,

$$\cos(n\pi) = -1, n \text{ ímpar}$$

```

1 a_n(n) = subs(a_n, {cos(sym('pi')*(2*n + 1)), cos(sym('pi')*(2*n - 1))}, {-1, -1})

```

$$a_n(n) = -\frac{2 V_p \left( \frac{2}{4n-2} - \frac{2}{4n+2} \right)}{\pi}$$

```

1 a_n = simplify(a_n)

```

$$a_n(n) = -\frac{4 V_p}{\pi (4n^2 - 1)}$$

```

1 b_n(n) = 2/sym('pi')*int(vL*sin(n*2*wt),wt,lim_inf,lim_sup)

```

$$b_n(n) = \frac{2 \left( \frac{V_p \sin(\pi (2n-1))}{4n-2} - \frac{V_p \sin(\pi (2n+1))}{4n+2} \right)}{\pi}$$

Quando o argumento da função seno é múltiplo de  $\pi$

$$\sin(n\pi) = 0$$

```

1 b_n = subs(b_n, {sin(sym('pi')*(2*n + 1)), sin(sym('pi')*(2*n - 1))}, {0, 0})

```

$$b_n(n) = 0$$

$$Z_n(n) = \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}$$

$$Z_n(n) = \sqrt{L^2 n^2 \omega^2 + R^2}$$

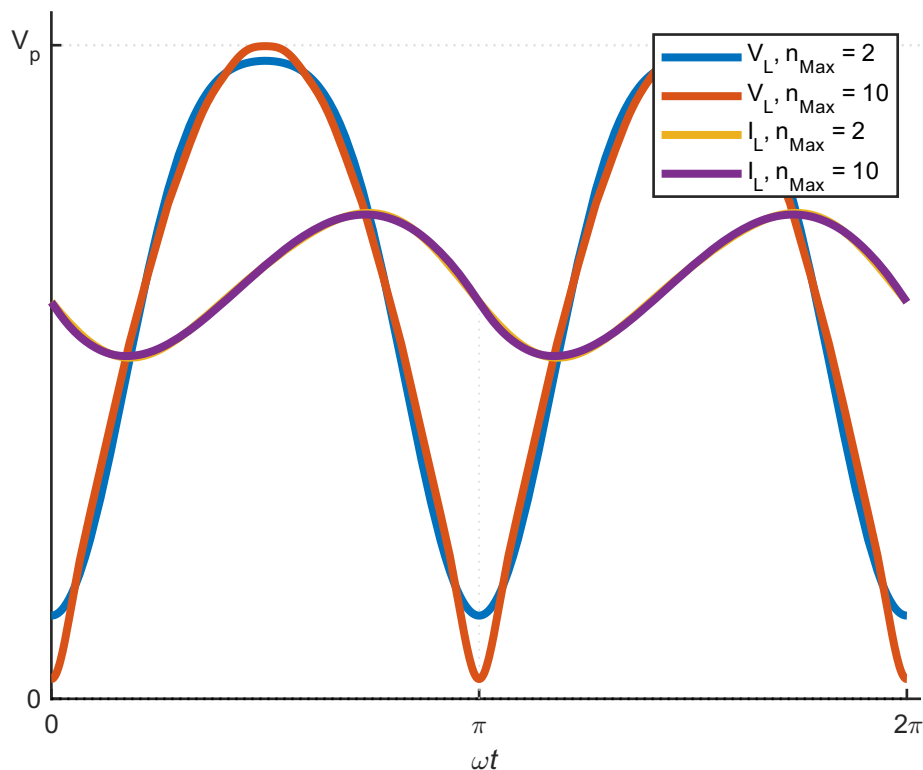
$$\phi_n(n) = \text{atan2}(n\omega L, R)$$

$$\phi_n(n) = \text{atan2}(L n \omega, R)$$

A Fig. 2.12 mostra o gráfico da Série de Fourier obtida para a tensão e para a corrente através da carga, sendo que foi variada a quantidade de termos utilizados para o desenvolvimento da série. Foram utilizados dois termos para gerar um par de formas de onda e dez termos para gerar o outro par. Observa-se que as formas de onda para a corrente são praticamente idênticas, independentemente da quantidade de termos utilizada para processar a série de Fourier.

$$\text{Figura\_VL\_IL\_2pulsosPM\_para\_carga\_RL\_Serie\_Fourier;}$$

Figura 2.12. Forma de onda da corrente através da carga.



### 2.3.4 Equações para o projeto

As equações das tensões  $V_{LMed}$ ,  $V_{LRMS}$ ,  $V_{DMax}$  e de  $I_{LMed}$  são as mesmas da seção 2.1.4 e repetidas aqui por conveniência.

```
1 syms V_p wt
2 V_LMed = 1/(sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,pi)
```

$$V_{LMed} = \frac{2V_p}{\pi} \quad (2.20)$$

```
1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 1/(sym('pi'))*int(V_p*sin(wt)/R,wt,0,pi)
```

$$I_{LMed} = \frac{2V_p}{R\pi} \quad (2.21)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/sym('pi')*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,sym('pi')))
```

$$V_{LRMS} = \frac{V_p \sqrt{0.5000\pi - 0.2500 \sin(2\pi)}}{\pi^{0.5000}}$$

Quando o argumento da função seno é um número inteiro e é múltiplo por  $\pi$

$$\sin(n\pi) = 0$$

```
1 V_LRMS = subs(V_LRMS, {sin(sym('pi')*2)}, {0})
```

$$V_{LRMS} = \frac{V_p \sqrt{0.5000\pi}}{\pi^{0.5000}} \quad (2.22)$$

A corrente eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$I_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (i_L(\omega t))^2 d(\omega t)}$$

```
1 %clearvars
2 syms V_p phi wt tau Z, assume([V_p, Z], 'positive')
3 i_L = -V_p*(sin(phi - wt)/Z + (2*exp((sym('pi'))/(omega*tau))*sin(phi))/...
4 (Z*(exp(wt/(omega*tau)) - exp((sym('pi'))/(omega*tau))*exp((wt/(omega*tau))))));
5 I_LRMS = sqrt(1/(sym('pi'))*int((i_L)^2,wt,0,sym('pi')))
```

$$I_{LRMS} = \sqrt{\frac{\int_0^\pi V_p^2 \left( \frac{\sin(\phi - \omega t)}{Z} + \frac{2e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z \left( e^{\frac{\omega t}{\tau}} - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{\omega t}{\tau}} \right)} \right)^2 d\omega t}{\pi^{0.5000}}} \quad (2.23)$$

Como não foi possível obter um resultado algébrico, deve-se calcular  $I_{L\text{ RMS}}$  numericamente.

A tensão máxima sobre o diodo corresponde ao dobro da tensão máxima da fonte de alimentação, devido aos dois enrolamentos secundários do transformador em série.

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\text{ Max}} = V_p \quad (2.24)$$

A corrente máxima pode ser obtida derivando-se a equação da corrente e igualando a zero,

```
1 % Por exemplo:
2 % eq = diff(i_L,wt)==0
```

multiplica-se por  $Z/V_p$  para simplificar e substitui-se  $\omega t$  por  $t_{Max}$

```
1 % Por exemplo:
2 % eq = subs(eq*Z/V_p,wt, sym('t_Max'))
```

encontra-se  $t_{Max}$  numericamente e substitui-se em  $i_L(\omega t)$ . Um palpite inicial para a raiz é  $T/4$ .

```
1 % Por exemplo:
2 % t_Max = vpasolve(eq,sym('t_Max'),1/(4*f))
3 % I_LMax = i_L(t_Max)
```

Em termos práticos, o valor máximo que a corrente de carga poderá atingir é dado por

$$I_{D\text{ Max}} = V_p/R$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{D\text{ Max}} = \frac{V_p}{R} \quad (2.25)$$

### 2.3.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, utilizando as equações 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24 e 2.25.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 L = 50e-3;
4 f = 60;
5
6 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 omega = w;
2
3 tau = L/R
```

$$\tau = 0.0050$$

```
1 X_L = w*L
```

$$X_L = 18.8496$$

```
1 Z = sqrt(R^2+(X_L)^2)
```

$$Z = 21.3379$$

```
1 phi = atan2(X_L,R)
```

$$\phi = 1.0830$$

```
1 i_L(wt) = -V_p*(sin(phi - wt)/Z + (2*exp((pi/(omega*tau)))*sin(phi))/...
2 (Z*(exp(wt/(omega*tau)) - exp((pi/(omega*tau)))*exp((wt/(omega*tau))))))
```

$$i_L(wt) = 31.7598 e^{-0.5305 wt} + 14.5810 \sin(wt - 1.0830)$$

```
1
2 V_LMed = (2*V_p)/pi
```

$$V_{LMed} = 198.0696$$

```
1 I_LMed = (2*V_p)/(R*pi)
```

$$I_{LMed} = 19.8070$$

```
1 V_LRMS = (sqrt(2)/2)*V_p
```

$$V_{LRMS} = 220.0000$$

```
1 I_LRMS = sqrt(1/(pi)*int((i_L)^2,wt,0,pi))
```

$$I_{LRMS} = 19.9528$$

```
1 V_DMax = 2*V_p
```

$$V_{D_{Max}} = 622.2540$$

```
1 % Obtendo o ângulo em que a corrente de carga é máxima
2 syms wt_Max
3 eq = diff(subs(i_L(wt),wt,wt_Max))==0
```

$$eq = 14.5810 \cos(wt_{Max} - 1.0830) - 16.8491 e^{-0.5305 wt_{Max}} = 0$$

```
1 wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),2*pi/4)
```

$$wt_{Max} = 2.3071$$

```
1 I_LMax = i_L(wt_Max)
```

$$I_{L_{Max}} = 23.0527$$

ou, ao menos, a corrente é menor que

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{D_{Max}} = 31.1127$$

## 2.4 Carga RL com diodo de Roda Livre

### 2.4.1 Topologia

Esta topologia opera de maneira semelhante àquela apresentada na seção 2.3. O diodo de roda livre,  $D_{RL}$ , ajuda a proteger os dois outros diodos nos instantes da comutação da corrente entre os mesmos. Essa topologia está ilustrada na Fig. 2.13.

### 2.4.2 Etapas de operação

Durante o semiciclo positivo o diodo  $D_1$  está polarizado diretamente, estando em condução, Fig. 2.14(a). Dessa forma a tensão da fonte da entrada é aplicada à carga. Com  $D_1$  em condução é aplicada uma tensão negativa sobre  $D_2$  que permanece bloqueado durante esta etapa. Durante o semiciclo negativo o diodo  $D_2$  entra em condução, aplicando uma tensão positiva sobre a carga e negativa sobre o diodo  $D_1$ , fazendo com que este bloqueie, Fig. 2.14(b).

Figura 2.13. Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.

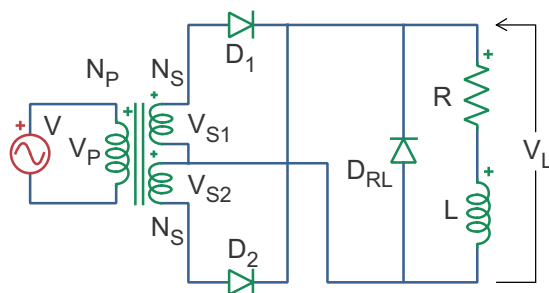
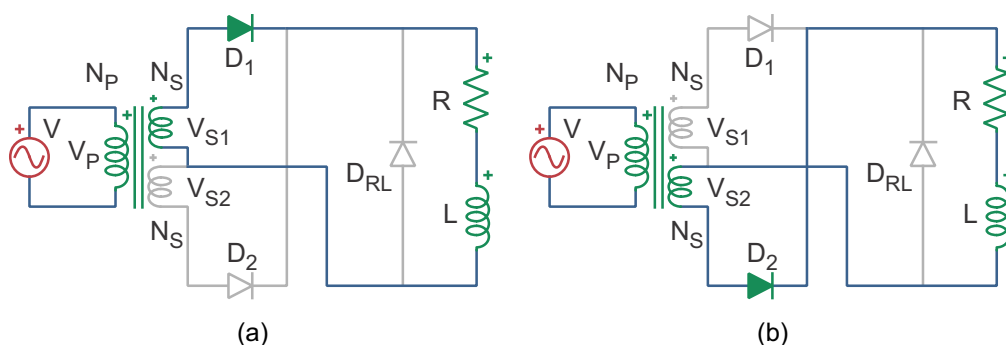


Figura 2.14. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



### 2.4.3 Formas de onda

As principais formas de onda são idênticas às aquelas da seção 2.3.3 e são ilustradas na Fig. 2.10.

### 2.4.4 Equações para o projeto

As principais equações para o projeto são as mesmas daquelas apresentadas seção 2.3.4.

### 2.4.5 Exemplos numéricos

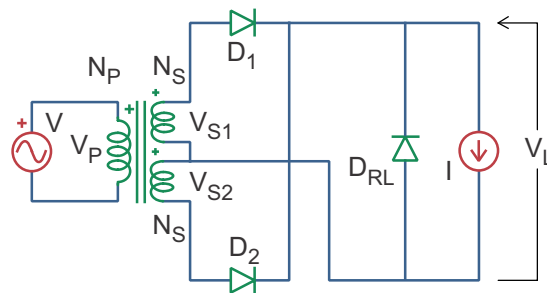
Os exemplos numéricos são idênticos àqueles da seção 2.3.5.

## 2.5 Carga I com Diodo de Roda-Livre

### 2.5.1 Topologia

A carga conectada à esta topologia é uma fonte de corrente ou pode ser uma carga RL com uma indutância muito alta. Devido à característica indutiva da carga, a corrente permanece praticamente constante e é importante que haja um diodo em paralelo com a mesma para proteger os diodos  $D_1$  e  $D_2$  nos instantes de suas comutações, Fig. 2.15.

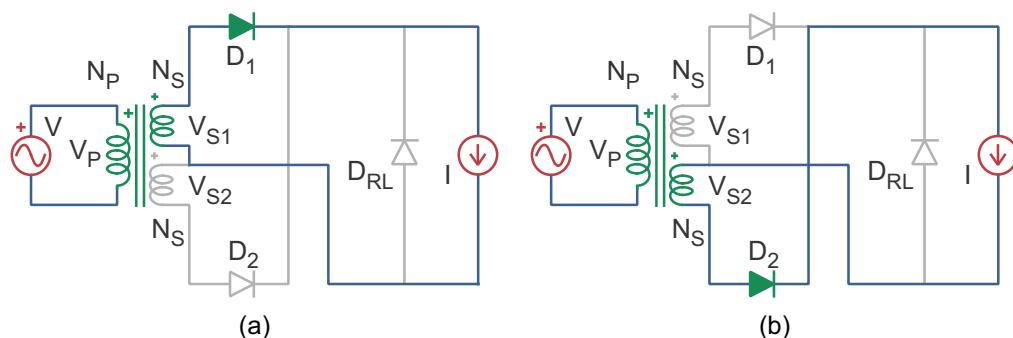
Figura 2.15. Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga de fonte de corrente.



### 2.5.2 Etapas de operação

Durante o semiciclo positivo toda a corrente de carga circula através do diodo  $D_1$ , pois este está polarizado diretamente, Fig. 2.16(a), enquanto  $D_2$  está bloqueado. Durante o semiciclo negativo, toda a corrente de carga circula através do diodo  $D_2$  e o diodo  $D_1$  se encontra bloqueado, Fig. 2.16(b).

Figura 2.16. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga de fonte de corrente.



### 2.5.3 Formas de onda

As principais formas de ondas estão mostradas na Fig. 2.17. Observa-se que a corrente através da carga é contínua e igual a  $I$  e que a mesma circula através do diodo  $D_1$  durante o semiciclo positivo e através do diodo  $D_2$  durante o semiciclo negativo.

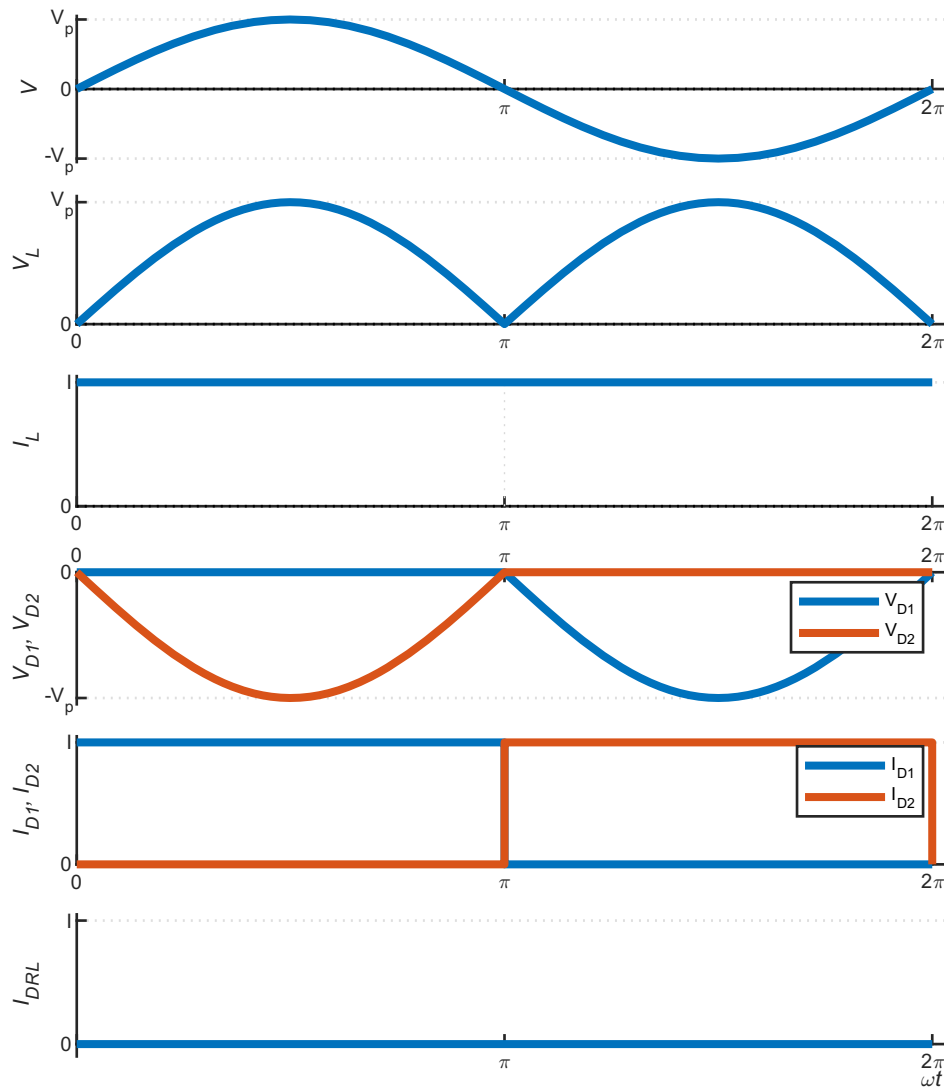
1 Figura\_WF\_2pulsosPM\_para\_carga\_I()

### 2.5.4 Equações para o projeto

A tensão média sobre a carga é calculada através da equação

```
1 syms V_p wt I
2 V_LMed = 1/(sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,pi)
```

Figura 2.17. Principais formas de onda.



$$V_{L\ Med} = \frac{2V_p}{\pi} \quad (2.26)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

```
1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 1/(sym('pi'))*int(I,wt,0,sym('pi'))
```

$$I_{L\ Med} = I \quad (2.27)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/(pi)*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,pi))
```

$$V_{LRMS} = 0.7071 V_p \quad (2.28)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

```
1 syms V_p wt R, assume([I, sym('pi')], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(1/(sym('pi'))*int(I^2,wt,0,sym('pi')))
```

$$I_{LRMS} = I \quad (2.29)$$

A tensão máxima sobre os diodos corresponde ao dobro da tensão máxima da fonte de alimentação.

$$V_{DMax} = 2 V_{DRLMax} = 2 V_p$$

```
1 V_DMax = 2*V_p
```

$$V_{DMax} = 2 V_p \quad (2.30)$$

E a corrente máxima,

$$I_{DMax} = I_{DRLMax} = I$$

```
1 I_DMax = I
```

$$I_{DMax} = I \quad (2.31)$$

### 2.5.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 2.26, 2.27, 2.28, 2.29, 2.30 e 2.31.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 I = 10;
3
4 V_LMed = 2*V_p/pi
```

$$V_{LMed} = 198.0696$$

```
1 I_LMed = I
```

$$I_{LMed} = 10$$

$$1 \quad V_{LRMS} = (\sqrt{2}/2) * V_p$$

$$V_{LRMS} = 220.0000$$

$$1 \quad I_{LRMS} = I$$

$$I_{LRMS} = 10$$

$$1 \quad V_{DMax} = 2 * V_p$$

$$V_{DMax} = 622.2540$$

$$1 \quad I_{DMax} = I$$

$$I_{DMax} = 10$$

## 2.6 Conclusão

Esta topologia necessita de dois transformadores para a obtenção do ponto médio que funciona como terminal Terra para a carga. Sua desvantagem está na tensão sobre os diodos que corresponde ao dobro da tensão de cada secundário do transformador, de modo que os diodos utilizados devem suportar valores superiores ao valor da tensão sobre a carga. Além disso, há a necessidade do transformador, o que certamente encarece a topologia.

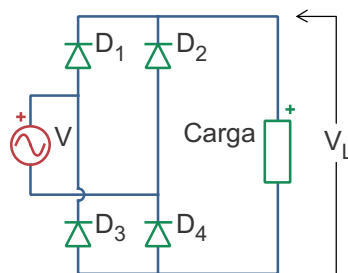
Como pontos positivos, tem-se o isolamento da carga e a possibilidade de escalamento do valor de tensão sobre a mesma, utilizando transformador redutor ou elevador.

## Capítulo 3

# Retificador Monofásico de Onda Completa em Ponte

A Fig. 3.1 ilustra o retificador monofásico de onda completa à diodo. Inicialmente será feita análise com carga  $R$ , puramente resistiva. Este retificador compartilha muitas características com a topologia do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo apresentada no capítulo anterior. De maneira geral, neste caso, para o semiciclo positivo o diodo  $D_1$  conduzirá juntamente com o diodo  $D_4$  e para o semiciclo negativo o diodo  $D_2$  conduzirá juntamente com o diodo  $D_3$ . Além disso, este conversor difere pelo fato de que a tensão reversa máxima sobre os diodos corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação. Dessa forma, devido à similaridade entre as topologias, este capítulo somente evidenciará as diferenças entre as estruturas derivadas.

Figura 3.1. Retificador monofásico de onda completa à diodo.

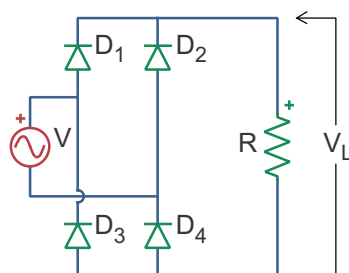


### 3.1 Carga R

#### 3.1.1 Topologia

O retificador mostrado na Fig. 3.2 é formado por uma fonte de tensão, um diodo e pela carga  $R$ . A operação desta topologia é idêntica àquela apresentada em 2.1 exceto pelo que foi comentado anteriormente.

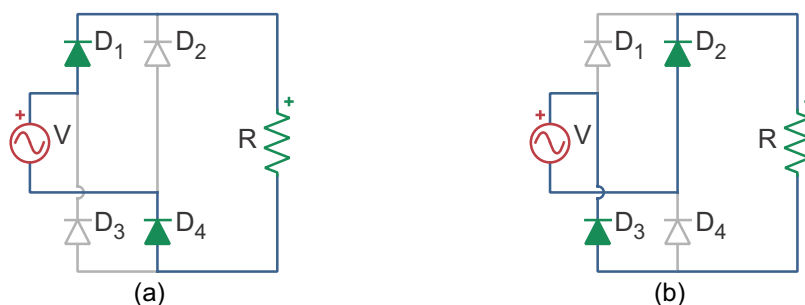
Figura 3.2. Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga R.



### 3.1.2 Etapas de operação

Para esta topologia o modo de operação é idêntico ao apresentado na seção 2.1.2. A Fig. 3.3(a) ilustra o circuito ativo para o semiciclo positivo da tensão de alimentação e a Fig. 3.3(b) para o semiciclo negativo.

Figura 3.3. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga R.



### 3.1.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 3.4, a seguir. Observa-se que ambos semiciclos da tensão de entrada são retificados de modo que somente é aplicada tensão positiva à carga. A corrente através da carga é proporcional à sua tensão.

1 Figura\_WF\_2pulsos\_para\_carga\_R();

### 3.1.4 Equações para o projeto

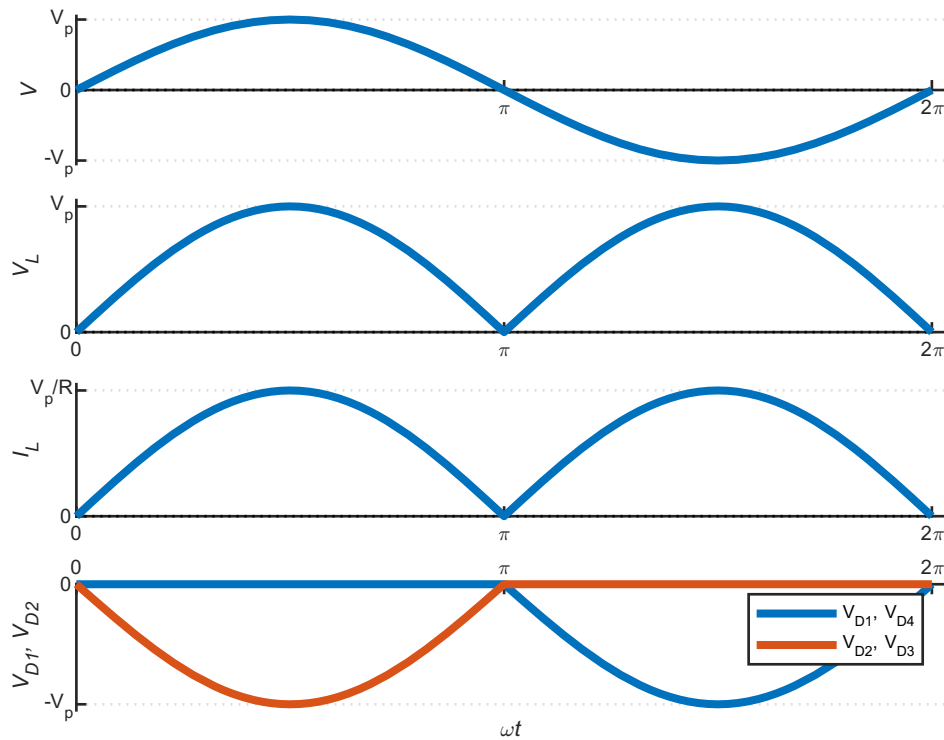
As equações para projeto são idênticas, exceto que a tensão máxima sobre os diodos corresponde à tensão da fonte de alimentação. Dessa forma,

$$V_{D\text{Max}} = V_p$$

1 syms V\_p  
2 V\_DMax = V\_p

$$V_{D\text{Max}} = V_p \quad (3.1)$$

Figura 3.4. Principais formas de onda.



### 3.1.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir. Serão utilizadas as equações 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 3.1 e 2.8.

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3
4 V_LMed = 2*V_p/pi

```

$$V_{LMed} = 198.0696$$

```

1 I_LMed = 2*V_p/(R*pi)

```

$$I_{LMed} = 19.8070$$

```

1 V_LRMS = sqrt(2)/2*V_p

```

$$V_{LRMS} = 220.0000$$

```

1 I_LRMS = (sqrt(2)/2)*V_p/R

```

$$I_{LRMS} = 22.0000$$

$$V_{DMax} = V_p$$

$$V_{DMax} = 311.1270$$

$$I_{DMax} = V_p/R$$

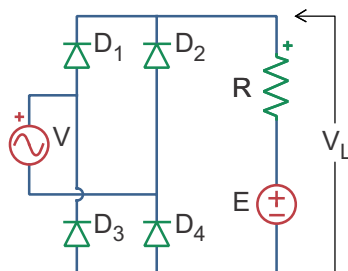
$$I_{DMax} = 31.1127$$

## 3.2 Carga RE

### 3.2.1 Topologia

Esta topologia é semelhante à topologia analisada na seção 3.1 exceto que a carga é formada por uma resistência em série com uma fonte de tensão de valor  $E$ , conforme ilustrado na Fig. 3.5.

Figura 3.5. Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.



### 3.2.2 Etapas de operação

Para esta topologia, os diodos  $D_1$  e  $D_4$  conduzem durante o semiciclo positivo enquanto a tensão da fonte de entrada  $V(\omega t)$ , for maior que a tensão da fonte  $E$  (Fig. 3.6(a)). Por sua vez, os diodo  $D_2$  e  $D_3$  conduzem durante o semiciclo negativo quando a tensão negativa da fonte de entrada  $-V(\omega t)$ , for maior que a tensão da fonte  $E$  (Fig. 3.6(b)). Caso contrário, os diodos se encontram bloqueados e assim não há corrente através da carga, de forma que não há nenhuma queda de tensão sobre a resistência  $R$  (Fig. 3.6(c)).

Os circuitos equivalentes são mostrados na (Fig. 3.6).

Figura 3.6. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.

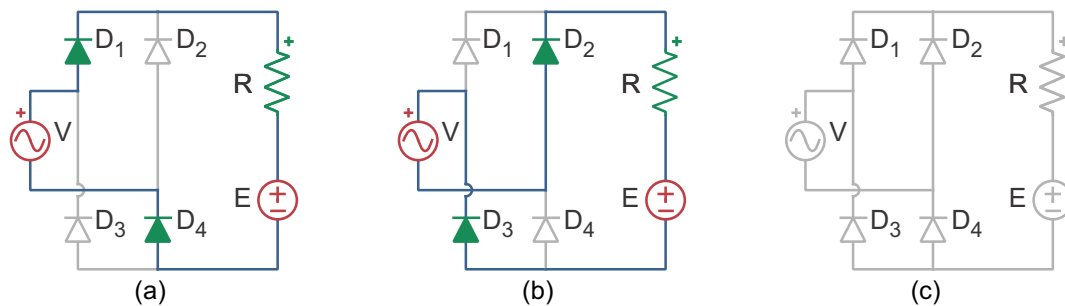
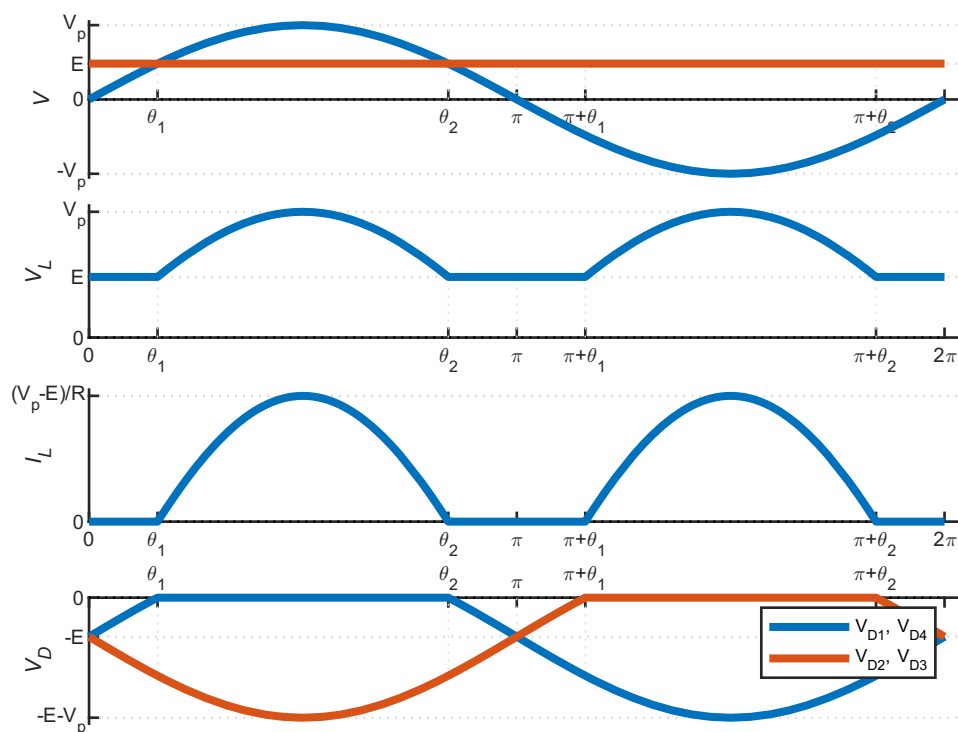


Figura 3.7. Principais formas de onda.



### 3.2.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 3.7. Observa-se que a interseção entre as formas de onda  $V(\omega t)$  e  $E$  ocorre para os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e se repete para  $\pi + \theta_1$  e  $\pi + \theta_2$ . Durante estes períodos, a tensão na carga é sempre superior à tensão da fonte  $E$ . A corrente através da carga é proporcional à tensão sobre a resistência  $R$ .

1 Figura\_WF\_2pulsos\_para\_carga\_RE()

### 3.2.4 Equações para o projeto

As equações para o projeto deste retificador são idênticas àsquelas da seção 2.2.4, exceto para a tensão reversa máxima sobre os diodos, mostrada à seguir e pormenorizada logo após.

$$V_{D\text{Max}} = V_p + E$$

### Tensão sobre os diodos

- Entre  $\theta_1$  e  $\theta_2$ : o diodo  $D_1$  está conduzindo, logo sua tensão é nula;

$$V_{D1} = 0$$

- Entre  $\pi + \theta_1$  e  $\pi + \theta_2$  o diodo  $D_2$  está conduzindo; a tensão sobre  $D_1$  será igual à tensão fornecida pela fonte de alimentação;

$$V_{D1} = V_p \sin(\omega t)$$

- Nos intervalos  $[0, \theta_1]$ ,  $[\theta_2, \pi + \theta_1]$  e  $[\pi + \theta_2, 2\pi]$  nenhum diodo está em condução. Então

$$V_{D1} = V_p \sin(\omega t) - E$$

O mesmo raciocínio é válido para a tensão sobre o diodo  $D_2$ .

Dessa forma,

```
1 syms E V_p
2 V_DMax = V_p + E
```

$$V_{D\text{Max}} = E + V_p \quad (3.2)$$

### 3.2.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir por meio das equações 2.11, 2.12, 2.15, 2.16, 3.2 e 2.18.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 f = 60;
4 E = 150;
5 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 theta_1 = asin(E/V_p)
```

$$\theta_1 = 0.5031$$

```
1 theta_2 = pi - asin(E/V_p)
```

$$\theta_2 = 2.6385$$

```
1 V_LMed = (E*(pi + theta_1 - theta_2) + V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)))/pi
```

$$V_{L\ Med} = 221.5697$$

```
1 I_LMed = (V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)) + E*(theta_1 - theta_2))/(R*pi)
```

$$I_{L\ Med} = 7.1570$$

```
1 V_LRMS = V_LRMS = sqrt(E^2*(pi + theta_1 - theta_2) - ...
2 0.2500*V_p^2*(2*theta_1 - 2*theta_2 - sin(2*theta_1) + sin(2*theta_2)))/pi^0.5
```

$$V_{L\ RMS} = 230.4775$$

```
1 sigma1 = 0.250*V_p^2*sin(2*theta_1);
2 sigma2 = -0.250*V_p^2*sin(2*theta_2);
3 sigma3 = -E^sym(2)*theta_1;
4 sigma4 = E^sym(2)*theta_2;
5 sigma5 = -0.5*V_p^2*theta_1;
6 sigma6 = 0.5*V_p^2*theta_2;
7 sigma7 = -2*E*V_p*cos(theta_1);
8 sigma8 = 2*E*V_p*cos(theta_2);
9 V_RRMS = sqrt(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + sigma6 + sigma7 + ...
10 sigma8)/pi^0.5
```

$$V_{R\ RMS} = 95.6503$$

```
1 I_LRMS = V_RRMS/R
```

$$I_{L\ RMS} = 9.5650$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\ Max} = 311.1270$$

```
1 I_DMax = (V_p - E)/R
```

$$I_{D\ Max} = 16.1127$$

## 3.3 Carga Indutiva RL

### 3.3.1 Topologia

Este retificador é composto por uma fonte de tensão, quatro diodos e pela carga. A carga é indutiva, formada por um resistor e por um indutor conectados em série, conforme a Fig. 3.8.

Figura 3.8. Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva.

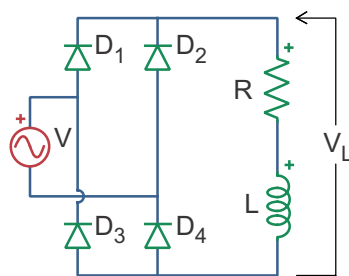
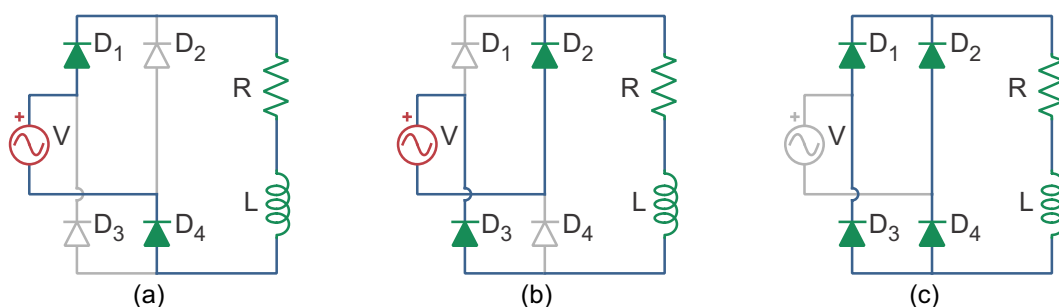


Figura 3.9. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva.



### 3.3.2 Etapas de operação

Esta topologia opera semelhantemente àquela apresentada na seção 2.3.2. Os modos de operação são mostrados na Fig. 3.9, a seguir. O circuito ativo para o semiciclo positivo pode ser observado na Fig. 3.9(a), enquanto que para o semiciclo negativo, na Fig. 3.9(b).

### 3.3.3 Formas de onda

As principais formas de onda podem ser vistas na Fig. 3.10, a seguir. Observa-se que a corrente nunca se anula e, portanto, o retificador sempre operará no modo de condução contínua, MCC.

1 `Figura_WF_2pulsos_para_carga_RL();`

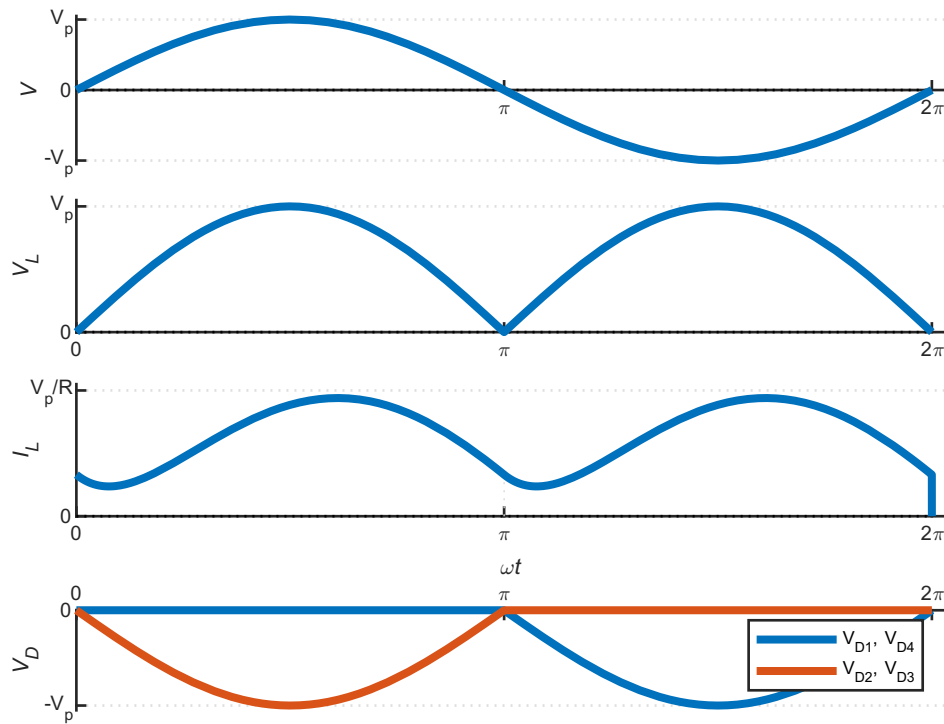
### 3.3.4 Equações para o projeto

As equações para o projeto são idênticas às da seção 2.3.4, exceto pela tensão máxima sobre os diodos, idêntica à seção 3.1.4.

### 3.3.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 3.1 e 2.25.

Figura 3.10. Principais formas de onda.



```

1 sympref('FloatingPointOutput',1);
2 V_p = sqrt(2)*220;
3 R = 10;
4 L = 50e-3;
5 f = 60;
6
7 w = 2*pi*f

```

$$w = 376.9911$$

```

1 omega = w;
2
3 tau = L/R

```

$$\tau = 0.0050$$

```

1 X_L = w*L

```

$$X_L = 18.8496$$

```

1 Z = sqrt(R^2+(XL)^2)

```

$$Z = 21.3379$$

```
1 phi = atan2(XL,R)
```

$$\phi = 1.0830$$

```
1 syms wt
2 i_L(wt) = -V_p*(sin(phi - wt)/Z + (2*exp((pi/(omega*tau)))*sin(phi))/...
3 (Z*(exp(wt/(omega*tau)) - exp((pi/(omega*tau)))*exp((wt/(omega*tau))))))
```

$$i_L(wt) = 31.7598 e^{-0.5305 wt} + 14.5810 \sin(wt - 1.0830)$$

```
1 V_LMed = (2*V_p)/pi
```

$$V_{L Med} = 198.0696$$

```
1 I_LMed = (2*V_p)/(R*pi)
```

$$I_{L Med} = 19.8070$$

```
1 V_LRMS = (sqrt(2)/2)*V_p
```

$$V_{LRMS} = 220.0000$$

```
1 I_LRMS = sqrt(1/(pi)*int((i_L)^2,wt,0,pi))
```

$$I_{LRMS} = 19.9528$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D Max} = 311.1270$$

```
1 % Obtendo o ângulo onde a corrente de carga é máxima
2 syms wt_Max
3 eq = diff(subs(i_L(wt),wt,wt_Max))==0
```

$$eq = 14.5810 \cos(wt_{Max} - 1.0830) - 16.8491 e^{-0.5305 wt_{Max}} = 0$$

```
1 % figure
2 % fplot(i_L,[0,2*pi])
3 wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),2*pi/4)
```

$$wt_{Max} = 2.3071$$

```
1 I_LMax = i_L(wt_Max)
```

$$i_{L Max} = 23.0527$$

ou menor que

```
1 I_DMax = V_p/R
```

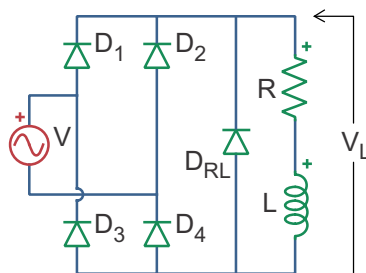
$$I_{D Max} = 31.1127$$

## 3.4 Carga RL com Diodo de Roda Livre

### 3.4.1 Topologia

Esta topologia opera de maneira semelhante àquela apresentada na seção 3.3.1. O diodo de roda livre,  $D_{RL}$ , ajuda a proteger os demais diodos durante os períodos de comutação da corrente entre os mesmos. Esta topologia está ilustrada na Fig. 3.11.

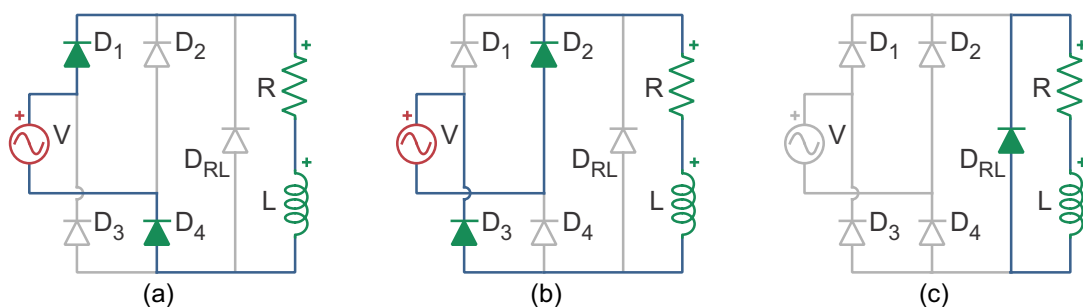
Figura 3.11. Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



### 3.4.2 Etapas de operação

Os diodos  $D_1$  e  $D_4$  conduzem durante o semiciclo positivo (Fig. 3.12(a)) e os diodos  $D_2$  e  $D_3$ , durante o negativo (Fig. 3.12(b)), conforme comentado anteriormente.

Figura 3.12. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



### 3.4.3 Formas de onda

As principais formas de onda são idênticas àquelas da seção 3.3.3 e são ilustradas na Fig. 3.10.

### 3.4.4 Equações para o projeto

As principais equações para o projeto são as mesmas daquelas apresentadas seção 3.3.4.

### 3.4.5 Exemplos numéricos

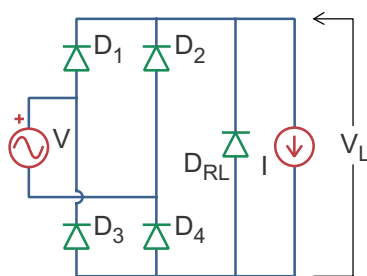
Os exemplos numéricos são idênticos àqueles da seção 3.3.5.

## 3.5 Carga I com Diodo de Roda-Livre

### 3.5.1 Topologia

Esta topologia é ilustrada na Fig. 3.13. A carga é formada por uma fonte de corrente ou pode ser uma carga com uma indutância muito alta. Devido à característica indutiva da carga a corrente permanece praticamente constante e é importante que haja um diodo em paralelo com a mesma para proteger os diodos  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  nos instantes de suas comutações, Fig. 3.13.

Figura 3.13. Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga de fonte de corrente.



### 3.5.2 Etapas de operação

Durante o semiciclo positivo é suprida energia para a carga através dos diodos  $D_1$  e  $D_4$ , enquanto os demais diodos permanecem bloqueados, Fig. 3.14(a). Por sua vez, durante o semiciclo negativo a energia flui para a carga através dos diodos  $D_2$  e  $D_3$ , Fig. 3.14(b).

O modo de operação mostrado na Fig. 3.14(c) somente poderá ocorrer, muito brevemente, nas transições entre os dois modos de operação.

### 3.5.3 Formas de onda

As principais formas de ondas estão mostradas na Fig. 3.15. Observa-se que a corrente através da carga é contínua e igual a  $I$  e que a mesma circula através dos diodos  $D_1$  e  $D_4$  durante o semiciclo positivo e através dos diodos  $D_2$  e  $D_3$  durante o semiciclo negativo, mantendo sempre um valor constante.

Figura 3.14. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga de fonte de corrente.

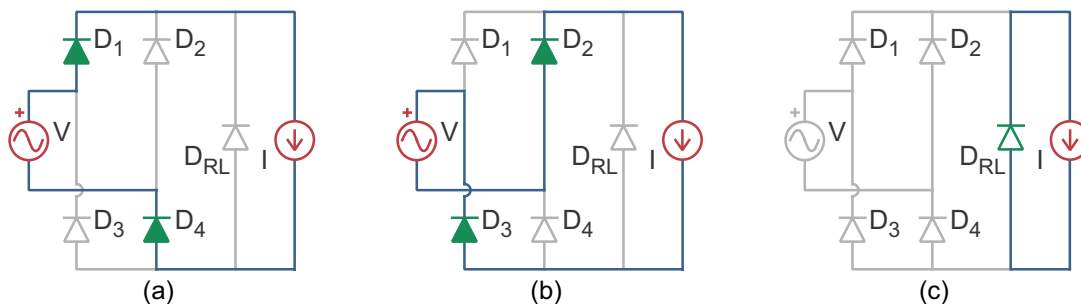
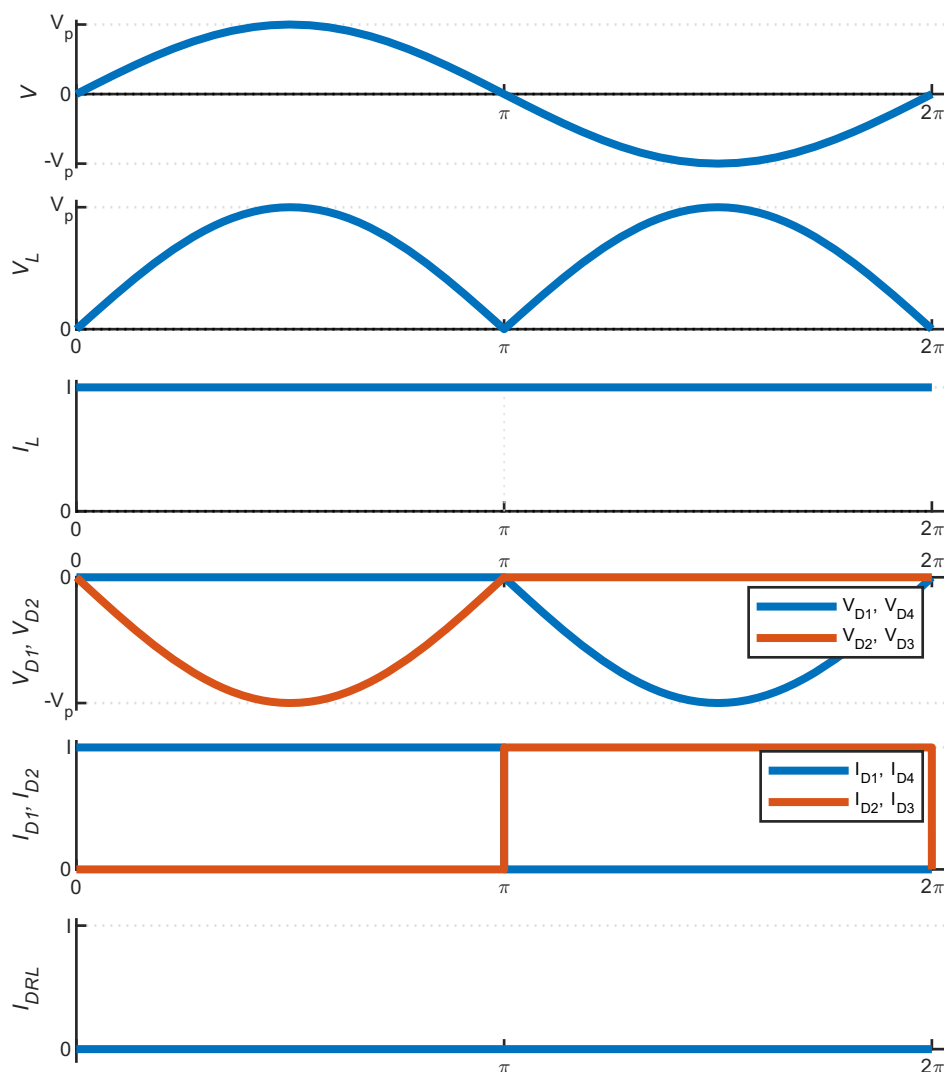


Figura 3.15. Principais formas de onda.



### 3.5.4 Equações para o projeto

Podem ser utilizadas as equações apresentadas em 2.5.4 para o projeto deste conversor, exceto para a tensão reversa sobre os diodos, que neste caso corresponde ao pico de tensão fornecido pela fonte de alimentação.

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\,Max} = V_p \quad (3.3)$$

### 3.5.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 2.26, 2.27, 2.28, 2.29, 3.3 e 2.31.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 I = 10;
3
4 V_LMed = 2*V_p/pi
```

$$V_{L\,Med} = 198.0696$$

```
1 I_LMed = I
```

$$I_{L\,Med} = 10$$

```
1 V_LRMS = (sqrt(2)/2)*V_p
```

$$V_{L\,RMS} = 220.0000$$

```
1 I_LRMS = I
```

$$I_{L\,RMS} = 10$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\,Max} = 311.1270$$

```
1 I_DMax = I
```

$$I_{D\,Max} = 10$$

## 3.6 Conclusão

Esta topologia se assemelha muito àquela estudada no capítulo 2. Neste capítulo foram evidenciadas as diferenças quanto à sua operação e principalmente quanto aos limites de tensão sobre os diodos.

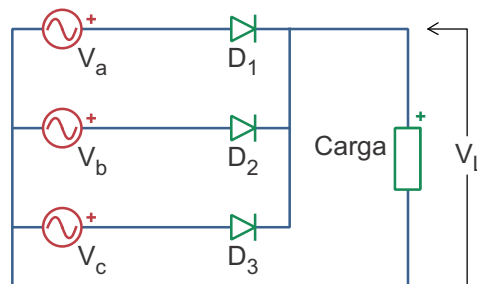
Este retificador não necessita de um transformador para seu funcionamento, no entanto são necessários quatro diodos e a carga não é isolada da fonte de alimentação. Caso seja desejável que haja isolamento ou escalamento de tensão, é possível adicionar um transformador em cascata com a fonte de entrada.

## Capítulo 4

# Retificador Trifásico de Meia Onda à Diodo

A Fig. 4.1 ilustra o retificador trifásico de meia onda à diodo. Inicialmente será feita análise com carga  $R$ , puramente resistiva. Em seguida serão estudadas outras configurações de carga. Este retificador é alimentado por três fontes senoidais trifásicas, defasadas entre si por  $120^\circ$  elétricos ou  $2\pi/3$ .

Figura 4.1. Retificador trifásico de meia onda à diodo.

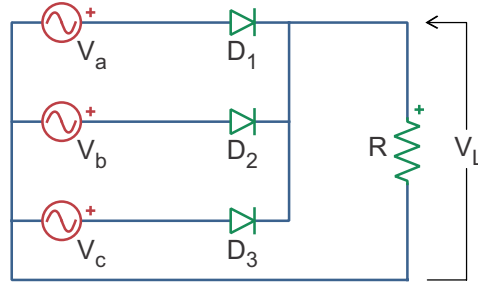


### 4.1 Carga $R$

#### 4.1.1 Topologia

O retificador mostrado na Fig. 4.2 é formado por três fontes de tensão, três diodos e pela carga  $R$ .

Figura 4.2. Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga R.

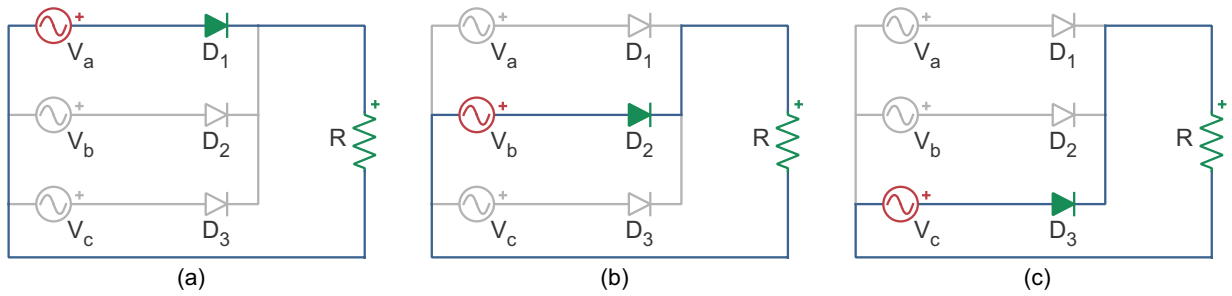


### 4.1.2 Etapas de operação

Para esta topologia o diodo  $D_1$  conduz entre os ângulos  $\pi/6$  e  $5\pi/6$  (Fig. 4.3(a)), enquanto os diodos  $D_2$  e  $D_3$  se encontram bloqueados. Durante este período a tensão da fonte  $V_a$  é aplicada sobre a Carga  $R$  e a corrente flui através da mesma no sentido positivo. Após o ângulo  $5\pi/6$  o diodo  $D_2$  entra em condução e os diodos  $D_3$  e  $D_1$  permanecem bloqueados até atingir o ângulo  $3\pi/2$ , (Fig. 4.3(b)). A tensão através da carga continua positiva porque a fonte  $V_b$  é positiva durante este período e o diodo  $D_2$  está em condução. Finalmente, após o ângulo  $3\pi/2$  ser atingido, o diodo  $D_3$  conduz enquanto os diodos  $D_1$  e  $D_2$  se encontram bloqueados (Fig. 4.3(c)). Como  $V_c$  é positiva, a corrente através da carga continua a fluir no sentido positivo.

Conforme visto, cada uma das fontes de alimentação contribui fornecendo potência para a carga durante um terço do período de operação, da mesma forma que cada um dos diodos conduz pelo mesmo período de tempo.

Figura 4.3. Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga R.



Conforme mencionado, a estrutura é alimentada por um sistema de fontes trifásicas no qual a defasagem entre as fases corresponde a  $120^\circ$  elétricos ou  $2\pi/3$ . Dessa forma, as tensões que alimentam o circuito  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$  são definidas conforme abaixo.

$$\begin{cases} V_a = V_p \sin(\omega t) \\ V_b = V_p \sin(\omega t - 2\pi/3) \\ V_c = V_p \sin(\omega t - 4\pi/3) \end{cases}$$

Definem-se as tensões de fase

```

1 clearvars
2 syms V_p wt V_D1 V_D2 V_D3
3
4 % Definição das fontes
5 Va = V_p * sin(wt);
6 Vb = V_p * sin(wt-2*pi/3);
7 Vc = V_p * sin(wt-4*pi/3);

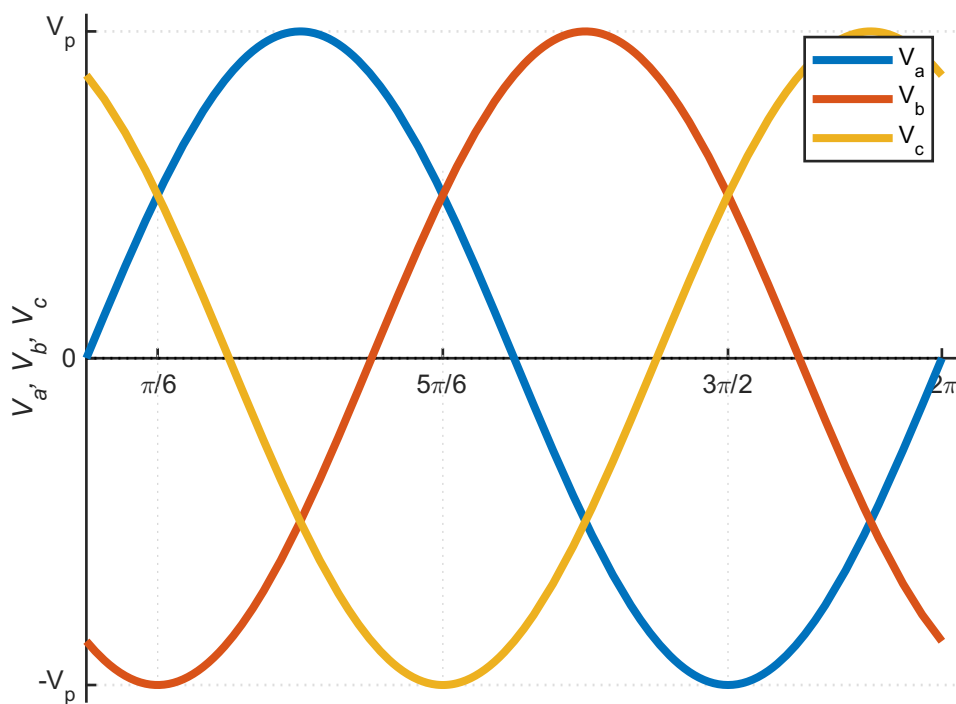
```

```

1 Figura_WF_Fontes_Trifasicas()

```

Figura 4.4. Formas de onda trifásicas.



#### 4.1.2.1 Condução dos diodos

Para determinar se um ou mais diodos está no estado de condução, verificam-se as possibilidades de condução para todos os diodos da topologia. Vale ressaltar que um diodo entra no estado de condução quando a sua tensão ânodo-cátodo,  $V_{AK}$ , se torna positiva e bloqueia quando a sua corrente se anula.

Nesse sentido, para verificar as condições em que cada diodo poderá entrar em condução, primeiramente aplica-se a LTK às malhas formadas pelos diodos.

Portanto, aplica-se a lei das tensões de Kirchhoff na malha formada pelas Fontes  $V_a$  e  $V_b$ ,

```

1 eq_ab = -Vb + V_D2 - V_D1 + Va == 0

```

$$eq_{ab} = V_{D2} - V_{D1} - V_p \sin(wt - 2.0944) + V_p \sin(wt) = 0 \quad (4.1)$$

Que pode ser reescrita como:

```

1 % isolando as tensões dos diodos
2 eq_ab = isolate(eq_ab,-V_D2 + V_D1);
3 % simplificando somente o lado direito da igualdade
4 eq_ab = lhs(eq_ab) == simplify(rhs(eq_ab))

```

$$eq_{ab} = V_{D1} - V_{D2} = 1.7321 V_p \cos(wt - 1.0472) \quad (4.2)$$

Por sua vez, para a malha formada pelas Fontes  $V_b$  e  $V_c$ ,

```

1 eq_bc = -Vb + V_D2 -V_D3 + Vc == 0

```

$$eq_{bc} = V_{D2} - V_{D3} - V_p \sin(wt - 2.0944) + V_p \sin(wt - 4.1888) = 0 \quad (4.3)$$

Reescrevendo:

```

1 eq_bc = isolate(eq_bc,-V_D2 + V_D3);
2 eq_bc = lhs(eq_bc) == simplify(rhs(eq_bc))

```

$$eq_{bc} = V_{D3} - V_{D2} = 1.7321 V_p \cos(wt) \quad (4.4)$$

E para a malha formada pelas Fontes  $V_a$  e  $V_c$ ,

```

1 eq_ca = -Vc + V_D3 -V_D1 + Va == 0

```

$$eq_{ca} = V_{D3} - V_{D1} - V_p \sin(wt - 4.1888) + V_p \sin(wt) = 0 \quad (4.5)$$

Que pode ser reescrita, de maneira semelhante ao que foi feito anteriormente,

```

1 eq_ca = isolate(eq_ca,-V_D3 + V_D1);
2 eq_ca = lhs(eq_ca) == simplify(rhs(eq_ca))

```

$$eq_{ca} = V_{D1} - V_{D3} = -1.7321 V_p \cos(wt + 1.0472) \quad (4.6)$$

Analisando-se as três equações de malha resultantes (4.2, 4.4 e 4.6), percebe-se que dois diodos não podem conduzir simultaneamente porque nesse caso a condução de um diodo implicaria que seria aplicada tensão negativa sobre o outro diodo, bloqueando-o.

Tendo isso em vista, basta determinar os intervalos em que cada um dos diodos não poderá conduzir.

Dessa forma, o diodo  $D_1$  não conduzirá se os diodos  $D_2$  ou  $D_3$  estiverem em condução, pois estes diodos ao conduzirem aplicariam uma tensão negativa sobre  $D_1$ , bloqueando-o. Assim, avaliam-se as equações 4.2 e 4.6, que incluem a tensão  $V_{D1}$ , considerando o caso em que  $D_2$  e  $D_3$  conduzem, o que implica em que as tensões  $V_{D2}$  e  $V_{D3}$  sejam nulas.

### A. Condições de condução para o diodo $D_1$

Considera-se que o diodo  $D_2$  está em condução. Dessa forma, sua tensão será nula, resolvendo 4.2 para  $V_{D1}$

$$1 \quad V_{D1ab} = \text{subs}(\text{eq\_ab}, V_{D2}, 0) \geq 0$$

$$V_{D1ab} = 0 \leq (V_{D1} = 1.7321 V_p \cos(\omega t - 1.0472)) \quad (4.7)$$

Agora, considera-se que o diodo  $D_3$  está em condução. Portanto, a sua tensão será nula; resolvendo 4.6 para  $V_{D1}$

$$1 \quad V_{D1ca} = 0 \leq \text{subs}(\text{eq\_ca}, V_{D3}, 0)$$

$$V_{D1ca} = 0 \leq (V_{D1} = -1.7321 V_p \cos(\omega t + 1.0472)) \quad (4.8)$$

Dessa forma, o diodo  $D_1$  somente poderá conduzir quando as duas condições anteriores (4.7 e 4.8) forem satisfeitas, isto é, se a sua tensão não for negativa. Caso contrário,  $D_1$  estará bloqueado devido à condução do diodo  $D_2$  ou de  $D_3$ .

As equações 4.7 e 4.8 são ilustradas na Fig. 4.5 a seguir, de onde é possível concluir que para  $D_1$  ambas as condições são satisfeitas no intervalo  $\pi/6 \leq \omega t \leq 5\pi/6$ , que é o período em que a tensão de  $D_1$  seria positiva caso qualquer um dos outros diodos conduzisse, fazendo com que  $D_1$  entrasse em condução e bloqueando qualquer outro diodo que eventualmente estivesse conduzindo.

$$1 \quad \text{Figura\_WF\_tensões\_sobre\_os\_Diodos}()$$

### B. Condições de condução para o diodo $D_2$

De maneira semelhante ao que foi avaliado para o diodo  $D_1$ , pode-se determinar as condições para a condução dos diodos  $D_2$  e  $D_3$ . Resumidamente:

Considera-se que o diodo  $D_3$  está em condução. Dessa forma, sua tensão será nula, resolvendo 4.4 para  $V_{D2}$

$$1 \quad V_{D2bc} = \text{subs}(\text{eq\_bc}, V_{D3}, 0) \geq 0$$

$$V_{D2bc} = 0 \leq (-V_{D2} = 1.7321 V_p \cos(\omega t)) \quad (4.9)$$

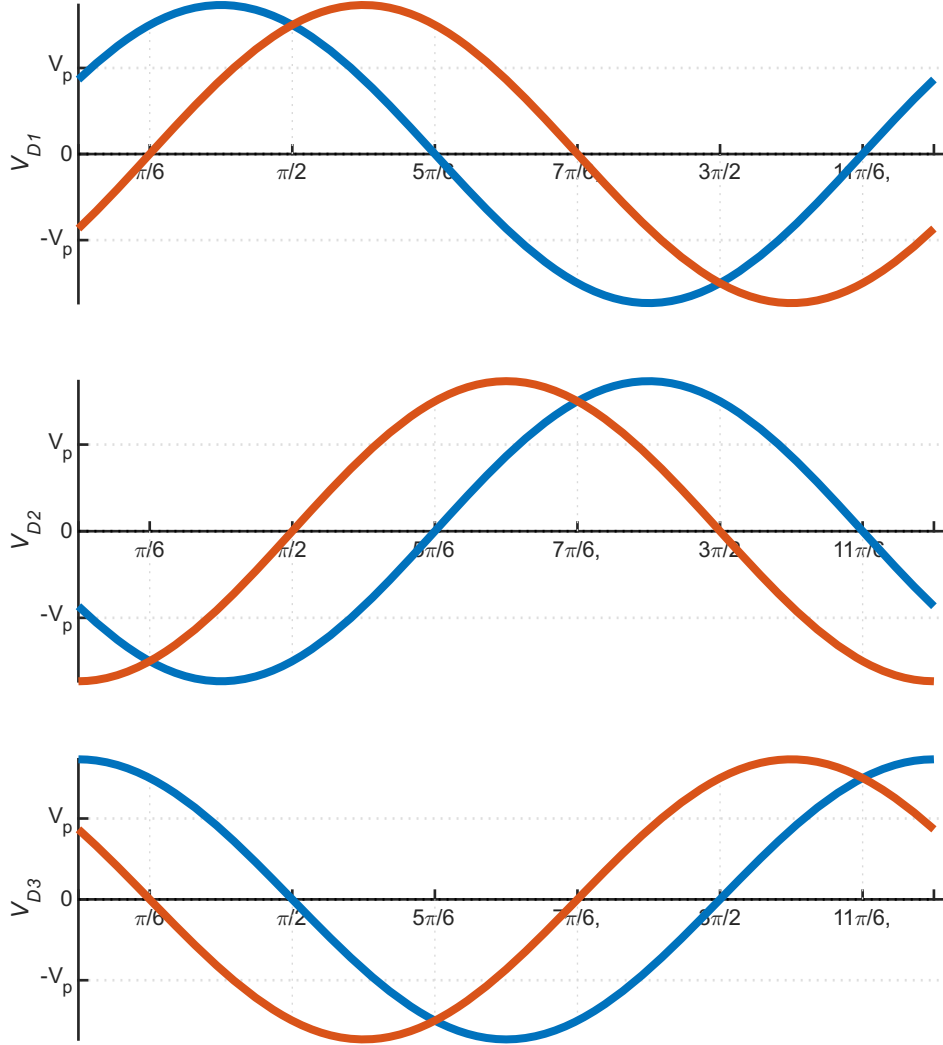
Agora, considera-se que o diodo  $D_1$  está em condução. Portanto, a sua tensão será nula. Resolvendo 4.2 para  $V_{D2}$

$$1 \quad V_{D2ab} = 0 \leq \text{subs}(\text{eq\_ab}, V_{D1}, 0)$$

$$V_{D2ab} = 0 \leq (-V_{D2} = 1.7321 V_p \cos(\omega t - 1.0472)) \quad (4.10)$$

Observando-se a Fig. 4.5 conclui-se que o diodo  $D_2$  pode conduzir entre os ângulos  $5\pi/6$  e  $3\pi/2$ .

Figura 4.5. Tensões sobre os diodos.



### C. Condições de condução para o diodo $D_3$

Considera-se que o diodo  $D_2$  está em condução. Dessa forma, sua tensão será nula, resolvendo 4.4 para  $V_{D3}$

$$1 \quad V_{D3bc} = \text{subs}(eq\_bc, V_{D2}, 0) \geq 0$$

$$V_{D3bc} = 0 \leq (V_{D3} = 1.7321 V_p \cos(wt)) \quad (4.11)$$

Agora, considera-se que o diodo  $D_1$  está em condução. Portanto, a sua tensão será nula, resolvendo 4.6 para  $V_{D3}$

$$1 \quad V_{D3ca} = 0 \leq \text{subs}(eq\_ca, V_{D1}, 0)$$

$$V_{D3ca} = 0 \leq (-V_{D3} = -1.7321 V_p \cos(wt + 1.0472)) \quad (4.12)$$

Novamente, de acordo com a Fig. 4.5 observa-se que o diodo  $D_3$  poderá conduzir do ângulo  $3\pi/2$  até  $13\pi/6$ , (ou  $\pi/6$  quando se considera o primeiro quadrante).

Além disso, os instantes logo após as intersecções entre as formas de ondas devem ser averiguados para determinar qual diodo conduzirá durante o período até a próxima intersecção.

#### 4.1.2.2 Determinação dos instantes de comutação

Para a determinação dos instantes de comutação pode-se considerar a Fig. 4.3 que ilustra as formas de onda das tensões trifásicas, verificando-se inicialmente a intersecção das formas de onda geradas pelas fontes  $V_c$  e  $V_a$ . Para tanto, comparam-se as duas equações e resolve-se para  $\omega t$ .

$$1 \quad eq = V_c == V_a$$

$$eq = V_p \sin(\omega t - 4.1888) = V_p \sin(\omega t)$$

$$1 \quad \text{theta\_1} = \text{solve}(eq, \omega t)$$

$$\theta_1 = 0.5236 \quad (4.13)$$

Então verifica-se a intersecção entre  $V_a$  e  $V_b$

$$1 \quad eq = V_a == V_b$$

$$eq = V_p \sin(\omega t) = V_p \sin(\omega t - 2.0944)$$

$$1 \quad \text{theta\_2} = \text{solve}(eq, \omega t)$$

$$\theta_2 = 2.6180 \quad (4.14)$$

E, por último, verifica-se a intersecção entre  $V_b$  e  $V_c$

$$1 \quad eq = V_b == V_c$$

$$eq = V_p \sin(\omega t - 2.0944) = V_p \sin(\omega t - 4.1888)$$

$$1 \quad \text{theta\_3} = \text{solve}(eq, \omega t)$$

$$\theta_3 = 1.5708 \quad (4.15)$$

Como a primeira intersecção ocorre quando ambas as fontes são negativas, adiciona-se  $\pi$  à resposta anterior para se obter a intersecção positiva.

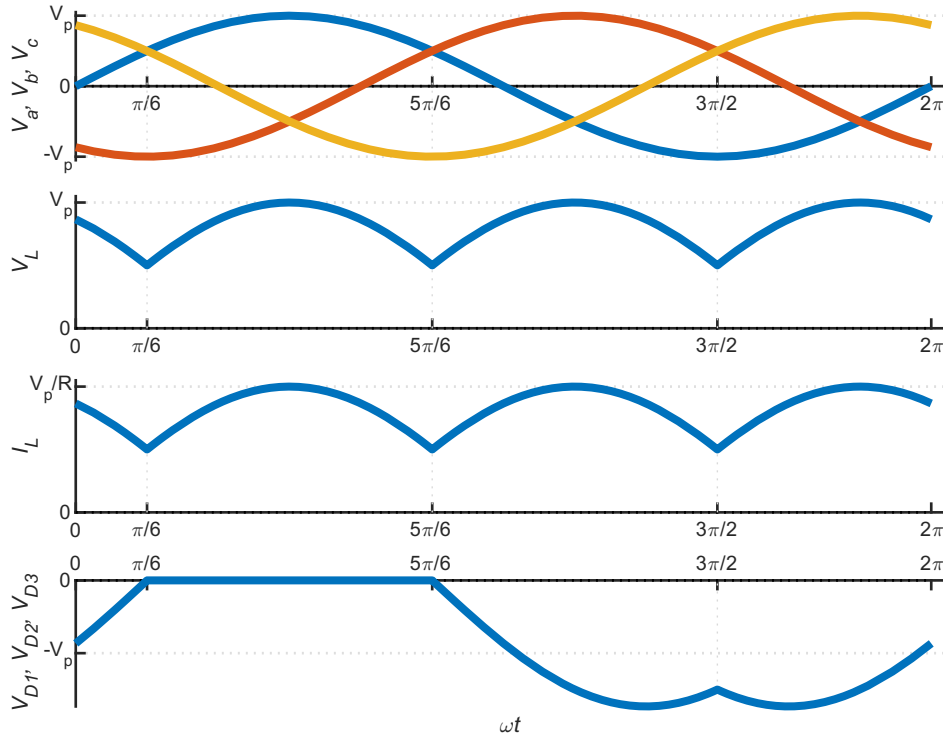
Observando-se os resultados anteriores, conclui-se que, o diodo  $D_1$  conduzirá de  $\pi/6$  até  $5\pi/6$ . O diodo  $D_2$  poderá conduzir entre os ângulos de  $5\pi/6$  até  $3\pi/2$  e o diodo  $D_3$ , de  $3\pi/2$  até  $13\pi/6$  (ou  $\pi/6$ ), considerando-se o primeiro ciclo de operação).

### 4.1.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 4.6, a seguir.

1 Figura\_WF\_3pulsosM0\_para\_carga\_R();

Figura 4.6. Principais formas de onda.



Observa-se que a tensão sobre a carga, bem como a corrente são sempre positivas. A frequência da tensão da carga é três vezes maior que a frequência das fontes de alimentação. A tensão reversa máxima que os diodos devem suportar é superior às tensões das fontes presentes na topologia, porque estas apresentam conexões do tipo série durante as etapas em que são aplicadas tensões reversas sobre os diodos.

### 4.1.4 Equações para o projeto

A tensão média sobre a carga é calculada através de

$$V_{L\ Med} = \frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (4.16)$$

pois a forma de onda de tensão se repete três vezes durante um período de operação, iniciando em  $\pi/6$  e terminando em  $5\pi/6$ .

```

1 syms V_p wt
2 sympref('FloatingPointOutput',0);
3 V_LMed = 3/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,pi/6,5*pi/6)

```

$$V_{L\ Med} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{2\pi} \quad (4.17)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```

1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 3/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt)/R,wt,pi/6,5*pi/6)

```

$$I_{L\ Med} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{2R\pi} \quad (4.18)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através de

$$V_{L\ RMS} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (4.19)$$

```

1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 sympref('FloatingPointOutput',1);
3 V_LRMS = sqrt(3/(2*pi)*int((V_p*sin(wt))^2,wt,pi/6,5*pi/6))

```

$$V_{L\ RMS} = 0.8407 V_p$$

que corresponde a

```

1 V_LRMS = V_p*sqrt(1/2+3*sqrt(3)/(8*pi))

```

$$V_{L\ RMS} = 0.8407 V_p \quad (4.20)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

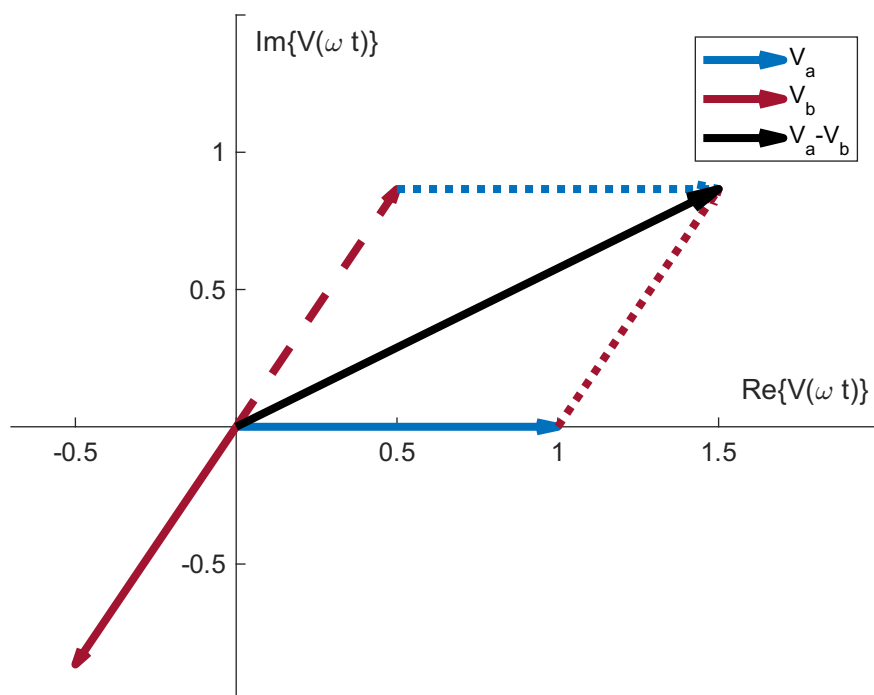
```

1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(3/(2*pi)*int((V_p*sin(wt)/R)^2,wt,pi/6,5*pi/6))

```

$$I_{L\ RMS} = \frac{0.8407 V_p}{R} \quad (4.21)$$

Figura 4.7. Fasores de tensão sobre os diodos.



A tensão máxima sobre cada diodo corresponde à soma fasorial de duas das fontes de alimentação, pois estas se encontram conectadas em série quando é aplicada tensão reversa sobre cada diodo.

```
1 Figura_WF_3pulsos_Fasores_VDi();
```

Os fasores para as tensões  $V_a$  e  $V_b$  podem ser definidos conforme abaixo,

```
1 Va = V_p*exp(j*(0));
2 Vb = V_p*exp(j*(-2*pi/3));
```

Aplicando a LTK ao laço formado pelas fontes  $V_a$ ,  $V_b$  e pelos diodos  $D_1$  e  $D_2$ ,

```
1 syms V_D1 V_D2
2 eq = Va - Vb + V_D1 + V_D2 == 0
```

$$eq = V_{D1} + V_{D2} + V_p (1.5000 + 0.8660 i) = 0$$

Supondo que o diodo  $D_2$  esteja em condução, a tensão sobre o mesmo será nula.

```
1 eq = subs(eq, V_D2, 0)
```

$$eq = V_{D1} + V_p (1.5000 + 0.8660 i) = 0$$

Assim, a tensão sobre  $D_1$  é

```
1 V_D1 = solve(eq,V_D1)
```

$$V_{D1} = V_p (-1.5000 - 0.8660 i)$$

E seu módulo

```
1 V_D1ABS = abs(V_D1)
```

$$V_{D1 Abs} = 1.7321 V_p$$

Dessa forma,

$$V_{D Max} = \sqrt{3} V_p$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{D Max} = 1.7321 V_p \quad (4.22)$$

E a corrente máxima,

$$I_{D Max} = V_p / R$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{D Max} = \frac{V_p}{R} \quad (4.23)$$

### 4.1.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir. Serão utilizadas as equações 4.17, 4.18, 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23.

```
1 VS_RMS = 220;
2 V_p = sqrt(2)*220;
3 R = 10;
4
5 V_LMed = 3*sqrt(3)*V_p/(2*pi)
```

$$V_{L Med} = 257.2999$$

```
1 I_LMed = 3*sqrt(3)*V_p/(2*pi*R)
```

$$I_{L\ Med} = 25.7300$$

$$1 \quad V_{LRMS} = \sqrt{(1/2 + 3 \cdot \sqrt{3}) / (8 \cdot \pi))} \cdot V_p$$

$$V_{LRMS} = 261.5592$$

$$1 \quad I_{LRMS} = \sqrt{(1/2 + 3 \cdot \sqrt{3}) / (8 \cdot \pi))} \cdot V_p / R$$

$$I_{LRMS} = 26.1559$$

$$1 \quad V_{DMax} = \sqrt{3} \cdot V_p$$

$$V_{DMax} = 538.8877$$

$$1 \quad I_{DMax} = V_p / R$$

$$I_{DMax} = 31.1127$$

## 4.2 Carga RE

### 4.2.1 Topologia

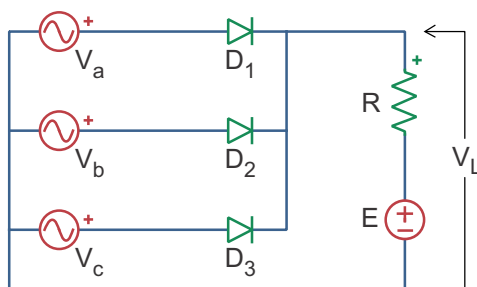
Esta topologia é semelhante à topologia analisada na seção 4.1 exceto que a carga é formada por uma resistência em série com uma fonte de tensão de valor  $E$ , conforme ilustrado na Fig. 4.8. Ao longo desta seção a tensão da fonte  $E$  sempre é considerada menor que o pico da tensão de entrada e superior à metade desta tensão.

$$V_p > E > \frac{V_p}{2}$$

Caso  $E$  seja menor que metade da tensão de pico das fontes de alimentação, ao menos um dos três diodos estará em condução durante todo o ciclo de operação e as formas de onda corresponderão àsquelas ilustradas na Fig. 4.6, vista anteriormente. Nesse caso conversor opera da mesma forma que a topologia da seção 4.1.

Por outro lado, quando  $E$  é maior que a tensão de pico, nenhum diodo conduzirá durante todo o ciclo de operação e a tensão sobre a carga será igual àquela da fonte  $E$ .

Figura 4.8. Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.



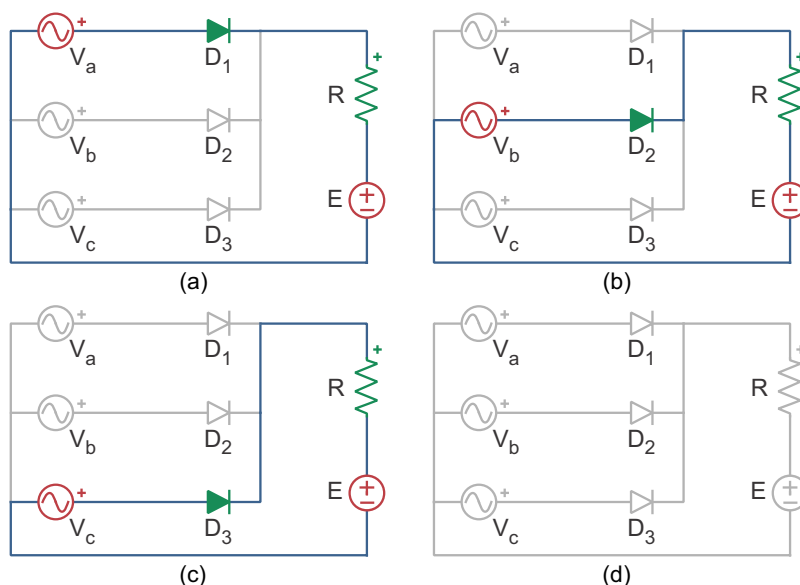
### 4.2.2 Etapas de operação

Para esta topologia, o diodo  $D_1$  pode conduzir entre os ângulos  $\pi/6$  e  $5\pi/6$  desde que a tensão da fonte  $V_a$  seja maior que a tensão da fonte  $E$  (Fig. 4.9(a)). Por sua vez, o diodo  $D_2$  pode entrar em condução após o ângulo  $5\pi/6$  e permanecer em condução até atingir o ângulo  $3\pi/2$ , mas somente se a tensão  $V_b$  for maior que a tensão da fonte  $E$  (Fig. 4.9(b)). Finalmente, após o ângulo  $3\pi/2$  ser atingido, o diodo  $D_3$  poderá conduzir enquanto os diodos  $D_1$  e  $D_2$  se encontram bloqueados (Fig. 4.9(c)). No entanto,  $D_3$  somente conduzirá enquanto que a tensão fornecida por  $V_c$  for maior que  $E$ .

Quando nenhuma das tensões das fontes  $V_a$ ,  $V_b$  ou  $V_c$  é superior à  $E$ , nenhum dos diodos se encontra em condução (Fig. 4.9(d)), de forma que não há corrente através da carga, e consequentemente não há nenhuma queda de tensão sobre a resistência  $R$  (Fig. 4.9(c)). Portanto, quando nenhum diodo está conduzindo, a tensão  $V_L(\omega t)$  corresponde à  $E$ .

Os circuitos equivalentes são mostrados na (Fig. 4.9).

Figura 4.9. Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.

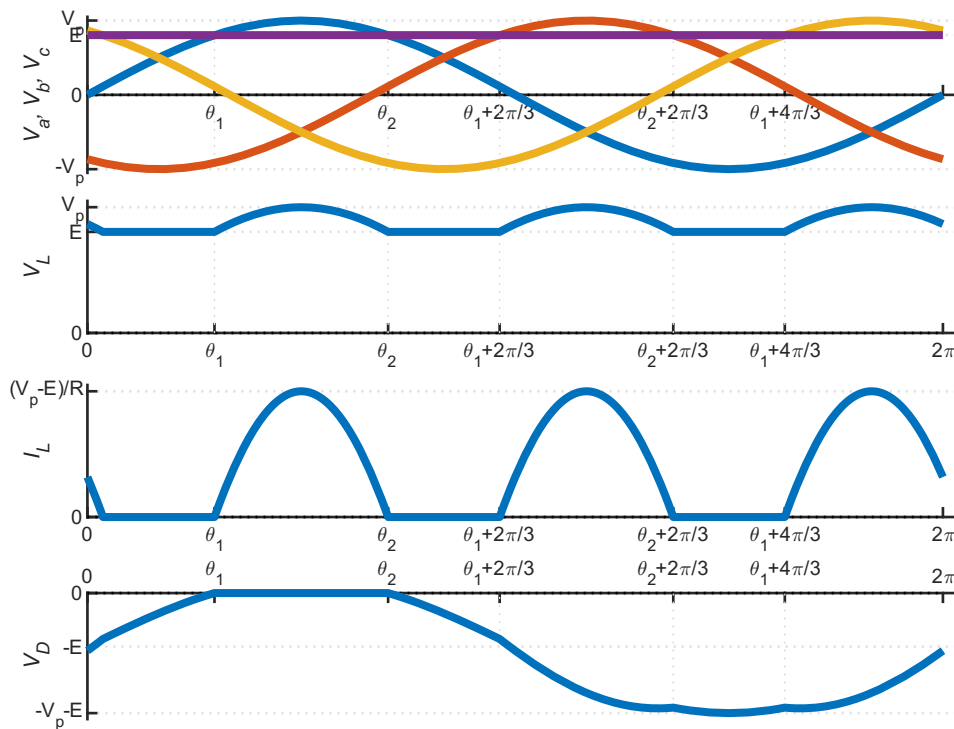


### 4.2.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 4.10. Nesta figura considera-se que  $V_p/2 < E < V_p$ . Observa-se que a interseção entre as formas de onda  $V_a(\omega t)$  e  $E$  ocorre para os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e se repete, como comentado anteriormente, para  $\theta_1 + n 2\pi/3$  e  $\theta_2 + n 2\pi/3$ , com  $n = 1, 2$ . Durante estes períodos, a tensão na carga é sempre superior à tensão da fonte  $E$ . A corrente através da carga é proporcional à tensão sobre a resistência  $R$ .

1 Figura\_WF\_3pulsosMO\_para\_carga\_RE()

Figura 4.10. Principais formas de onda.



Primeiramente determina-se a interseção entre as formas de onda das duas fontes.

```
1 clearvars
2 syms V_p wt E R
3
4 % condição de intersecção
5 eq = V_p*sin(wt) == E
```

$$eq = V_p \sin(\omega t) = E$$

```
1 thetas = solve(eq,wt)
```

$$thetas = \begin{bmatrix} \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \\ 3.1416 - \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \end{bmatrix}$$

```
1 theta_1 = thetas(1)
```

$$\theta_1 = \text{asin}\left(\frac{E}{V_p}\right)$$

```
1 theta_2 = thetas(2)
```

$$\theta_2 = \pi - \text{asin}\left(\frac{E}{V_p}\right)$$

O diodo  $D_1$  conduzirá entre  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Por sua vez, diodo  $D_2$  conduzirá entre  $2\pi/3 + \theta_1$  e  $2\pi/3 + \theta_2$  e o diodo  $D_3$  conduzirá entre  $4\pi/3 + \theta_1$  e  $4\pi/3 + \theta_2$

#### 4.2.4 Equações para o projeto

Tendo em vista que a operação desta estrutura depende dos valores de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , os mesmos serão utilizados para o projeto deste retificador.

A tensão média sobre a carga pode ser obtida usando

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3}{2\pi} \left[ \int_{\pi/6}^{\theta_1} E d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{5\pi/6} E d(\omega t) \right] \quad (4.24)$$

Que pode ser simplificada para

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3}{2\pi} \left[ \int_{\pi/6+\theta_2}^{\theta_1+5\pi/6} E d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (4.25)$$

ou seja,

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3}{2\pi} \left[ \int_{\theta_2}^{\theta_1+2\pi/3} E d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (4.26)$$

```
1 syms wt theta_1 theta_2
2
3 V_LMed = 3/(2*sym('pi'))*(int(V_p*sin(wt),wt,theta_1,theta_2)+...
4 int(E,wt,theta_2,2*sym('pi')/3+theta_1))
```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1.5000 (V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E (0.6667 \pi + \theta_1 - \theta_2))}{\pi} \quad (4.27)$$

```
1 V_RMed = 3/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E),wt,theta_1,theta_2)
```

$$V_{RMed} = \frac{1.5000 (V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E (\theta_1 - \theta_2))}{\pi}$$

```

1 syms wt theta_1 theta_2
2
3 I_LMed = 3/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E)/R,wt,theta_1,theta_2)

```

$$I_{LMed} = \frac{1.5000 \left( \frac{V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))}{R} + \frac{E (\theta_1 - \theta_2)}{R} \right)}{\pi}$$

```

1 I_LMed = simplifyFraction(I_LMed)

```

$$I_{LMed} = \frac{1.5000 (E \theta_1 - E \theta_2 + V_p \cos(\theta_1) - V_p \cos(\theta_2))}{R \pi}$$

```

1 %I_LMed = simplify(I_LMed)
2 I_LMed = collect(I_LMed, {'E', 'V_p', 'R'})

```

$$I_{LMed} = \frac{V_p (3 \cos(\theta_1) - 3 \cos(\theta_2)) + E (3 \theta_1 - 3 \theta_2)}{2 R \pi} \quad (4.28)$$

A tensão eficaz sobre a carga pode ser obtida através da equação

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \left[ \int_{\pi/6}^{\theta_1} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{5\pi/6} E^2 d(\omega t) \right]} \quad (4.29)$$

Que como visto anteriormente, corresponde a

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \left[ \int_{\pi/6+\theta_2}^{\theta_1+5\pi/6} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) \right]} \quad (4.30)$$

```

1 syms V_p wt, assume([V_p, sym('pi')], {'positive', 'real'})
2 V_LRMS = sqrt(3/(2*sym('pi'))*(int((V_p*sin(wt))^2,wt,theta_1,theta_2)+...
3           int((E)^2,wt,theta_2,2*sym('pi')/3+theta_1)))

```

$$V_{LRMS} = \frac{\sqrt{1.5000 E^2 (0.6667 \pi + \theta_1 - \theta_2) - 0.3750 V_p^2 (2 \theta_1 - 2 \theta_2 - \sin(2 \theta_1) + \sin(2 \theta_2))}}{\pi^{0.5}} \quad (4.31)$$

A tensão sobre a resistência da carga é determinada através de

```

1 V_RRMS = sqrt(3/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E)^2,wt,theta_1,theta_2));
2 MostrarEquacoesLongas(V_RRMS,[2,1])

```

$$V_{RRMS} = \frac{\sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8}}{\pi^{0.5}}$$

onde:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0.3750 V_p^2 \sin(2\theta_1) \\ \sigma_2 &= -0.3750 V_p^2 \sin(2\theta_2) \\ \sigma_3 &= -1.5000 E^2 \theta_1 \\ \sigma_4 &= 1.5000 E^2 \theta_2 \\ \sigma_5 &= -0.7500 V_p^2 \theta_1 \\ \sigma_6 &= 0.7500 V_p^2 \theta_2 \\ \sigma_7 &= -3 E V_p \cos(\theta_1) \\ \sigma_8 &= 3 E V_p \cos(\theta_2)\end{aligned}$$

Como a corrente através do circuito auxiliar é proporcional à tensão sobre o resistor,

```
1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sym('V_RRMS')/R
```

$$I_{LRMS} = \frac{V_{RRMS}}{R} \quad (4.32)$$

```
1 % I_LRMS = eval(sqrt(1/(2*sym('pi')))*int(((V_p/R)*sin(wt))^2,wt,0,sym('pi'))))
2 % I_LRMS = eval(I_LRMS)
```

A tensão máxima sobre o diodo corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação acrescida da fonte E.

$$V_{DMax} = V_p + E$$

```
1 V_DMax = V_p + E
```

$$V_{DMax} = E + V_p \quad (4.33)$$

E a corrente máxima,

$$I_{DMax} = (V_p - E)/R$$

```
1 I_DMax = (V_p - E)/R
```

$$I_{DMax} = -\frac{E - V_p}{R} \quad (4.34)$$

### 4.2.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 4.27, 4.28, 4.31, 4.32, 4.33 e 4.34.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 f = 60;
4 E = 250;
5 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 theta_1 = asin(E/V_p)
```

$$\theta_1 = 0.9332$$

```
1 theta_2 = pi - asin(E/V_p)
```

$$\theta_2 = 2.2084$$

```
1 V_LMed = (1.5*(V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)) + E*((2/3)*pi + theta_1 - theta_2)))/
pi
```

$$V_{L\ Med} = 274.6412$$

```
1 I_LMed = (1.5*((V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)))/R + (E*(theta_1 - theta_2))/R))/pi
```

$$I_{L\ Med} = 2.4641$$

```
1 V_LRMS = sqrt(1.5*E^2*((2/3)*sym(pi) + theta_1 - theta_2) ...
2 - (3/8)*V_p^2*(2*theta_1 - 2*theta_2 - sin(2*theta_1) + sin(2*theta_2)))/sqrt(pi)
```

$$V_{L\ RMS} = 275.7210$$

```
1 sigma1 = 0.3750*V_p^2*sin(2*theta_1);
2 sigma2 = -0.3750*V_p^2*sin(2*theta_2);
3 sigma3 = -1.5000*E^sym(2)*theta_1;
4 sigma4 = 1.5000*E^sym(2)*theta_2;
5 sigma5 = -0.7500*V_p^2*theta_1;
6 sigma6 = 0.7500*V_p^2*theta_2;
7 sigma7 = -3*E*V_p*cos(theta_1);
8 sigma8 = 3*E*V_p*cos(theta_2);
9 V_RRMS = sqrt(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + sigma6 + sigma7 + ...
10 sigma8)/sym(pi)^0.5
```

$$V_{RMS} = 34.6622$$

$$I_{LRMS} = V_{RRMS}/R$$

$$I_{LRMS} = 3.4662$$

$$V_{DMax} = V_p + E$$

$$V_{DMax} = 561.1270$$

$$I_{DMax} = (V_p - E)/R$$

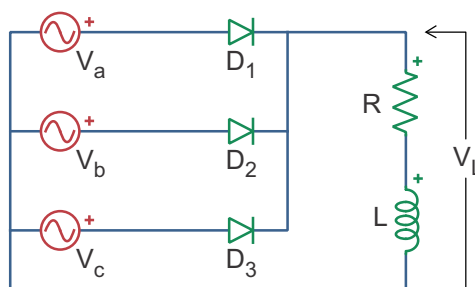
$$I_{DMax} = 6.1127$$

## 4.3 Carga Indutiva RL

### 4.3.1 Topologia

Este retificador é semelhante ao estudado na seção 4.1, exceto que agora a carga é indutiva, formada por um resistor e por um indutor conectados em série, conforme a Fig. 4.11.

Figura 4.11. Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva.



### 4.3.2 Etapas de operação

Tendo em vista que esta topologia é composta por uma indutância em série com a carga resistiva, então esta carga apresenta uma característica indutiva. O comportamento do circuito é similar ao do retificador da seção 4.1, exceto que a corrente não é proporcional à tensão neste caso. Os diodos conduzem durante os mesmos períodos do conversor apresentado na seção 4.1. As etapas de operação são ilustradas na Fig. 4.12.

Figura 4.12. Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva.

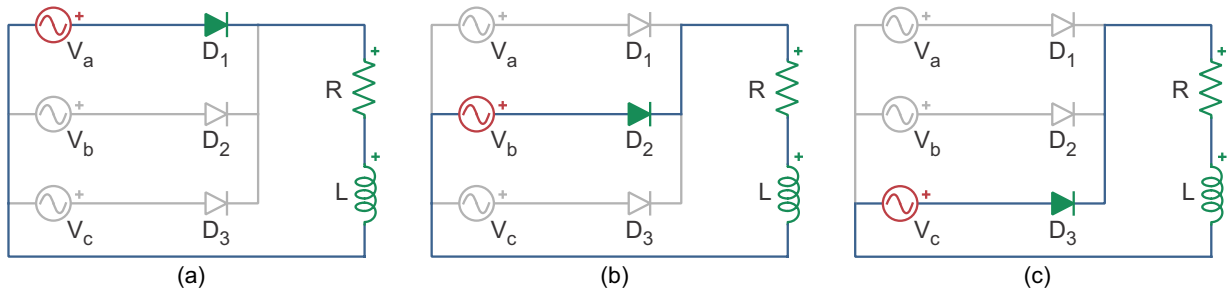
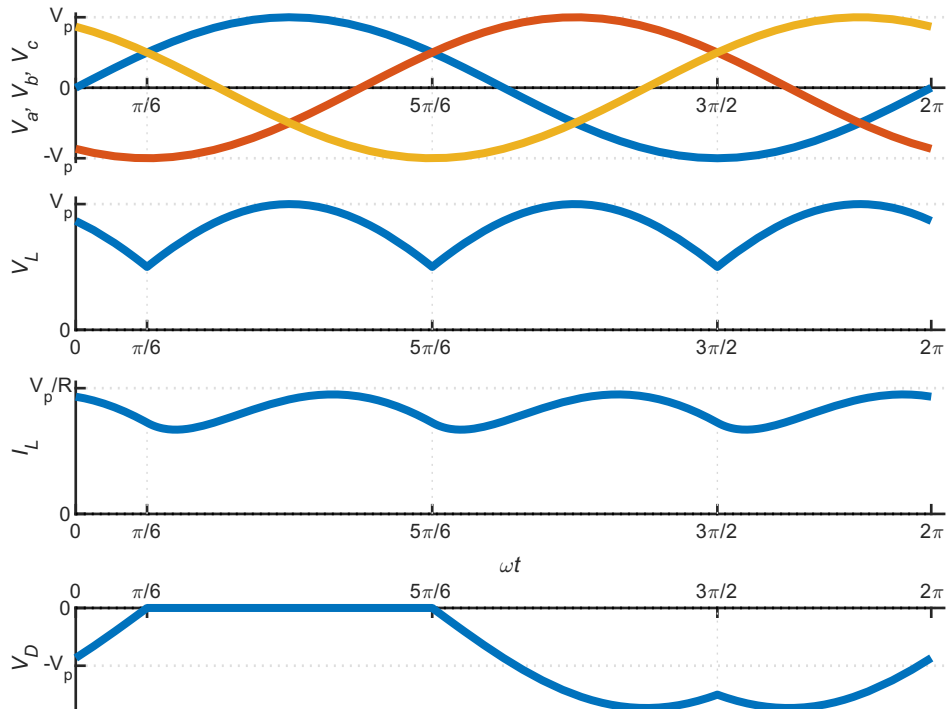


Figura 4.13. Principais formas de onda.



### 4.3.3 Formas de onda

As principais formas de onda podem ser vistas na Fig. 4.13, a seguir. Observa-se que a corrente através da carga nunca se anula e, portanto, o retificador sempre operará no modo de condução contínua, MCC.

1 `Figura_WF_3pulsosMO_para_carga_RL();`

#### 4.3.3.1 Determinação de $i_L(t)$

Para obter a expressão da corrente através do indutor inicialmente necessita-se definir algumas variáveis simbólicas.

```

1 % inicialização
2 clearvars
3 syms V_o w R L t i_L(t) s V_p X_L tau

```

Na seção 1.3 foi visto que a corrente através da carga para um circuito indutivo alimentado por uma fonte de tensão é dada por 1.36, reproduzida a seguir.

```

1 syms omega phi wt IL_0 Z
2 sympref("FloatingPointOutput",0);
3
4 i_L(wt) = -(V_p*(sin(phi - wt) - exp((-wt/(omega*tau)))*sin(phi))...
5           - IL_0*Z*exp((-wt/(omega*tau))))/Z

```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z}$$

A corrente inicial através do indutor,  $IL_0$ , não é nula, sendo necessário determiná-la, o que será feito a seguir.

A condição de contorno para a determinação de  $IL_0$  é que esta corrente possui valores idênticos no início e no final do período de condução de cada diodo, visto que o circuito opera em regime permanente. Considera-se para esta análise o período de condução do diodo  $D_1$ .

Fazendo-se  $i_L(\pi/6) = i_L(5\pi/6)$  pode-se determinar  $IL_0$ .

```

1 sympref('AbbreviateOutput', false);
2 eq = i_L(sym('pi')/6)==i_L(5*sym('pi')/6)

```

$$eq = -\frac{V_p \left( \sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) - e^{-\frac{\pi}{6\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{\pi}{6\omega\tau}}}{Z} = -\frac{V_p \left( \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) - e^{-\frac{5\pi}{6\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{5\pi}{6\omega\tau}}}{Z}$$

E resolvendo para  $IL_0$

```

1 IL_0 = solve(eq, IL_0)

```

$$IL_0 = -\frac{V_p \sin(\phi) - V_p e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + V_p \sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} - V_p \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}}}{Z - Z e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}}}$$

Simplificando,

```

1 %IL_0 = simplifyFraction(IL_0)
2 IL_0 = simplify(expand(IL_0))

```

$$IL_0 = \frac{V_p \left( \sin(\phi) - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + \sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} - \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} \right)}{Z \left( e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)}$$

Usando equivalências trigonométricas é possível transformar o termo  $\sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right)$  em  $\sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) + \dots$

Como

$$\sin(A) - \sin(B) = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \implies \sin(A) = \sin(B) + 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Dessa forma,

$$\sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{1}{2}\left(\phi - \frac{\pi}{6} + \phi - \frac{5\pi}{6}\right)\right) \sin\left(\frac{1}{2}\left(\phi - \frac{\pi}{6} - \phi + \frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

Então,

```

1 eq = sin(phi - sym('pi')/6) == sin(phi - 5*sym('pi')/6 ) + ...
2     2*cos((phi - sym('pi')/6 + phi - 5*sym('pi')/6 )/2)* ...
3     sin((phi - sym('pi')/6 - phi + 5*sym('pi')/6 )/2)

```

$$eq = \sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Substituindo os valores conhecidos,

```

1 eq = subs(eq, sin(sym('pi')/3), sqrt(3)/2)

```

Substituindo em  $IL_0$ ,

$$eq = \sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

```

1 IL_0 = subs(IL_0, lhs(eq), rhs(eq))

```

$$IL_0 = \frac{V_p \left( \sin(\phi) - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) - \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} + e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} \left( \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \right) \right)}{Z \left( e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)}$$

```

1 IL_0 = simplify(expand(IL_0))

```

$$IL_0 = \frac{V_p \left( \sin(\phi) - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + \sqrt{3} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} \right)}{Z \left( e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)}$$

Substituindo  $IL_0$  na equação de  $i_L(wt)$

```
1 i_L(wt) = subs(i_L(wt), 'IL_0', IL_0)
```

$$i_L(wt) = - \frac{V_p \left( \sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - \frac{V_p e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \left( \sin(\phi) - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + \sqrt{3} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} \right)}{e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1}}{Z}$$

Tentando simplificar a equação...

```
1 i_L = simplifyFraction(i_L, "Expand", true)
```

$$i_L(wt) = - \frac{V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} + \sqrt{3} V_p \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}}}{Z e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - Z e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}}$$

Agrupando  $V_p$  e  $Z$

```
1 i_L = collect(i_L, {'V_p', 'Z'})
```

$$i_L(wt) = \frac{\left( \sin(\phi - wt) e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - \sin(\phi - wt) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} + \sqrt{3} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} \right) V_p}{\left( e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right) Z}$$

Agrupando o termo em seno

```
1 i_L = collect(i_L, sym(sin(phi - wt)))
```

$$i_L(wt) = \frac{V_p \left( e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}{\left( e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right) Z} \sin(\phi - wt) + \frac{\sqrt{3} V_p \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}}}{\left( e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right) Z}$$

Como o seno é uma função ímpar

```
1 i_L = subs(i_L, -sin(phi - wt), sin(wt - phi))
```

$$i_L(wt) = - \frac{V_p \sin(\phi - wt)}{Z} - \frac{\sqrt{3} V_p \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}}}{Z \left( e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}$$

Multiplicando-se manualmente o numerador e o denominador do segundo termo por  $e^{\frac{-wt}{\omega\tau}}$  e isolando  $V_p/Z$

$$i_L(\omega t) = \frac{V_p}{Z} \left[ -\sin(\phi - \omega t) - \frac{\sqrt{3} e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau} - \frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{1 - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}}} \right] = \frac{V_p}{Z} \left[ \sin(\omega t - \phi) + \sqrt{3} \sin(\phi) \frac{e^{\frac{-\omega t + 5\pi/6}{\omega\tau}}}{e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1} \right] \quad (4.35)$$

Assim

```
1 i_L = (V_p/Z)*(sin(wt-phi) - sqrt(sym(3))*sin(phi)*(exp((-wt+5*sym(pi)/6)/(omega*tau))
2   )/...
   (1 - exp((2*sym(pi))/(3*omega*tau))))
```

$$i_L(\omega t) = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - \omega t) - \frac{\sqrt{3} e^{-\frac{\omega t - 5\pi}{6\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1} \right)}{Z} \quad (4.36)$$

Na Fig. 4.14 é mostrada a forma de onda da corrente  $i_L(\omega t)$  e as formas de onda das componentes ( $i_{L1}(\omega t)$  e  $i_{L2}(\omega t)$ ) que somadas compõem a corrente através da carga. Observa-se que a frequência das formas de onda na carga corresponde ao triplo da frequência das fontes de alimentação da entrada.

```
1 Figura_IL_3pulsosM0_para_carga_RL();
```

#### 4.3.3.2 Análise utilizando a série de Fourier

A Série de Fourier para a corrente de carga pode ser calculada conforme abaixo. Os argumentos das funções senoidais são multiplicados por três porque as formas de onda se repetem três vezes durante um período da tensão de entrada.

$$v(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(3n\omega t) + b_n \sin(3n\omega t))$$

e a corrente através de

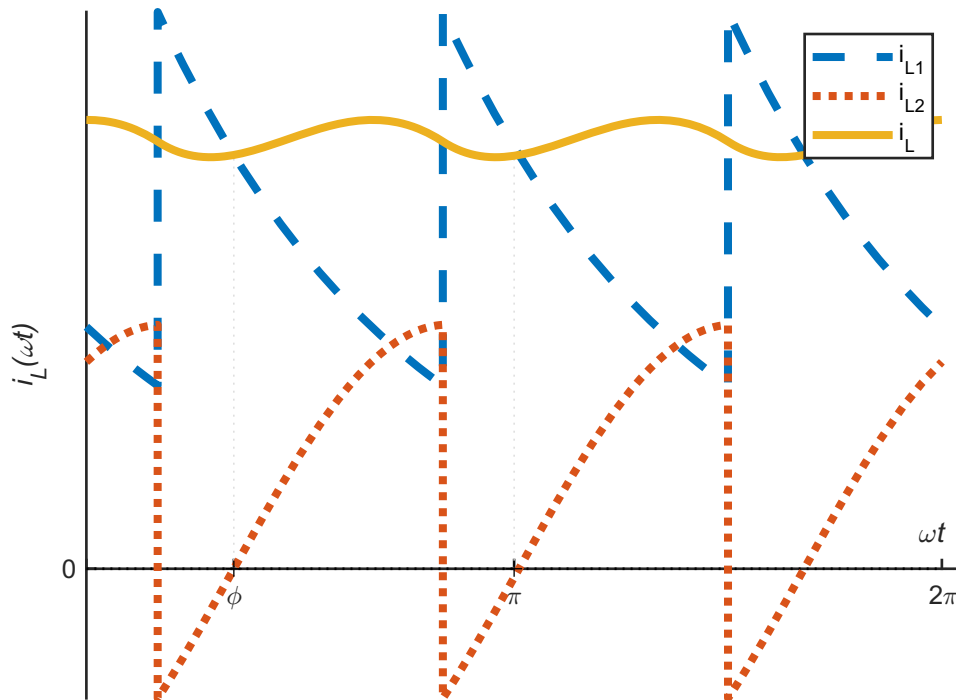
$$i(\omega t) = \frac{a_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(3n\omega t - \phi_n) + b_n \sin(3n\omega t - \phi_n)}{Z_n}$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(\omega t) d(\omega t)$$

```
1 % definição das variáveis
2 syms V_p wt n omega L R simbólicas
3 % definição das restrições
4 assume(n,{'positive', 'integer'})
```

Figura 4.14. Forma de onda da corrente através da carga e de suas componentes.



Como a frequência da forma de onda sobre a carga é o triplo da frequência da entrada, o intervalo a ser considerado inicia em  $\pi/6$  e termina em  $5\pi/6$ , totalizando um terço do período total.

#### - Limites de integração

```
1 lim_inf = sym('pi')/6;
2 lim_sup = 5*sym('pi')/6;
```

#### - Período

```
1 T = (2*sym('pi'))/3;
```

Forma de onda durante a condução do diodo  $D_1$

```
1 Va(wt) = V_p*sin(wt);
```

#### - Determinação dos coeficientes

Determina-se o valor médio da forma de onda

```
1 a_0 = 1/(T)*int(Va,wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_0 = \frac{3 V_p \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left( \frac{5\pi}{6} \right) \right)}{2\pi}$$

```
1 a_0 = subs(a_0, {cos(5*sym('pi')/6),cos(sym('pi')/6)},{-sqrt(3)/2, sqrt(3)/2})
```

$$a_0 = \frac{3\sqrt{3} V_p}{2\pi} \quad (4.37)$$

Determinação de  $a_n$

```
1 a_n(n) = 2/(T)*int(Va*cos(n*3*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_n(n) = - \frac{3 V_p \left( \frac{\cos \left( \frac{\pi (3n-1)}{6} \right)}{6n-2} - \frac{\cos \left( \frac{\pi (3n+1)}{6} \right)}{6n+2} - \frac{\cos \left( \frac{5\pi (3n-1)}{6} \right)}{6n-2} + \frac{\cos \left( \frac{5\pi (3n+1)}{6} \right)}{6n+2} \right)}{\pi}$$

```
1 %test(a_n)
2 a_n = simplify(expand(a_n))
```

$$a_n(n) = - \frac{3 V_p \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) - \cos \left( \frac{5\pi}{6} \right) \cos \left( \frac{5n\pi}{2} \right) + 3n \sin \left( \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) - 3n \sin \left( \frac{5\pi}{6} \right) \sin \left( \frac{5n\pi}{2} \right) \right)}{\pi (9n^2 - 1)}$$

Sabendo que

$$\cos \left( \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin \left( \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\sin \left( \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

```
1 a_n(n) = subs(a_n, {cos(5*sym('pi')/6),cos(sym('pi')/6)},{-sqrt(3)/2, sqrt(3)/2});
2 a_n(n) = subs(a_n, {sin(5*sym('pi')/6),sin(sym('pi')/6)},{1/2, 1/2})
```

$$a_n(n) = - \frac{3 V_p \left( \frac{\sqrt{3} \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right)}{2} + \frac{\sqrt{3} \cos \left( \frac{5n\pi}{2} \right)}{2} + \frac{3n \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right)}{2} - \frac{3n \sin \left( \frac{5n\pi}{2} \right)}{2} \right)}{\pi (9n^2 - 1)}$$

```
1 a_n = simplify(a_n)
```

$$a_n(n) = - \frac{3 V_p \left( \sqrt{3} \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) + \sqrt{3} \cos \left( \frac{5n\pi}{2} \right) + 3n \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) - 3n \sin \left( \frac{5n\pi}{2} \right) \right)}{2\pi (9n^2 - 1)}$$

Como

$$\cos(A) + \cos(B) = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin(A) - \sin(B) = 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Então tem-se:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{-4n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{6n\pi}{4}\right) = 2 \cos(-n\pi) \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{-4n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{6n\pi}{4}\right) = 2 \sin(-n\pi) \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)$$

Dessa forma

```
1 a_n(n) = subs(a_n, sqrt(sym(3))*cos(n*sym('pi')/2) + sqrt(sym(3))*cos(5*n*sym('pi')/2)
2 , ...
sqrt(sym(3))*2*cos((-n*sym('pi')))*cos((3*n*sym('pi'))/2))
```

$$a_n(n) = -\frac{3V_p \left( 3n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 3n \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right) + 2\sqrt{3} \cos(n\pi) \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right)}{2\pi(9n^2 - 1)}$$

```
1 a_n(n) = subs(a_n, 3*n*sin((n*sym('pi'))/2) - 3*n*sin((5*n*sym('pi'))/2), ...
2 3*n*2*sin((-n*sym('pi')))*cos((3*n*sym('pi'))/2))
```

$$a_n(n) = -\frac{3V_p \left( 2\sqrt{3} \cos(n\pi) \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - 6n \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \sin(n\pi) \right)}{2\pi(9n^2 - 1)}$$

Como para  $n$  inteiro

$$\sin(n\pi) = 0$$

```
1 a_n = subs(a_n, sin(n*sym('pi')), 0)
```

$$a_n(n) = -\frac{3\sqrt{3}V_p \cos(n\pi) \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)}{\pi(9n^2 - 1)}$$

Determinação de  $b_n$

```
1 b_n(n) = 2/(T)*int(Va*sin(n*3*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$b_n(n) = -\frac{3V_p \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi(3n-1)}{6}\right)}{6n-2} - \frac{\sin\left(\frac{\pi(3n+1)}{6}\right)}{6n+2} - \frac{\sin\left(\frac{5\pi(3n-1)}{6}\right)}{6n-2} + \frac{\sin\left(\frac{5\pi(3n+1)}{6}\right)}{6n+2} \right)}{\pi}$$

```
1 b_n = simplify(expand(b_n))
```

$$b_n(n) = - \frac{3 V_p \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) - \cos \left( \frac{5\pi}{6} \right) \sin \left( \frac{5n\pi}{2} \right) - 3 n \sin \left( \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) + 3 n \sin \left( \frac{5\pi}{6} \right) \cos \left( \frac{5n\pi}{2} \right) \right)}{\pi (9 n^2 - 1)}$$

Substituindo os termos conhecidos, como feito anteriormente para  $a_n$

```
1 b_n(n) = subs(b_n, {cos(5*sym('pi')/6),cos(sym('pi')/6)},{-sqrt(3)/2, sqrt(3)/2});
2
3 b_n(n) = subs(b_n, {sin(5*sym('pi')/6),sin(sym('pi')/6)},{1/2, 1/2})
```

$$b_n(n) = - \frac{3 V_p \left( \frac{3 n \cos \left( \frac{5 n \pi}{2} \right)}{2} - \frac{3 n \cos \left( \frac{n \pi}{2} \right)}{2} + \frac{\sqrt{3} \sin \left( \frac{n \pi}{2} \right)}{2} + \frac{\sqrt{3} \sin \left( \frac{5 n \pi}{2} \right)}{2} \right)}{\pi (9 n^2 - 1)}$$

```
1 b_n = simplify(b_n)
```

$$b_n(n) = - \frac{3 V_p \left( 3 n \cos \left( \frac{5 n \pi}{2} \right) - 3 n \cos \left( \frac{n \pi}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \frac{n \pi}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \frac{5 n \pi}{2} \right) \right)}{2 \pi (9 n^2 - 1)}$$

Sabendo que

$$\cos(A) + \cos(B) = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin(A) - \sin(B) = 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Pode se obter

$$\cos\left(\frac{5n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = -2 \sin\left(\frac{4n\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{6n\pi}{6}\right) = -2 \sin\left(\frac{-2n\pi}{3}\right) \sin(n\pi)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5n\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{6n\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{-4n\pi}{6}\right) = 2 \sin(n\pi) \cos\left(\frac{-2n\pi}{3}\right)$$

Realizando-se estas substituições

```
1 b_n = subs(b_n, 2*n*cos((5*n*sym('pi'))/3) - 2*n*cos((n*sym('pi'))/3), ...
2 2*n*(-2)*sin(-2*n*sym('pi')/3)*sin(n*sym('pi')))
```

$$b_n(n) = - \frac{3 V_p \left( 3 n \cos \left( \frac{5 n \pi}{2} \right) - 3 n \cos \left( \frac{n \pi}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \frac{n \pi}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \frac{5 n \pi}{2} \right) \right)}{2 \pi (9 n^2 - 1)}$$

```
1 b_n = subs(b_n, sqrt(3)*sin((n*sym('pi'))/3) + sqrt(3)*sin((5*n*sym('pi'))/3), ...
2 sqrt(3)*(2)*sin(n*sym('pi'))*cos(-2*n*sym('pi')/3))
```

$$b_n(n) = -\frac{3 V_p \left( 3 n \cos \left( \frac{5 n \pi}{2} \right) - 3 n \cos \left( \frac{n \pi}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \frac{n \pi}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \frac{5 n \pi}{2} \right) \right)}{2 \pi (9 n^2 - 1)}$$

Sabendo que

$$\frac{5 n \pi}{2} = \frac{1 n \pi + 4 n \pi}{2} = \frac{n \pi}{2} + 2 n \pi$$

Portanto, como seno e cosseno são funções cíclicas com período  $T = 2\pi$

$$\sin \left( \frac{5 n \pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{n \pi}{2} + 2 n \pi \right) = \sin \left( \frac{n \pi}{2} \right)$$

$$\cos \left( \frac{5 n \pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{n \pi}{2} + 2 n \pi \right) = \cos \left( \frac{n \pi}{2} \right)$$

Fazendo a substituições

```
1 b_n = subs(b_n, sin((5*sym('pi')*n)/2), sin(n*sym('pi')/2));
2 b_n = subs(b_n, cos((5*sym('pi')*n)/2), cos(n*sym('pi')/2))
```

$$b_n(n) = -\frac{3 \sqrt{3} V_p \sin \left( \frac{n \pi}{2} \right)}{\pi (9 n^2 - 1)} \quad (4.38)$$

A Fig. 4.15 mostra o gráfico da Série de Fourier obtida para a tensão e para a corrente através da carga, sendo que foi variada a quantidade de termos utilizados para a geração da série. Foram utilizados dois termos para gerar um par de formas de onda e dez termos para gerar o outro par.

Observa-se que mesmo utilizando-se somente dois termos a forma de onda de corrente é idêntica àquela em que são utilizados dez termos.

```
1 Figura_VL_IL_3pulsosM0_para_carga_RL_Serie_Fourier;
```

#### 4.3.4 Equações para o projeto

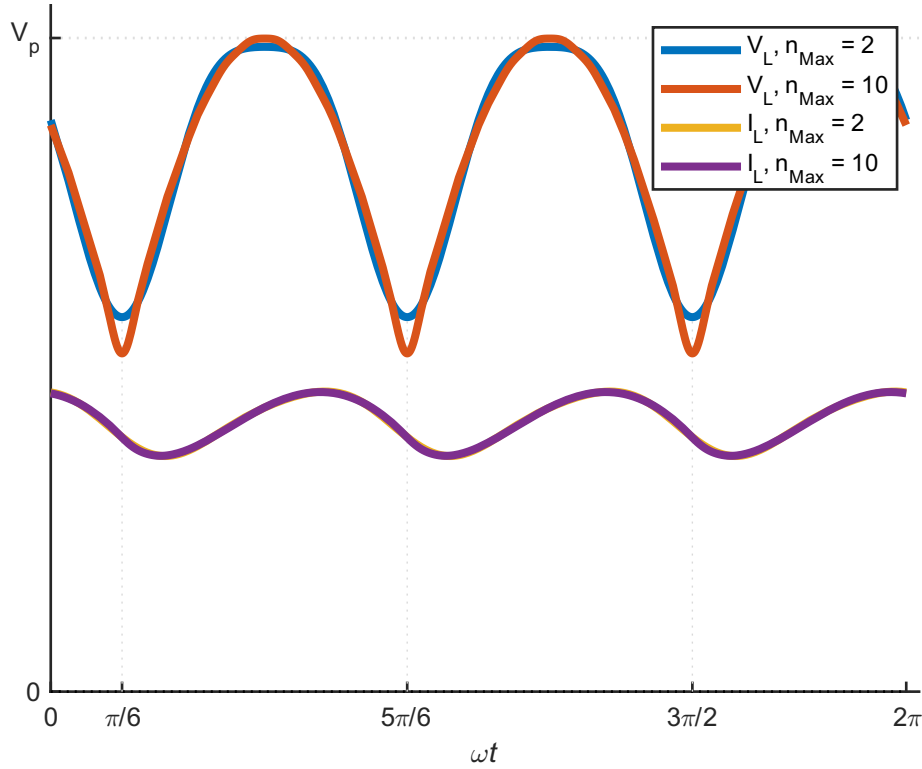
As equações das tensões  $V_{L Med}$ ,  $V_{L RMS}$  e de  $V_{D Max}$  são as mesmas da seção 4.1.4, pois as formas de onda de tensão são idênticas.

$$V_{L Med} = \frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (4.39)$$

```
1 syms V_p wt
2 V_LMed = 3/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,pi/6,5*pi/6)
```

$$V_{L Med} = \frac{3 \sqrt{3} V_p}{2 \pi} \quad (4.40)$$

Figura 4.15. Forma de onda da corrente através da carga para o MCC



$I_{L\text{Med}}$  pode ser obtida através do termo  $a_0$  da série de Fourier, dividido pela resistência, conforme comentado anteriormente.

```
1 syms V_p wt R
2 I_LMed = (3*sqrt(sym(3))*V_p)/(2*sym(pi)*R)
```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{2R\pi} \quad (4.41)$$

A tensão eficaz sobre a carga é determinada a partir de

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (4.42)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(3/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt))^2,wt,pi/6,5*pi/6))
```

$$V_{LRMS} = V_p \sqrt{\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{8\pi}} \quad (4.43)$$

A corrente eficaz através da carga é calculada através da equação

$$I_{L\,RMS} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (i_L(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (4.44)$$

```

1 %clearvars
2 syms V_p phi wt tau Z, assume([V_p, Z], 'positive')
3 i_L = -V_p*(sin(phi - wt)/Z + (2*exp((sym('pi'))/(omega*tau))*sin(phi))/...
4 (Z*(exp(wt/(omega*tau)) - exp((sym('pi'))/(omega*tau))*exp((wt/(omega*tau)))));
5 i_L = -(V_p*(sin(phi - wt) - (sqrt(sym(3))*exp((-6*wt - 5*sym(pi))/(6*omega*tau)))*...
6 *sin(phi))/(exp((2*sym(pi))/(3*omega*tau)) - 1))/Z

```

$$i_L = -\frac{V_p \left( \sin(\phi - \omega t) - \frac{\sqrt{3} e^{-\frac{6\omega t - 5\pi}{6\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1} \right)}{Z}$$

```

1 I_LRMS = sqrt(1/(sym('pi'))*int((i_L)^2,wt,sym('pi')/6,5*sym('pi')/6));

```

Como o resultado obtido é bastante complexo, não será reproduzido aqui. Sugere-se determinar  $I_{L\,RMS}$  numericamente ou através de simulação.

A tensão máxima sobre o diodo corresponde à tensão de linha.

```

1 V_DMax = sqrt(3)*V_p

```

$$V_{D\,Max} = \sqrt{3} V_p \quad (4.45)$$

A corrente máxima pode ser obtida derivando-se a equação da corrente e igualando a zero,

```

1 % Por exemplo:
2 eq = diff(i_L,wt)==0

```

$$eq = \frac{V_p \left( \cos(\phi - \omega t) - \frac{\sqrt{3} e^{-\frac{6\omega t - 5\pi}{6\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau (e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1)} \right)}{Z} = 0$$

multiplica-se por  $Z/V_p$  para simplificar e substitui-se  $\omega t$  por  $t_{Max}$

```

1 % Por exemplo:
2 eq = subs(eq*Z/V_p,wt, sym('t_Max'))

```

$$eq = \cos(\phi - t_{Max}) - \frac{\sqrt{3} e^{-\frac{6t_{Max} - 5\pi}{6\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau (e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1)} = 0$$

Como  $t_{Max}$  é argumento de um cosseno e também da função exponencial, não é possível obter seu valor algébrico. Dessa forma, encontra-se  $t_{Max}$  numericamente e substitui-se em  $i_L(\omega t)$ . Um palpite inicial para a raiz é  $T/4$ .

```
1 % Por exemplo:
2 % t_Max = vpasolve(eq,sym('t_Max'),1/(4*f))
3 % I_LMax = i_L(t_Max)
```

Em termos práticos, o valor máximo que a corrente de carga poderá atingir é dado por

$$I_{DMax} = V_p/R$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{DMax} = \frac{V_p}{R} \quad (4.46)$$

### 4.3.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 4.40, 4.41, 4.43, 4.44, 4.45 e 4.46.

```
1 sympref("FloatingPointOutput",1);
2 V_p = sqrt(2)*220;
3 R = 10;
4 L = 50e-3;
5 f = 60;
6
7 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 omega = w;
2
3 tau = L/R
```

$$\tau = 0.0050$$

```
1 X_L = w*L
```

$$X_L = 18.8496$$

```
1 Z = sqrt(R^2+(XL)^2)
```

$$Z = 21.3379$$

```
1 phi = atan2(XL,R)
```

$$\phi = 1.0830$$

```
1 i_L(wt) = -(V_p*(sin(phi-wt) - (sqrt(3)*exp((-6*wt-5*pi)/(6*omega*tau)))*...
2 sin(phi))/(exp((2*pi)/(3*omega*tau)) - 1))/Z
```

$$i_L(wt) = 10.9484 e^{1.3889 - 0.5305 wt} + 14.5810 \sin(wt - 1.0830)$$

```
1 V_LMed = (3*sqrt(3)*V_p)/(2*pi)
```

$$V_{L\ Med} = 257.2999$$

```
1 I_LMed = (3*sqrt(3)*V_p)/(2*pi*R)
```

$$I_{L\ Med} = 25.7300$$

```
1 V_LRMS = V_p*sqrt((4*pi + 3*sqrt(3))/(8*pi))
```

$$V_{L\ RMS} = 261.5592$$

```
1 I_LRMS = sqrt(3/(2*pi)*int((i_L)^2,wt,pi/6,5*pi/6))
```

$$I_{L\ RMS} = 25.7424$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{D\ Max} = 538.8877$$

```
1 syms wt_Max
2 eq = diff(subs(i_L(wt),wt,wt_Max))==0
```

$$eq = 14.5810 \cos(wt_{Max} - 1.0830) - 5.8083 e^{1.3889 - 0.5305 wt_{Max}} = 0$$

```
1 % Pode-se confirmar as formas de onda através de
2 % figure
3 % fplot(i_L,[0,2*pi])
```

```
1 wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),2*pi/4)
```

$$wt_{Max} = 2.1028$$

```
1 I_LMax = i_L(wt_Max)
```

$$I_{L\ Max} = 26.8124$$

ou menor que

```
1 I_DMax = V_p/R
```

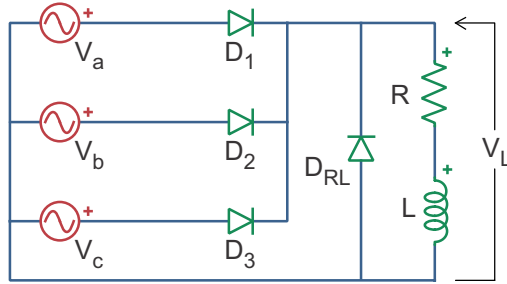
$$I_{D\ Max} = 31.1127$$

## 4.4 Carga RL com diodo de Roda Livre

### 4.4.1 Topologia

Esta topologia opera de maneira semelhante àquela apresentada na seção 4.3. O diodo de roda livre,  $D_{RL}$ , ajuda a proteger os demais diodos no instante da comutação da corrente entre os mesmos. Essa topologia está ilustrada na Fig. 4.16.

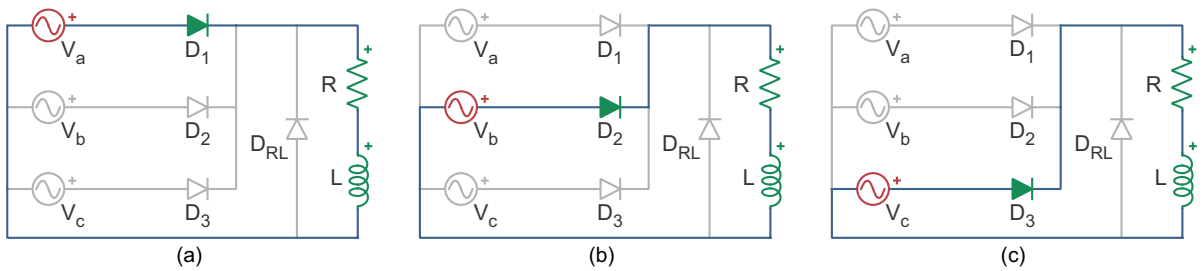
Figura 4.16. Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



### 4.4.2 Etapas de operação

A operação desta estrutura é idêntica à da estrutura sem diodo de roda livre apresentada na seção 4.3.2. As etapas estão ilustradas na 4.17.

Figura 4.17. Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



### 4.4.3 Formas de onda

As principais formas de onda são idênticas àsquelas da seção 4.3.3 e são ilustradas na Fig. 4.13.

### 4.4.4 Equações para o projeto

As principais equações para o projeto são as mesmas daquelas apresentadas seção 4.3.4. O diodo de roda-livre pode ser projetado como segue.

$$V_{DRLMax} = V_p$$

### 4.4.5 Exemplos numéricos

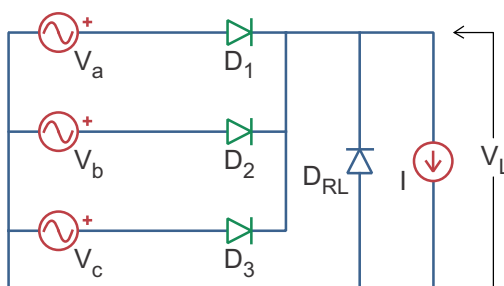
Os exemplos numéricos são idênticos àqueles da seção 4.3.5.

## 4.5 Carga $I$ com Diodo de Roda-Livre

### 4.5.1 Topologia

A carga conectada à esta topologia é uma fonte de corrente ou pode ser uma carga com uma indutância muito alta. Devido à característica indutiva da carga, a corrente permanece praticamente constante e é importante que haja um diodo em paralelo com a mesma para proteger os diodos  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  nos instantes de suas comutações, Fig. 4.18.

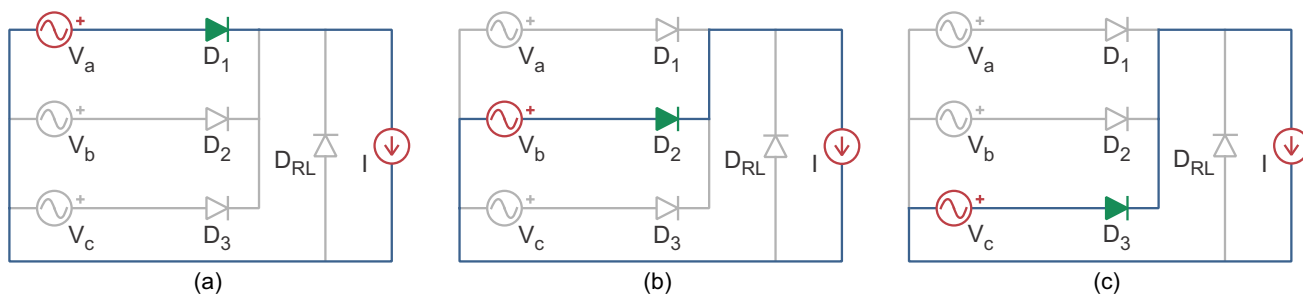
Figura 4.18. Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga de fonte de corrente.



### 4.5.2 Etapas de operação

Esta estrutura opera de maneira semelhante àquela da seção 4.1. A diferença é que a corrente através dos diodos  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  não varia senoidalmente neste caso devido à fonte de corrente  $I$  em série com os mesmos quando estes estão em condução, Fig. 4.19.

Figura 4.19. Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga de fonte de corrente.

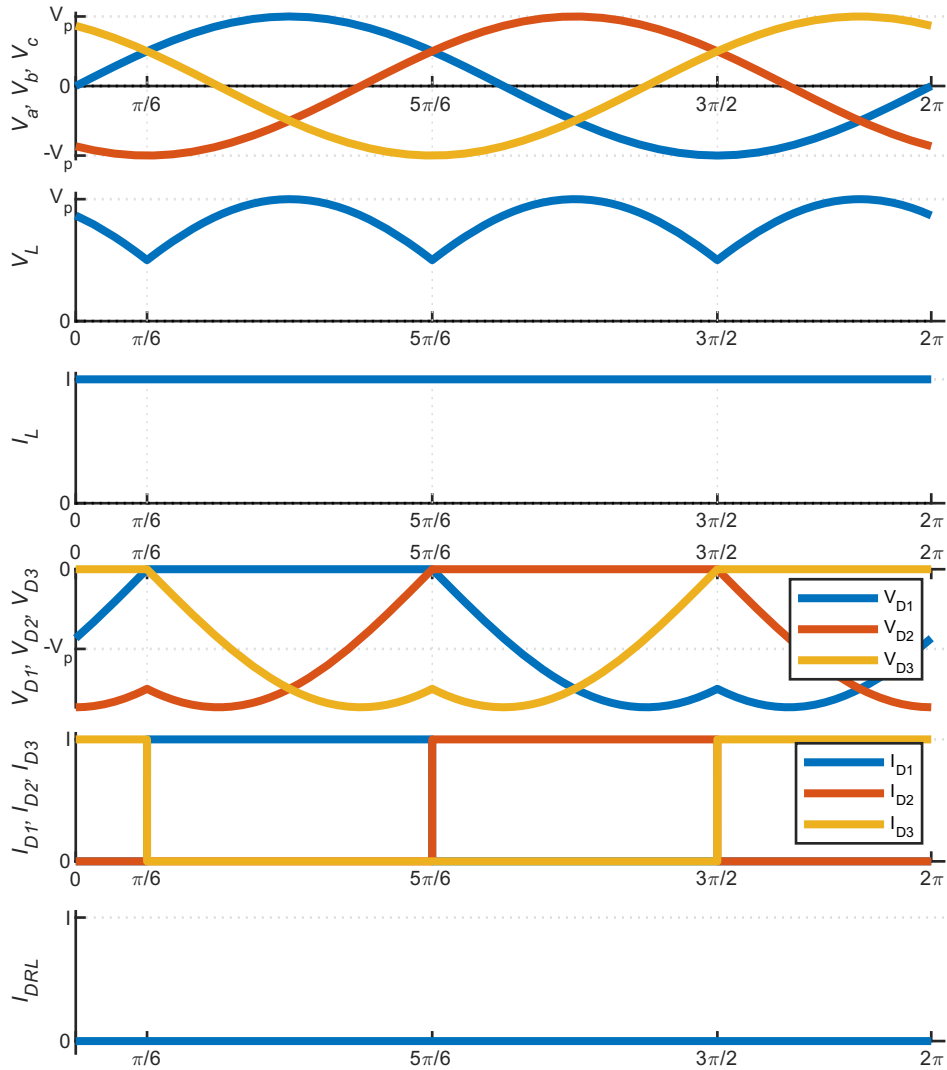


### 4.5.3 Formas de onda

As principais formas de ondas estão mostradas na Fig. 4.20. Observa-se que a corrente através da carga é contínua e igual a  $I$  e que a mesma circula através do diodo  $D_1$  entre os ângulos  $\pi/6$  e  $5\pi/6$ , através do diodo  $D_2$  após o ângulo  $5\pi/6$  e até atingir o ângulo  $3\pi/2$  e então através do diodo  $D_3$  de  $3\pi/2$  até que o diodo  $D_1$  volte a conduzir.

1 Figura\_WF\_3pulsosM0\_para\_carga\_I()

Figura 4.20. Principais formas de onda.



### 4.5.4 Equações para o projeto

Como as formas de onda de tensão são idênticas às da seção 4.1.4, as equações das tensões  $V_{L\text{Med}}$ ,  $V_{L\text{RMS}}$  e de  $V_{D\text{Max}}$  também são as mesmas.

A tensão média sobre a carga pode ser determinada por

$$V_{L Med} = \frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (4.47)$$

```
1 syms V_p wt
2 V_LMed = 3/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,pi/6,5*pi/6)
```

$$V_{L Med} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{2\pi} \quad (4.48)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

```
1 syms V_p wt R I
2 I_LMed = 1/(sym('pi'))*int(I,wt,0,sym('pi'))
```

$$I_{L Med} = I \quad (4.49)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (4.50)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(3/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt))^2,wt,pi/6,5*pi/6))
```

$$V_{LRMS} = V_p \sqrt{\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{8\pi}} \quad (4.51)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

```
1 syms V_p wt R, assume([I, sym('pi')], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*int(I^2,wt,0,2*sym('pi')))
```

$$I_{LRMS} = I \quad (4.52)$$

A tensão máxima sobre os diodos  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  corresponde à soma fasorial de duas fontes de alimentação.

$$V_{DMax} = \sqrt{3}V_p$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{DMax} = 1.7321 V_p \quad (4.53)$$

E sobre o diodo de roda livre

$$V_{DRL\,Max} = V_p$$

```
1 V_DRLMax = V_p
```

$$V_{DRL\,Max} = V_p$$

E a corrente máxima,

$$I_{D\,Max} = I_{DRL\,Max} = I$$

```
1 I_DMax = I
```

$$I_{D\,Max} = I \quad (4.54)$$

### 4.5.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 4.48, 4.49, 4.51, 4.52, 4.53 e 4.54.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 I = 10;
3
4 V_LMed = 3*sqrt(3)*V_p/(2*pi)
```

$$V_{L\,Med} = 257.2999$$

```
1 I_LMed = I
```

$$I_{L\,Med} = 10$$

```
1 V_LRMS = sqrt(1/2+3*sqrt(3)/(8*pi))*V_p
```

$$V_{L\,RMS} = 261.5591$$

```
1 I_LRMS = I
```

$$I_{L\,RMS} = 10$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{D\,Max} = 538.8877$$

```
1 I_DMax = I
```

$$I_{D\,Max} = 10$$

## 4.6 Conclusão

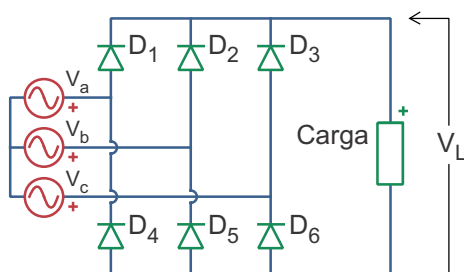
Esta topologia aproveita parcialmente as fontes de alimentação trifásicas. As tensões e correntes através da carga têm suas frequências multiplicadas por três. A corrente da carga nunca se anula, de modo que a topologia sempre opera no modo de condução contínua. De fato, a mesma é aproximadamente constante até mesmo para pequenas indutâncias, conforme verificado pelas séries de Fourier. Idealmente o diodo de roda livre, quando presente, não deverá entrar em condução.

## Capítulo 5

# Retificador Trifásico de Onda Completa à Diodo

A Fig. 5.1 ilustra o retificador trifásico de onda completa à diodo. Inicialmente será feita análise com carga  $R$ , puramente resistiva. Em seguida serão estudadas outras configurações de carga. Este retificador é alimentado por três fontes senoidais trifásicas, defasadas entre si por  $120^\circ$  elétricos ou  $2\pi/3$ . A forma de onda de tensão na carga é composta por seis pulsos, devido à ação conjunta dos grupos retificadores positivo ( $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ ) e negativo ( $D_4$ ,  $D_5$  e  $D_6$ ).

Figura 5.1. Retificador trifásico de onda completa à diodo.



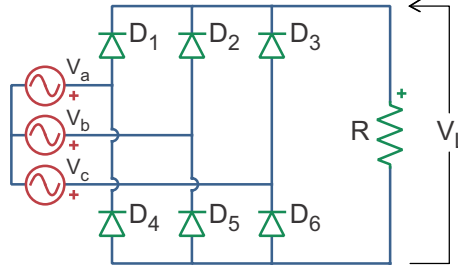
### 5.1 Carga $R$

#### 5.1.1 Topologia

O retificador mostrado na Fig. 5.2 é formado por três fontes de tensão, seis diodos e pela carga  $R$ , puramente resistiva.

#### 5.1.2 Etapas de operação

As tensões das fontes de alimentação são definidas na equação 5.1.

Figura 5.2. Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga  $R$ .

Para esta topologia a fonte  $V_a$  apresenta o maior valor positivo entre os ângulos  $\pi/3$  e  $\pi$ , possibilitando que o diodo  $D_1$  esteja em condução, enquanto os diodos  $D_2$  e  $D_3$  se encontram bloqueados. Durante este período é aplicada a tensão desta fonte sobre a carga  $R$  e a corrente flui através da mesma no sentido positivo. Entre os ângulos  $\pi/3$  e  $2\pi/3$  a corrente retorna pelo diodo  $D_5$ , pois a fonte  $V_b$  apresenta o valor mais negativo (Fig. 5.3(b)) e entre os  $2\pi/3$  e  $\pi$  a corrente retorna pelo diodo  $D_6$ , em virtude da fonte  $V_c$  apresentar o valor mais negativo, (Fig. 5.3(c)).

Após o ângulo  $\pi$  o diodo  $D_2$  entra em condução e os diodos  $D_3$  e  $D_1$  permanecem bloqueados até atingir-se o ângulo  $5\pi/3$ . A tensão através da carga também é positiva porque a fonte  $V_b$  é positiva durante este período e o diodo  $D_2$  está em condução. A corrente retorna através do diodo  $D_6$  entre os ângulos  $\pi$  e  $4\pi/3$  (Fig. 5.3(d)) e através do diodo  $D_4$  entre os ângulos  $4\pi/3$  e  $5\pi/3$ , (Fig. 5.3(e)).

Finalmente, após o ângulo  $5\pi/3$  ser atingido, o diodo  $D_3$  conduz enquanto os diodos  $D_1$  e  $D_2$  se encontram bloqueados. Como  $V_c$  é positiva, a corrente através da carga continua a fluir no sentido positivo. Entre os ângulos  $5\pi/3$  e  $2\pi$  a corrente retorna através do diodo  $D_4$ , (Fig. 5.3(f)), enquanto que a partir de  $2\pi$  (0 no primeiro quadrante) até  $7\pi/3$  (ou  $\pi/3$  para o primeiro ciclo de operação) a corrente retorna pelo diodo  $D_5$ , (Fig. 5.3(a)).

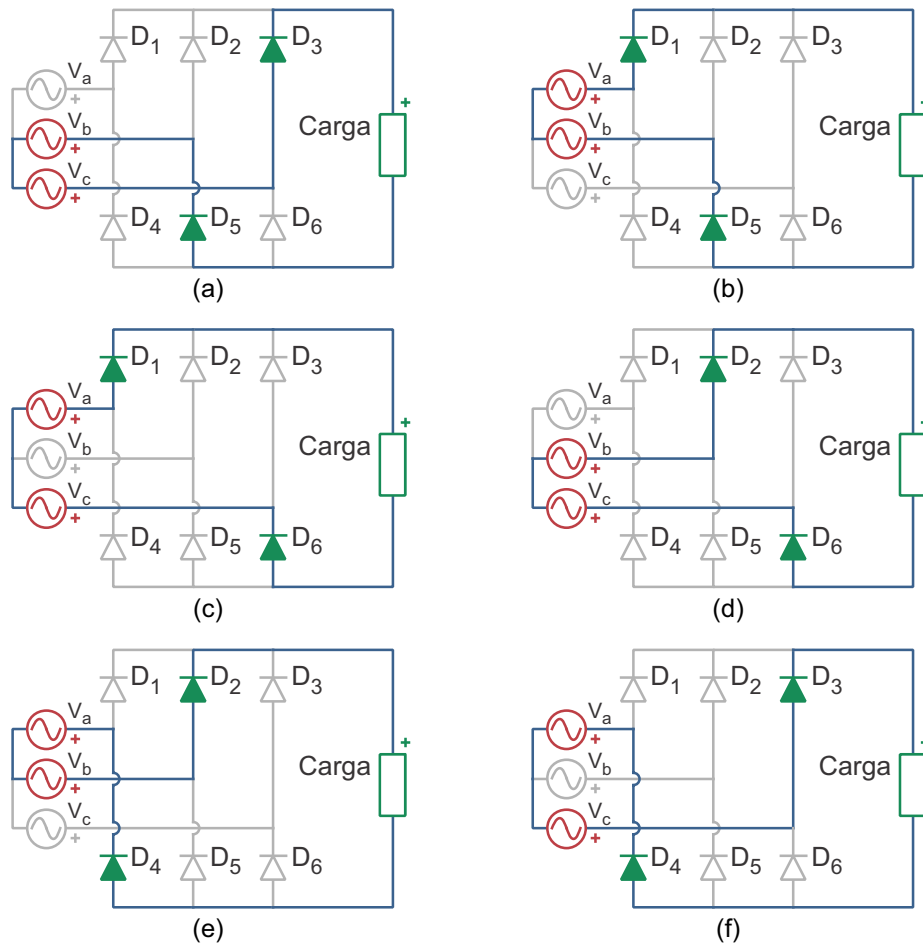
Conforme visto, cada uma das fontes de alimentação está conectada à carga durante um terço do período de operação através de seu terminal positivo por meio dos diodos  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ . De maneira semelhante, cada uma destas fontes está conectada à carga durante um terço do período de operação por meio de seu terminal negativo através dos diodos  $D_4$ ,  $D_5$  e  $D_6$  ou seja, a tensão que é aplicada sobre a carga é dada pela soma fasorial da tensão de duas fontes, sendo uma tensão de linha.

Conforme já comentado, a estrutura é alimentada por um conjunto de fontes trifásicas com defasagem entre as fases correspondente a  $120^\circ$  elétricos ou  $2\pi/3$ . Estas tensões  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$  são definidas conforme abaixo, sendo que foram atrasadas  $30^\circ$  elétricos para facilitar os cálculos que serão desenvolvidos a seguir, 5.4.

$$\begin{cases} V_a = V_p \sin(\omega t - \pi/6) \\ V_b = V_p \sin(\omega t - 5\pi/6) \\ V_c = V_p \sin(\omega t - 3\pi/2) \end{cases} \quad (5.1)$$

Definem-se as tensões de fase, conforme a seguir:

Figura 5.3. Etapas de operação do retificador trifásico de onda completa à diodo com carga R.



```

1 clearvars
2 syms V_p V_pL wt V_D1 V_D2 V_D3
3
4 % Definição das fontes
5 Va = V_p * sin(wt-pi/6);
6 Vb = V_p * sin(wt-5*pi/6);
7 Vc = V_p * sin(wt-3*pi/2);

```

### 5.1.3 Formas de onda

Tendo em vista os intervalos de condução definidos na seção anterior, bem como as formas de onda exibidas na Fig. 5.4, obtém-se a Tabela 5.1:

Com esta tabela, pode-se representar as tensões fasoriais, conforme a Fig. 5.4, bem como as formas de onda das tensões de linha resultantes. Observa-se que a amplitude das tensões de linha corresponde a:

Figura 5.4. Formas de onda trifásicas.

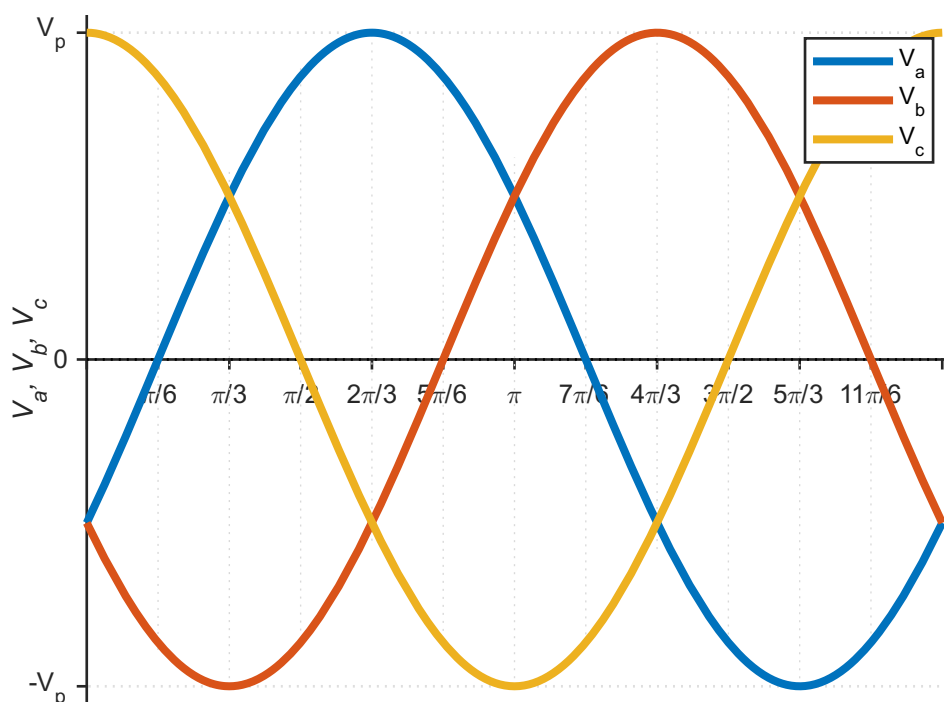


Tabela 5.1. Intervalos de condução.

| Intervalo    | Diodo + | Diodo - | $V_L$    | Figura      |
|--------------|---------|---------|----------|-------------|
| $0..π/3$     | $D_3$   | $D_5$   | $V_{cb}$ | Fig. 5.3(a) |
| $π/3..2π/3$  | $D_1$   | $D_5$   | $V_{ab}$ | Fig. 5.3(b) |
| $2π/3..π$    | $D_1$   | $D_6$   | $V_{ac}$ | Fig. 5.3(c) |
| $π..4π/3$    | $D_2$   | $D_6$   | $V_{bc}$ | Fig. 5.3(d) |
| $4π/3..5π/3$ | $D_2$   | $D_4$   | $V_{ba}$ | Fig. 5.3(e) |
| $5π/3..2π$   | $D_3$   | $D_4$   | $V_{ca}$ | Fig. 5.3(f) |

```
1 V_pL = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{pL} = 1.7321 V_p$$

```
1 Figura_WF_Diagrama_Fasorial_6P()
```

```
1 Figura_WF_Fontes_Trifasicas_6P_2()
```

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 5.7, a seguir.

```
1 Figura_WF_6pulsosM0_para_carga_R();
```

Observa-se que a tensão sobre a carga, bem como a corrente são sempre positivas. A frequência da tensão da carga é seis vezes maior que a frequência das fontes de alimentação. A tensão reversa máxima que os diodos devem suportar é superior às tensões das fontes presentes na topologia, porque estas apresentam conexões do tipo série durante algumas etapas.

Figura 5.5. Diagrama fasorial

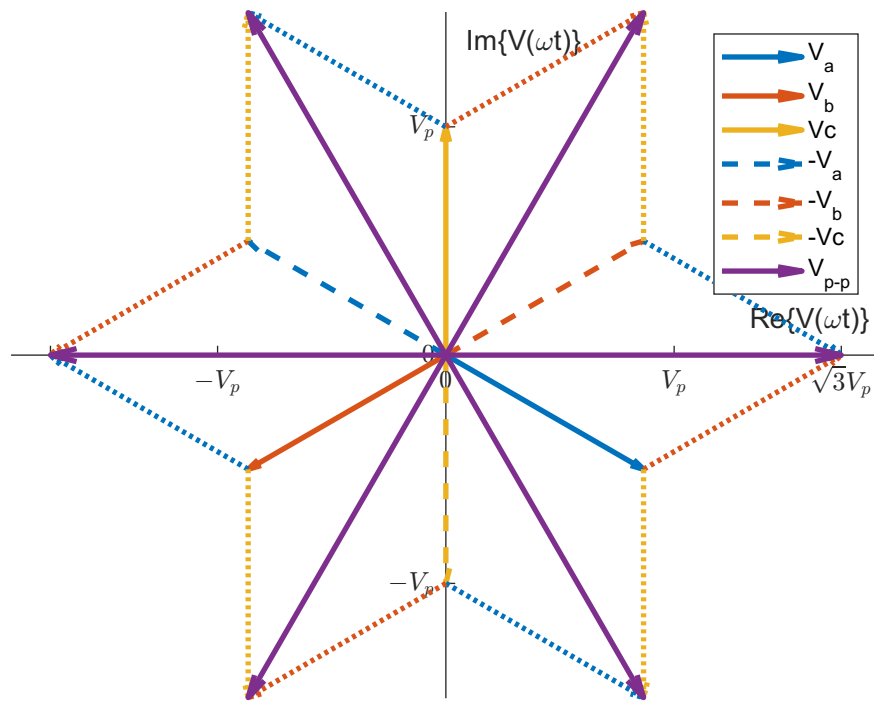
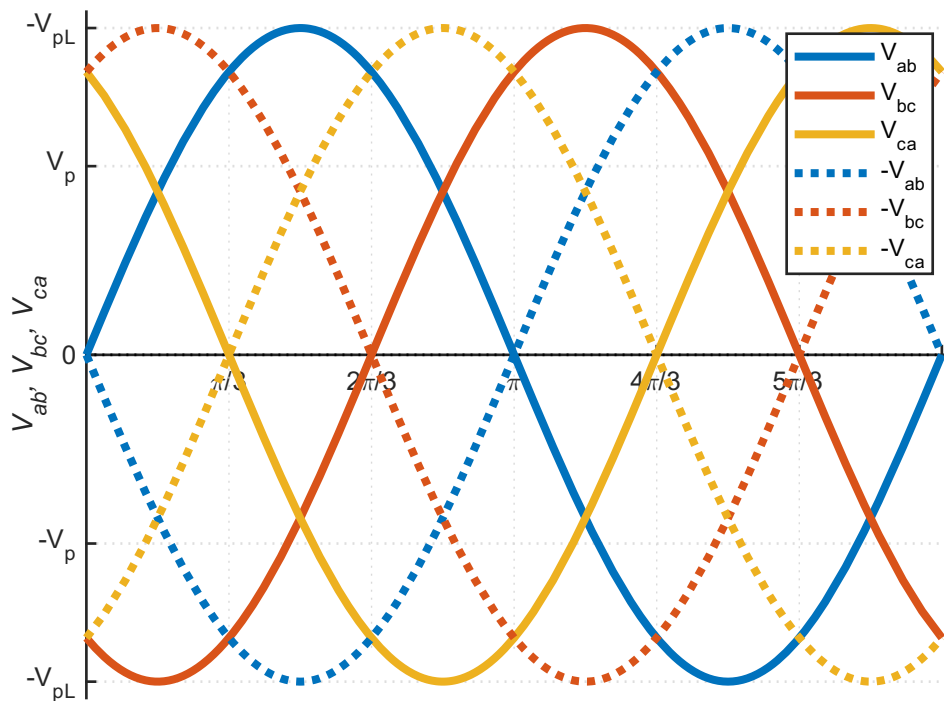


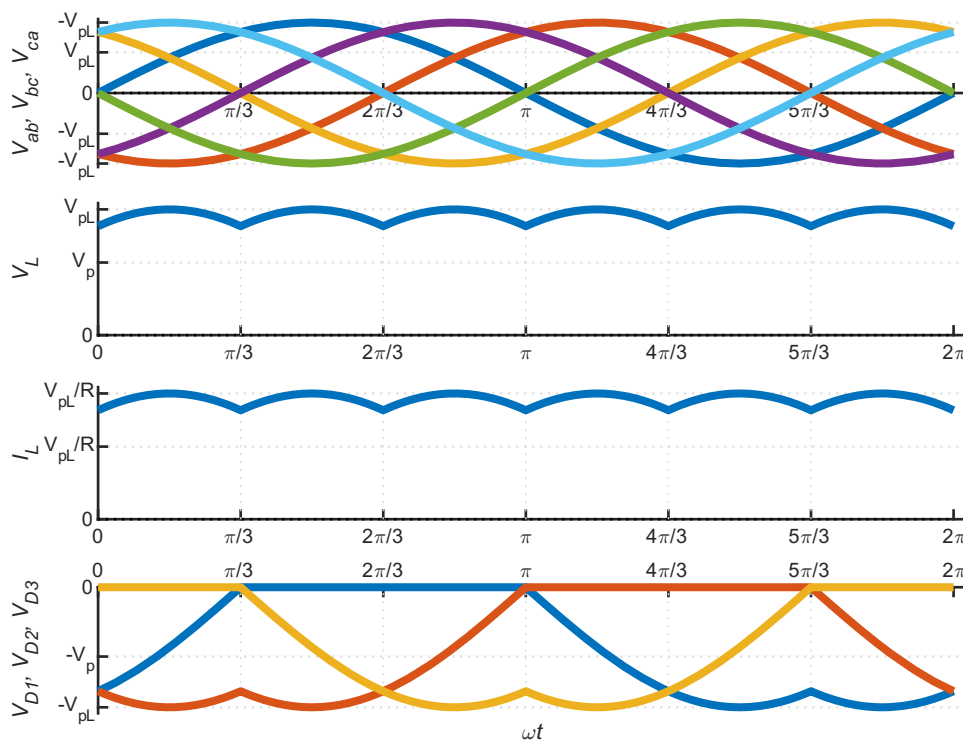
Figura 5.6. Formas de onda das tensões de linha.



#### 5.1.4 Equações para o projeto

A tensão média sobre a carga é calculada através de:

Figura 5.7. Principais formas de onda.



$$V_{L\text{Med}} = \frac{6}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{3}V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (5.2)$$

pois a forma de onda de tensão se repete seis vezes durante um período de operação, iniciando em  $\pi/3$  e terminando em  $2\pi/3$ .

```

1 syms V_p wt
2 sympref('FloatingPointOutput',0);
3 V_LMed = 6/(2*sym('pi'))*sqrt(3)*int(V_p*sin(wt),wt,pi/3,2*pi/3)

```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{\pi} \quad (5.3)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```

1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 6/(2*sym('pi'))*sqrt(3)*int(V_p*sin(wt)/R,wt,pi/3,2*pi/3)

```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{R\pi} \quad (5.4)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através de

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{6}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (\sqrt{3}V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (5.5)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 sympref('FloatingPointOutput',1);
3 V_LRMS = sqrt(6/(2*pi)*int((sqrt(3)*V_p*sin(wt))^2,wt,pi/3,2*pi/3))
```

$$V_{LRMS} = 1.6554 V_p$$

que corresponde a

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{6\pi + 9\sqrt{3}}{4\pi}} \quad (5.6)$$

```
1 V_LRMS = V_p*sqrt((6*pi + 9*sqrt(3))/(4*pi))
```

$$V_{LRMS} = 1.6554 V_p \quad (5.7)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```
1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(6/(2*pi)*int((sqrt(3)*V_p*sin(wt)/R)^2,wt,pi/3,2*pi/3))
```

$$I_{LRMS} = \frac{1.6554 V_p}{R} \quad (5.8)$$

A tensão máxima sobre cada diodo corresponde à soma fasorial de duas das fontes de alimentação, da mesma forma que ocorre para o retificador de três pulsos, pois estas fontes se encontram conectadas em série quando é aplicada tensão reversa sobre cada diodo.

Dessa forma,

$$V_{DMax} = \sqrt{3} V_p$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{DMax} = 1.7321 V_p \quad (5.9)$$

Como a corrente através da carga é proporcional à sua tensão.

```
1 I_DMax = V_pL/R
```

$$I_{DMax} = 1.7321 \frac{V_p}{R} \quad (5.10)$$

A corrente média através de cada diodo corresponde à terça parte da corrente média na carga, de forma que,

```
1 I_DMed = I_LMed/3
```

$$I_{DMed} = \frac{1.7321 V_p}{R \pi}$$

### 5.1.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir. Serão utilizadas as equações 5.3, 5.4, 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3
4 V_LMed = 6*sqrt(3)*V_p/(2*pi)
```

$$V_{L\ Med} = 514.5999$$

```
1 I_LMed = 6*sqrt(3)*V_p/(2*pi*R)
```

$$I_{L\ Med} = 51.4600$$

```
1 V_LRMS = V_p*sqrt((6*sym(pi) + 9*sqrt(3))/(4*pi))
```

$$V_{L\ RMS} = 515.0528$$

```
1 I_LRMS = V_p*sqrt((6*sym(pi) + 9*sqrt(3))/(4*pi))/R
```

$$I_{L\ RMS} = 51.5053$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{D\ Max} = 538.8877$$

```
1 I_DMax = sqrt(3)*V_p/R
```

$$I_{D\ Max} = 53.8888$$

## 5.2 Carga RE

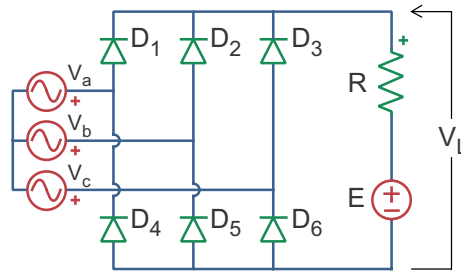
### 5.2.1 Topologia

Esta topologia é semelhante à topologia analisada na seção 5.1 exceto que a carga é formada por uma resistência em série com uma fonte de tensão de valor  $E$ , conforme ilustrado na Fig. 5.8.

As discussões contidas nesta seção consideram que

$$\frac{\sqrt{3}V_{pL}}{2} < E < V_{pL} \quad (5.11)$$

Figura 5.8. Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.



### 5.2.2 Etapas de operação

Para esta topologia, o diodo  $D_1$  pode conduzir entre os ângulos  $\pi/3$  e  $\pi$  desde que a soma das tensões da fonte  $V_a$  com  $V_b$  ou  $V_c$  seja maior que a tensão da fonte  $E$  (Fig. 5.3(b) e 5.3(c)). Por sua vez, o diodo  $D_2$  pode entrar em condução após o ângulo  $\pi$  e permanecer em condução até atingir o ângulo  $5\pi/3$ , mas somente se a tensão  $V_b$  (somada à  $V_a$  ou  $V_c$ ) for maior que a tensão da fonte  $E$  (Fig. 5.3(d) e 5.3(e)). Finalmente, após o ângulo  $5\pi/3$  ser atingido, o diodo  $D_3$  poderá conduzir enquanto os diodos  $D_1$  e  $D_2$  se encontram bloqueados (Fig. 5.3(f) e 5.3(a)). No entanto  $D_3$  somente conduzirá enquanto que a tensão fornecida por  $V_c$  (somada à  $V_a$  ou  $V_b$ ) for maior que  $E$ . O diodo  $D_3$  conduzirá até  $7\pi/3$  (ou  $\pi/3$  no primeiro quadrante).

Quando a soma das tensões das fontes  $V_a$ ,  $V_b$  e  $V_c$  aos pares e em módulo é inferior à  $E$ , 5.12, nenhum dos diodos se encontra em condução, de forma que não há corrente através da carga, e conseqüentemente não há nenhuma queda de tensão sobre a resistência  $R$  (Fig. 5.16(c)). Portanto, quando nenhum diodo está conduzindo, a tensão  $V_L(\omega t)$  corresponde a  $E$ .

$$\begin{cases} |V_a + V_b| & \text{ou} \\ |V_b + V_c| & \text{ou} \\ |V_c + V_a| \end{cases} \Rightarrow v_L(\omega t) = E \quad (5.12)$$

Por sua vez, os diodos  $D_4$ ,  $D_5$  e  $D_6$  operam de maneira semelhante aos diodos  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ , porém defasados pelo ângulo  $\pi$ .

Os circuitos equivalentes são os mesmos daqueles mostrados na (Fig. 5.3), exceto que a carga é formada por uma resistência em série com a fonte de tensão  $E$ . Além disso, quando nenhuma das tensões de linha é maior que  $E$ , nenhum diodo conduz e a tensão sobre a carga corresponde à  $E$ .

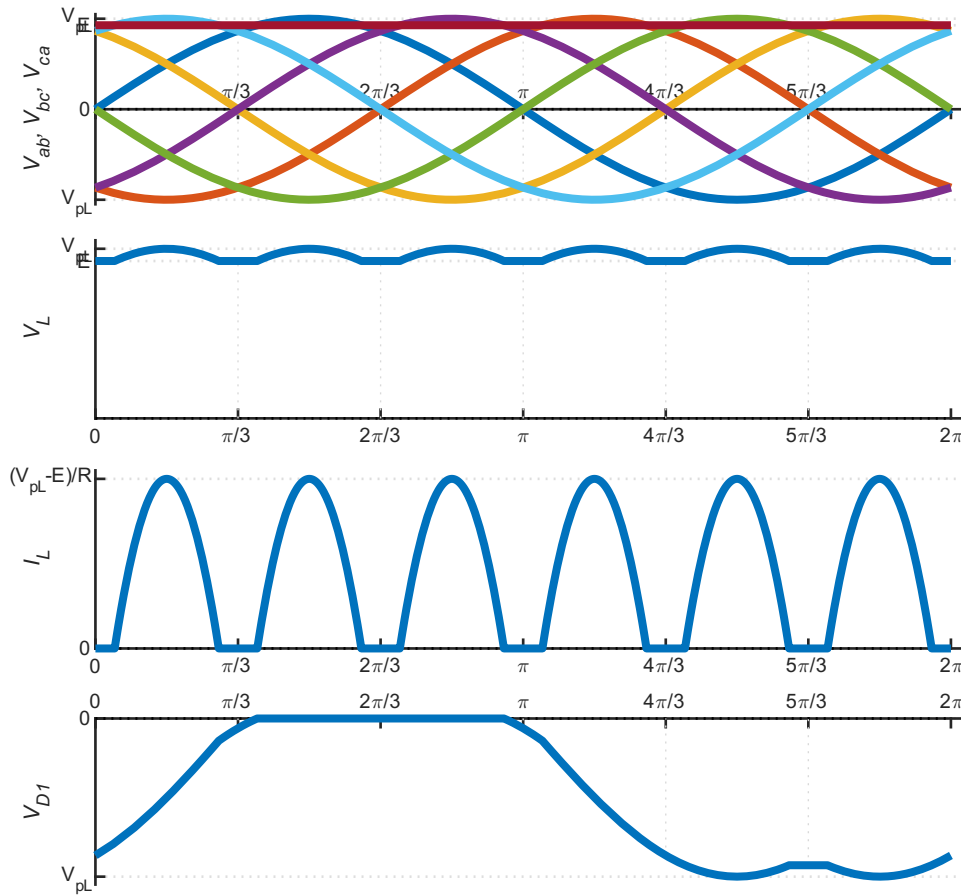
### 5.2.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 5.9. Observa-se que a interseção entre as formas de onda  $V_{ab}(\omega t)$  e  $E$  ocorre para os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e se repete para  $\theta_1 + n2\pi/6$  e  $\theta_2 + n2\pi/6$ . Durante estes períodos, a tensão na carga é sempre superior à tensão da fonte  $E$ . A corrente através da carga é proporcional à tensão sobre a resistência  $R$ .

As formas de onda ilustradas na Fig. 5.9 consideram  $\sqrt{3}V_{pL}/2 < E < V_{pL}$ . Caso  $E$  seja menor que  $\sqrt{3}V_{pL}/2$ , dois diodos estarão sempre em condução durante todo o ciclo de operação e as formas de onda corresponderão àquelas ilustradas na Fig. 5.7, mostrada anteriormente. Por outro lado, quando  $E$  é maior que a tensão de pico de linha ( $V_{pL}$ ), nenhum diodo conduzirá durante o ciclo de operação e a tensão sobre a carga será igual àquela da fonte  $E$ .

1 Figura\_WF\_6pulsosM0\_para\_carga\_RE()

Figura 5.9. Principais formas de onda.



Primeiramente determina-se a interseção entre as formas de onda das duas fontes.

```
1 clearvars
2 syms V_pL wt E R
3
4 eq = V_pL*sin(wt) == E
```

$$eq = V_{pL} \sin(wt) = E$$

```
1 thetas = solve(eq,wt)
```

$$thetas = \begin{bmatrix} \text{asin}\left(\frac{E}{V_{pL}}\right) \\ \pi - \text{asin}\left(\frac{E}{V_{pL}}\right) \end{bmatrix}$$

```
1 theta_1 = thetas(1)
```

$$\theta_1 = \text{asin}\left(\frac{E}{V_{pL}}\right)$$

```
1 theta_2 = thetas(2)
```

$$\theta_2 = \pi - \text{asin}\left(\frac{E}{V_{pL}}\right)$$

O diodo  $D_1$  conduzirá nos intervalos  $[\theta_1 .. \theta_2]$  e  $[\theta_1 + \pi/3 .. \theta_2 + \pi/3]$ . Por sua vez, diodo  $D_2$  conduzirá nos intervalos  $[\theta_1 + 2\pi/3 .. \theta_2 + 2\pi/3]$  e  $[\theta_1 + \pi .. \theta_2 + \pi]$  e o diodo  $D_3$  conduzirá nos intervalos  $[\theta_1 + 4\pi/3 .. \theta_2 + 4\pi/3]$  e  $[\theta_1 + 5\pi/3 .. \theta_2 + 5\pi/3]$ . Os diodos  $D_4$ ,  $D_5$  e  $D_6$  conduzirão  $\pi$  rad ( $180^\circ$ ) após  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ .

#### 5.2.4 Equações para o projeto

Tendo em vista que a operação desta estrutura depende dos valores de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , os mesmos serão utilizados para o projeto deste retificador.

A tensão média sobre a carga pode ser obtida usando

$$V_{L Med} = \frac{6}{2\pi} \left[ \int_{\pi/3}^{\theta_1} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{3}V_p \sin(\omega t) d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{2\pi/3} Ed(\omega t) \right] \quad (5.13)$$

Que pode ser simplificada para

$$V_{L Med} = \frac{6}{2\pi} \left[ \int_{\pi/3+\theta_2}^{\theta_1+2\pi/3} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{3}V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (5.14)$$

ou seja,

$$V_{L Med} = \frac{3}{\pi} \left[ \int_{\theta_2}^{\theta_1+\pi/3} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{3}V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (5.15)$$

```
1 syms wt theta_1 theta_2 V_pL
2
3 V_LMed = 6/(2*sym('pi'))*(int(V_pL*sin(wt),wt,theta_1,theta_2)+...
4     int(E,wt,theta_2,sym('pi')/3+theta_1))
```

$$V_{L Med} = \frac{3 (V_{pL} (\cos (\theta_1) - \cos (\theta_2)) + E (0.3333 \pi + \theta_1 - \theta_2))}{\pi} \quad (5.16)$$

```
1 V_RMed = 6/(2*sym('pi'))*int((V_pL*sin(wt)-E),wt,theta_1,theta_2)
```

A tensão média sobre a resistência pode ser definida por

$$V_{R Med} = \frac{3 (V_{pL} (\cos (\theta_1) - \cos (\theta_2)) + E (\theta_1 - \theta_2))}{\pi}$$

```
1 syms wt theta_1 theta_2
2
3 I_LMed = 6/(2*sym('pi'))*int((V_pL*sin(wt)-E)/R,wt,theta_1,theta_2)
```

$$I_{L Med} = \frac{3 \left( \frac{V_{pL} (\cos (\theta_1) - \cos (\theta_2))}{R} + \frac{E (\theta_1 - \theta_2)}{R} \right)}{\pi}$$

```
1 I_LMed = simplifyFraction(I_LMed)
```

$$I_{L Med} = \frac{3 (E \theta_1 - E \theta_2 + V_{pL} \cos (\theta_1) - V_{pL} \cos (\theta_2))}{R \pi}$$

```
1 I_LMed = collect(I_LMed, {'E','V_pL','R'})
```

$$I_{L Med} = \frac{V_{pL} (3 \cos (\theta_1) - 3 \cos (\theta_2)) + E (3 \theta_1 - 3 \theta_2)}{R \pi} \quad (5.17)$$

A tensão eficaz sobre a carga pode ser obtida através da equação

$$V_{L RMS} = \sqrt{\frac{6}{2\pi} \left[ \int_{\pi/3}^{\theta_1} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sqrt{3} V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{2\pi/3} E^2 d(\omega t) \right]} \quad (5.18)$$

Que como visto anteriormente, corresponde a

$$V_{L RMS} = \sqrt{\frac{3}{\pi} \left[ \int_{\pi/3+\theta_2}^{\theta_1+2\pi/3} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sqrt{3} V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) \right]} \quad (5.19)$$

Ou seja,

$$V_{L RMS} = \sqrt{\frac{3}{\pi} \left[ \int_{\theta_2}^{\theta_1+\pi/3} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sqrt{3} V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) \right]} \quad (5.20)$$

```

1 syms V_p wt, assume([V_p, sym('pi')], {'positive', 'real'})
2 V_LRMS = sqrt(3/(sym('pi'))*(int((V_p*sin(wt))^2,wt,theta_1,theta_2)+...
3      int((E)^2,wt,theta_2,sym('pi')/3+theta_1)))

```

$$V_{LRMS} = \frac{1.7321 \sqrt{E^2 (0.3333 \pi + \theta_1 - \theta_2) - 0.2500 V_{pL}^2 (2 \theta_1 - 2 \theta_2 - \sin(2 \theta_1) + \sin(2 \theta_2))}}{\pi^{0.5}} \quad (5.21)$$

E a tensão sobre a resistência pode ser determinada através de

```

1 V_RRMS = sqrt(6/(2*sym('pi'))*int((V_pL*sin(wt)-E)^2,wt,theta_1,theta_2));
2 MostrarEquacoesLongas(V_RRMS,[3,1])

```

$$V_{RRMS} = \frac{1.7321 \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8}}{\pi^{0.5}}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= 0.2500 V_{pL}^2 \sin(2 \theta_1) \\
 \sigma_2 &= -0.2500 V_{pL}^2 \sin(2 \theta_2) \\
 \sigma_3 &= -E^2 \theta_1 \\
 \sigma_4 &= E^2 \theta_2 \\
 \sigma_5 &= -0.5000 V_{pL}^2 \theta_1 \\
 \sigma_6 &= 0.5000 V_{pL}^2 \theta_2 \\
 \sigma_7 &= -2 E V_{pL} \cos(\theta_1) \\
 \sigma_8 &= 2 E V_{pL} \cos(\theta_2)
 \end{aligned}$$

Como a corrente através do circuito auxiliar é proporcional à tensão sobre o resistor,

```

1 I_LRMS = V_LRMS/R

```

$$I_{LRMS} = \frac{V_{LRMS}}{R} \quad (5.22)$$

A tensão máxima sobre os diodos corresponde à tensão de linha máxima.

$$V_{DMax} = V_{pL}$$

```

1 V_DMax = V_pL

```

$$V_{DMax} = V_{pL} \quad (5.23)$$

E a corrente máxima,

$$I_{DMax} = (V_{pL} - E)/R$$

```

1 I_DMax = (V_pL - E)/R

```

$$I_{DMax} = -\frac{E - V_{pL}}{R} \quad (5.24)$$

### 5.2.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 5.16, 5.17, 5.20, 5.22, 5.23 e 5.24.

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 V_pL = sqrt(3)*sqrt(2)*220;
3 R = 10;
4 f = 60;
5 E = 500;
6 w = 2*pi*f

```

$$w = 376.9911$$

```

1 theta_1 = asin(E/V_pL)

```

$$\theta_1 = 1.1886$$

```

1 theta_2 = pi - asin(E/V_pL)

```

$$\theta_2 = 1.9530$$

```

1 V_LMed = (3*(V_pL*(cos(theta_1) - cos(theta_2)) + E*(pi/3 + theta_1 - theta_2)))/pi

```

$$V_{L\ Med} = 518.8789$$

```

1 I_LMed = (V_pL*(3*cos(theta_1) - 3*cos(theta_2)) + E*(3*theta_1 - 3*theta_2))/(R*pi)

```

$$I_{L\ Med} = 1.8879$$

```

1 V_LRMS = (sqrt(3)*sqrt(E^2*(pi/3 + theta_1 - theta_2) - ...
2         V_pL^2*(2*theta_1 - 2*theta_2 - sin(2*theta_1) + sin(2*theta_2))/4))/pi^0.5

```

$$V_{L\ RMS} = 519.1008$$

```

1 sigma1 = V_pL^2*sin(2*theta_1)/4;
2 sigma2 = -V_pL^2*sin(2*theta_2)/4;
3 sigma3 = -E^sym(2)*theta_1;
4 sigma4 = E^sym(2)*theta_2;
5 sigma5 = -V_pL^2*theta_1/2;
6 sigma6 = V_pL^2*theta_2/2;
7 sigma7 = -2*E*V_pL*cos(theta_1);
8 sigma8 = 2*E*V_pL*cos(theta_2);
9
10 V_RRMS = (sqrt(3)*sqrt(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + sigma6 + ...
11         sigma7 + sigma8))/pi^0.5

```

$$V_{RRMS} = 24.2222$$

$$1 \quad I_{LRMS} = V_{RRMS}/R$$

$$I_{LRMS} = 2.4222$$

$$1 \quad V_{DMax} = V_{pL}$$

$$V_{DMax} = 538.8877$$

$$1 \quad I_{DMax} = (V_{pL} - E)/R$$

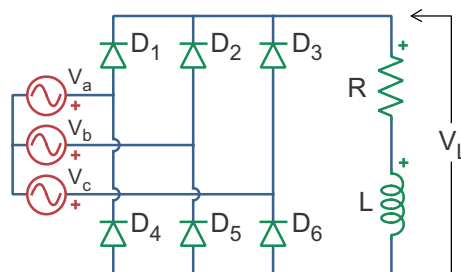
$$I_{DMax} = 3.8888$$

## 5.3 carga indutiva RL

### 5.3.1 Topologia

Este retificador é semelhante ao estudado na seção 5.1, exceto que agora a carga é indutiva, formada por um resistor e por um indutor conectados em série, conforme a Fig. 5.10.

Figura 5.10. Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga indutiva.



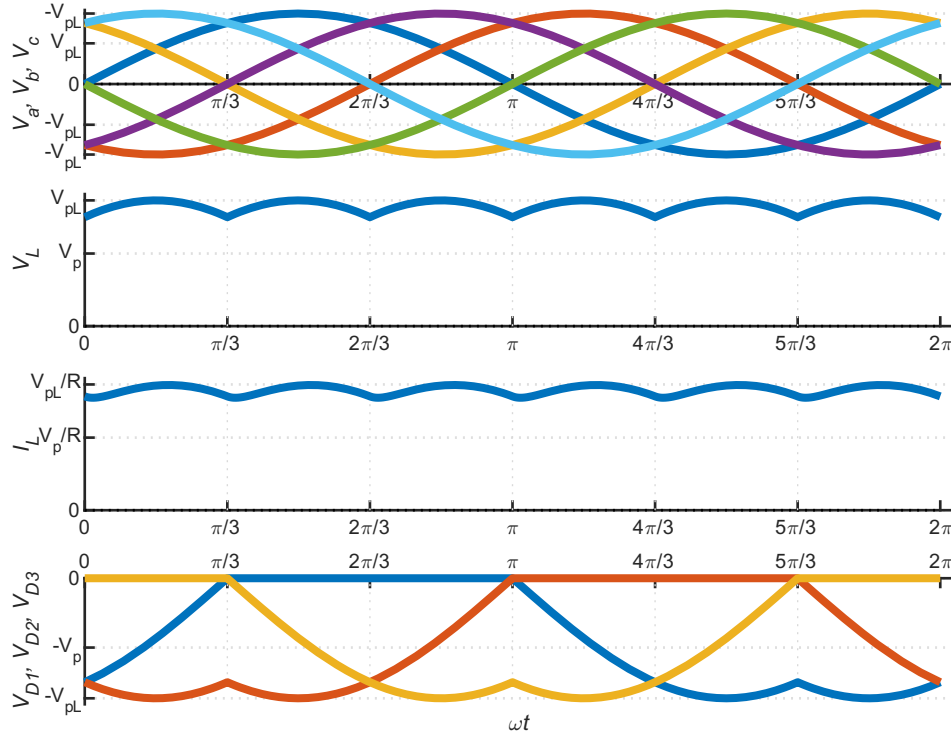
### 5.3.2 Etapas de operação

Esta carga apresenta uma característica indutiva devido à indutância em série com a carga resistiva. O comportamento do circuito é similar ao do retificador da seção 5.1, exceto que a corrente deixa de ser proporcional à tensão neste caso. Os diodos conduzem durante os mesmos períodos do conversor apresentado na seção 5.1, sendo que as etapas de operação foram ilustradas na Fig. 5.3.

### 5.3.3 Formas de onda

As principais formas de onda podem ser vistas na Fig. 5.11, a seguir. Observa-se que a corrente através da carga nunca se anula e, portanto, o retificador somente pode operar no modo de condução contínua, MCC.

Figura 5.11. Principais formas de onda.



### 5.3.3.1 Determinação de $i_L(t)$

Para obter a expressão da corrente através do indutor inicialmente necessita-se definir algumas variáveis simbólicas

```
1 syms omega phi wt I_L0 Z
2 sympref('FloatingPointOutput',0);
```

Foi visto na seção 1.3 que a corrente através da carga para um circuito indutivo alimentado por uma fonte de tensão é dada por 1.36, reproduzida a seguir. Aqui o valor de  $V_L$  será alterado para  $V_{pL}$  a fim de refletir que a tensão sobre a carga corresponde à tensão de linha.

```
1 i_L(wt) = -(V_pL*(sin(phi - wt) - exp((-wt/(omega*tau)))*sin(phi))...
2           - I_L0*Z*exp((-wt/(omega*tau))))/Z
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_{pL} \left( \sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z}$$

A corrente inicial através do indutor,  $IL_0$ , não é nula, sendo necessário determiná-la, conforme segue.

A condição de contorno para a determinação de  $IL_0$  é que esta corrente possui valores idênticos no início e no final do período de condução de cada par de diodos, visto que o circuito opera em regime permanente.

Por exemplo, fazendo-se  $i_L(\pi/3) = i_L(2\pi/3)$  pode-se determinar  $IL_0$

```
1 sympref('AbbreviateOutput', false);
2 eq = i_L(sym('pi')/3)==i_L(2*sym('pi')/3)
```

$$eq = -\frac{V_{pL} \left( \sin \left( \phi - \frac{\pi}{3} \right) - e^{-\frac{\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{\pi}{3\omega\tau}}}{Z} =$$

$$-\frac{V_{pL} \left( \sin \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right) - e^{-\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{2\pi}{3\omega\tau}}}{Z}$$

E resolvendo para  $IL_0$

```
1 I_L0 = solve(eq, I_L0)
```

$$IL_0 = -\frac{V_{pL} \sin(\phi) - V_{pL} e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + V_{pL} \sin \left( \phi - \frac{\pi}{3} \right) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - V_{pL} \sin \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}}}{Z - Z e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}}}$$

Simplificando,

```
1 I_L0 = simplify(expand(I_L0))
```

$$IL_0 = \frac{V_{pL} \left( \sin(\phi) - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + \sin \left( \phi - \frac{\pi}{3} \right) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - \sin \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \right)}{Z \left( e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)}$$

Usando equivalências trigonométricas é possível transformar o termo  $\sin \left( \phi - \frac{\pi}{3} \right)$  em  $\sin \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right) + (\dots)$ .

Como

$$\sin(A) - \sin(B) = 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \sin \left( \frac{A-B}{2} \right) \implies \sin(A) = \sin(B) + 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \sin \left( \frac{A-B}{2} \right)$$

Dessa forma,

$$\sin \left( \phi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right) + 2 \cos \left( \frac{1}{2} \left( \phi - \frac{\pi}{3} + \phi - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \sin \left( \frac{1}{2} \left( \phi - \frac{\pi}{3} - \phi + \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

Definindo a equivalência.

```
1 eq = sin(phi - sym('pi')/3) == sin(phi - 2*sym('pi')/3 ) + ...
2 2*cos((phi - sym('pi')/3 + phi - 2*sym('pi')/3 )/2)* ...
3 sin((phi - sym('pi')/3 - phi + 2*sym('pi')/3 )/2)
```

$$eq = \sin \left( \phi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left( \phi - \frac{2\pi}{3} \right) + 2 \cos \left( \phi - \frac{\pi}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{6} \right)$$

Como,

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

```
1 eq = subs(eq,sin(sym('pi')/6),1/2)
```

$$eq = \sin\left(\phi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Além disso,

$$\cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\phi)$$

```
1 eq = subs(eq,cos(phi - sym('pi')/2),sin(phi))
```

$$eq = \sin\left(\phi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(\phi)$$

Substituindo na equação de  $IL_0$ ,

```
1 I_L0 = subs(I_L0, lhs(eq), rhs(eq))
```

$$IL_0 = \frac{V_{pL} \left( \sin(\phi) - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) - \sin\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} + e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \left( \sin\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(\phi) \right) \right)}{Z \left( e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)}$$

Que pode ser simplificado para

```
1 I_L0 = simplify(expand(I_L0))
```

$$IL_0 = \frac{V_{pL} \sin(\phi) \left( e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} + 1 \right)}{Z \left( e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)}$$

Substituindo  $IL_0$  na equação de  $i_L(wt)$

```
1 i_L(wt) = subs(i_L(wt), 'I_L0', I_L0)
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_{pL} \left( \sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - \frac{V_{pL} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \left( e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} + 1 \right)}{e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1}}{Z}$$

Tentando simplificar a equação...

```
1 i_L = simplifyFraction(i_L,"Expand",true)
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_{pL} e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + V_{pL} \sin(\phi - wt) e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - V_{pL} \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - Z e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}}$$

```
1 %Agrupando V_pL e Z
2 i_L = collect(i_L,{'V_pL', 'Z'})
```

$$i_L(wt) = \frac{\left(e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + \sin(\phi - wt) e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}\right) V_{pL}}{\left(e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{wt}{\omega\tau}}\right) Z}$$

```
1 i_L = collect(i_L,sym(sin(phi - wt)))
```

$$i_L(wt) = \frac{V_{pL} \left(e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}\right)}{\left(e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{wt}{\omega\tau}}\right) Z} \sin(\phi - wt) + \frac{V_{pL} e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{\left(e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{wt}{\omega\tau}}\right) Z}$$

Como o seno é uma função ímpar,

```
1 i_L = subs(i_L,-sin(phi - wt),sin(wt - phi))
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_{pL} \sin(\phi - wt)}{Z} - \frac{V_{pL} e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z \left(e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}\right)}$$

```
1 i_L = collect(i_L,{'V_pL'})
```

$$i_L(wt) = \left(-\frac{\sin(\phi - wt)}{Z} - \frac{e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z \left(e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}\right)}\right) V_{pL}$$

Esta equação ainda pode ser simplificada manualmente isolando-se Z e multiplicando-se o numerador e o denominador da segunda parcela por  $e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}$ .

$$i_L(wt) = \left(-\sin(\phi - wt) - \frac{e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{\left(1 - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}}\right)}\right) \frac{V_{pL}}{Z}$$

Então

$$i_L(wt) = \left(-\sin(\phi - wt) - \sin(\phi) \frac{e^{-\frac{wt+2\pi/3}{\omega\tau}}}{1 - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}}}\right) \frac{V_{pL}}{Z}$$

Ou seja,

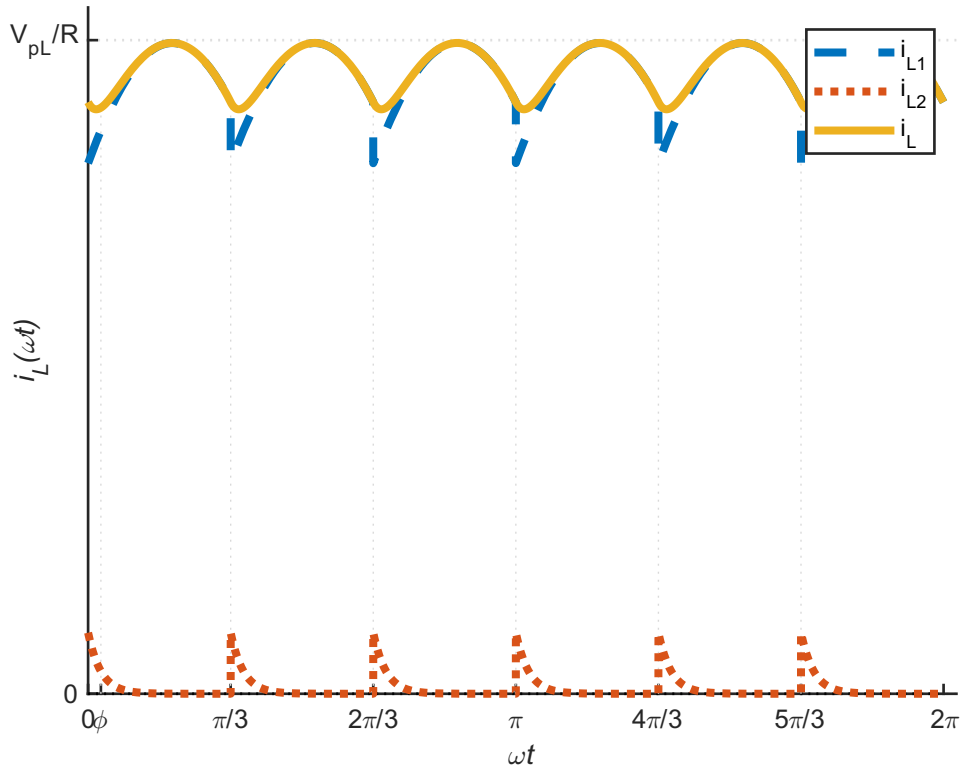
```
1 i_L = (-sin(phi - wt) - exp((-3*wt + 2*sym(pi))/(3*omega*tau))*sin(phi)/(1 - exp(sym(pi)/(3*omega*tau))))*(V_pL/Z)
```

$$i_L = -\frac{V_{pL} \left( \sin(\phi - \omega t) - \frac{e^{-\frac{3\omega t - 2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1} \right)}{Z}$$

Na Fig. 5.12 é mostrada a forma de onda da corrente  $i_L(\omega t)$  e as formas de onda das componentes ( $i_{L1}(\omega t)$  e  $i_{L2}(\omega t)$ ) que somadas compõem a corrente através da carga. Observa-se que a frequência das formas de onda na carga é seis vezes a frequência das fontes que alimentam a estrutura.

```
1 Figura_IL_6pulsosMO_para_carga_RL();
```

Figura 5.12. Forma de onda da corrente através da carga e de suas componentes.



### 5.3.3.2 Análise utilizando a Série de Fourier

A série de Fourier para a corrente de carga pode ser calculada conforme abaixo.

$$v(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(6n\omega t) + b_n \sen(6n\omega t))$$

e a corrente através da seguinte definição.

$$i(\omega t) = \frac{a_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(6n\omega t - \phi_n) + b_n \sen(6n\omega t - \phi_n)}{Z_n}$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(\omega t) d(\omega t)$$

Observa-se que a frequência das senoides corresponde ao sêxtuplo da frequência de entrada.

```
1 % definição das variáveis simbólicas
2 syms V_pL wt n omega L R
3 % definição das restrições
4 assume(n,{'positive', 'integer'})
```

Tendo em vista a multiplicação da frequência da forma de onda sobre a carga, o intervalo a ser considerado inicia em  $\pi/3$  e termina em  $2\pi/3$ .

**Limites de integração:**

```
1 lim_inf = sym('pi')/3;
2 lim_sup = 2*sym('pi')/3;
```

**Período:**

```
1 T = (2*sym('pi'))/6;
```

**Forma de onda durante a condução do diodo  $D_1$**

```
1 Va(wt) = V_pL*sin(wt);
```

**Determinação dos coeficientes**

```
1 a_0 = 1/(T)*int(Va,wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_0 = \frac{3 V_{pL} \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)}{\pi}$$

Para se obter o valor numérico de  $a_0$ ,

```
1 a_0 = subs(a_0, {cos(sym('pi')/3), cos(2*sym('pi')/3)}, {1/2, -1/2})
```

$$a_0 = \frac{3 V_{pL}}{\pi} \quad (5.25)$$

Determinação de  $a_n$ :

```
1 a_n(n) = 2/(T)*int(Va*cos(n*6*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_n(n) = -\frac{6 V_{pL} \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi(6n-1)}{3}\right)}{12n-2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi(6n+1)}{3}\right)}{12n+2} - \frac{\cos\left(\frac{2\pi(6n-1)}{3}\right)}{12n-2} + \frac{\cos\left(\frac{2\pi(6n+1)}{3}\right)}{12n+2} \right)}{\pi}$$

```
1 %test(a_n)
2 a_n = simplify(expand(a_n));
3 MostrarEquacoesLongas(a_n,[3])
```

$$a_n(n) = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4}{\pi(36n^2 - 1)}$$

onde:

$$\sigma_1 = 6 V_{pL} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2n\pi)$$

$$\sigma_2 = -6 V_{pL} \left( 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - 1 \right) (2 \cos(2n\pi)^2 - 1)$$

$$\sigma_3 = 36 V_{pL} n \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(2n\pi)$$

$$\sigma_4 = -144 V_{pL} n \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2n\pi) \sin(2n\pi)$$

Sabendo que

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(2n\pi) = 0$$

$$\cos(2n\pi) = 1$$

```
1 a_n(n) = subs(a_n, {cos(sym('pi')/3),cos(2*sym('pi')/3)},{1/2, -1/2});
2 a_n(n) = subs(a_n, {sin(sym('pi')/3),sin(2*sym('pi')/3)},{sqrt(3)/2, sqrt(3)/2})
3 a_n(n) = subs(a_n, {cos(2*n*sym('pi')),sin(2*n*sym('pi'))},{1,0})
```

$$a_n(n) = -\frac{6 V_{pL}}{\pi(36n^2 - 1)} \quad (5.26)$$

Determinação de  $b_n$ :

```
1 b_n(n) = 2/(T)*int(Va*sin(n*6*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$b_n(n) = -\frac{6 V_{pL} \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi (6n-1)}{3}\right)}{12n-2} - \frac{\sin\left(\frac{\pi (6n+1)}{3}\right)}{12n+2} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi (6n-1)}{3}\right)}{12n-2} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi (6n+1)}{3}\right)}{12n+2} \right)}{\pi}$$

```
1 b_n = simplify(expand(b_n));
2
3 MostrarEquacoesLongas(b_n,[3],0)
```

$$b_n(n) = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4}{\pi (36n^2 - 1)}$$

onde:

$$\sigma_1 = 6 V_{pL} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(2n\pi)$$

$$\sigma_2 = -36 V_{pL} n \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2n\pi)$$

$$\sigma_3 = -12 V_{pL} \cos(2n\pi) \sin(2n\pi) \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - 1\right)$$

$$\sigma_4 = 72 V_{pL} n \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) (2 \cos(2n\pi)^2 - 1)$$

Substituindo os termos conhecidos, como feito anteriormente para  $a_n$

```
1 b_n(n) = subs(b_n, {cos(sym('pi')/3),cos(2*sym('pi')/3)},{1/2, -1/2});
2 b_n(n) = subs(b_n, {sin(sym('pi')/3),sin(2*sym('pi')/3)},{sqrt(3)/2, sqrt(3)/2})
3 b_n(n) = subs(b_n, {cos(2*n*sym('pi')),sin(2*n*sym('pi'))},{1,0})
```

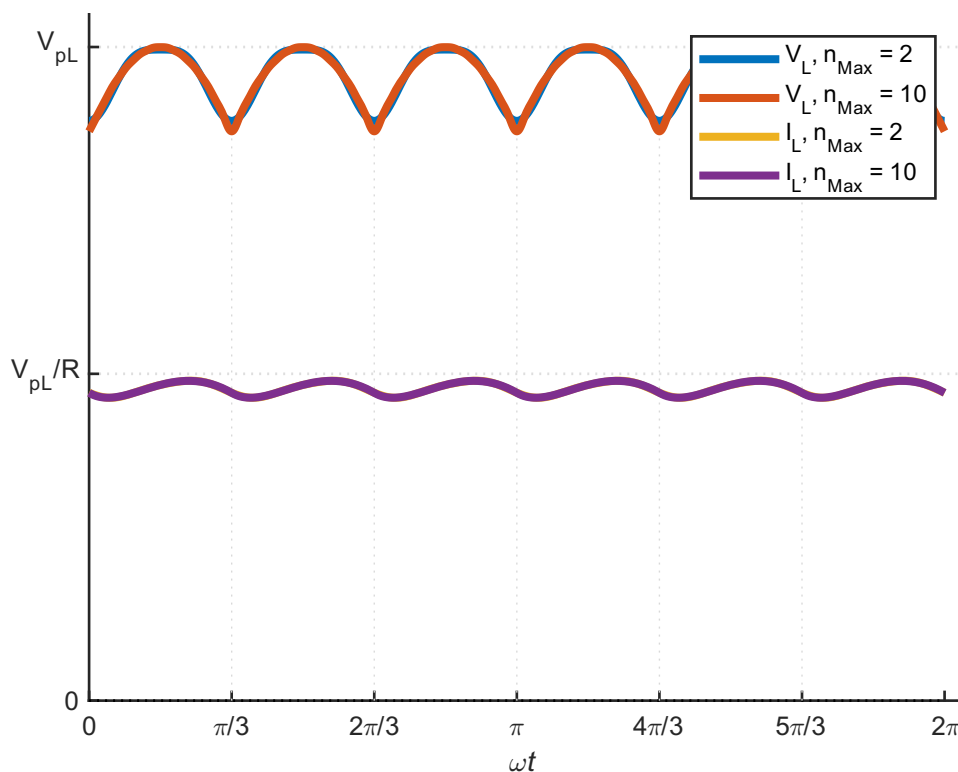
$$b_n(n) = 0 \quad (5.27)$$

A Fig. 5.13 mostra o gráfico da Série de Fourier obtida para a tensão e também para a corrente através da carga, sendo que foi variada a quantidade de termos utilizados para a geração da série. Foram utilizados dois termos para gerar um par de formas de onda e dez termos para gerar o outro par, para vias de comparação.

Observa-se que mesmo utilizando-se somente dois termos a forma de onda de corrente é idêntica àquela em que são utilizados dez termos.

```
1 Figura_VL_IL_6pulsosM0_para_carga_RL_Serie_Fourier;
```

Figura 5.13. Forma de onda da corrente através da carga.



### 5.3.4 Equações para o projeto

As equações das tensões  $V_{L\text{Med}}$ ,  $V_{L\text{RMS}}$  e de  $V_{D\text{Max}}$  são as mesmas da seção 5.1.4, pois as formas de onda de tensão são idênticas.

```
1 syms V_p wt
2 V_LMed = 6/(2*sym('pi'))*int(V_p*sqrt(3)*sin(wt),wt,pi/3,2*pi/3)
```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{\pi} \quad (5.28)$$

O valor de  $I_{L\text{Med}}$  pode ser obtido através do termo  $a_0$  da série de Fourier, dividido pela resistência, conforme já demonstrado.

```
1 syms V_p wt R
2 I_LMed = (6*sqrt(sym(3))*V_p)/(2*sym(pi)*R)
```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{R\pi} \quad (5.29)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(6/(2*sym('pi'))*int((V_p*sqrt(3)*sin(wt))^2,wt,pi/3,2*pi/3))
```

$$V_{LRMS} = \frac{V_p \sqrt{\frac{3\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{4}}}{\sqrt{\pi}} \quad (5.30)$$

A corrente eficaz através da carga é calculada através da equação

$$I_{LRMS} = \sqrt{\frac{6}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (i_L(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (5.31)$$

```

1 %clearvars
2 syms V_p phi wt tau Z, assume([V_p, Z], 'positive')
3 i_L = (-sin(phi - wt) - ...
4      exp((-3*wt + 2*pi)/(3*omega*tau))*sin(phi)/(1 - exp(pi/(3*omega*tau))))*(V_pL/Z)

```

$$i_L = -\frac{V_{pL} \left( \sin(\phi - wt) - \frac{e^{-\frac{3wt-2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1} \right)}{Z}$$

```

1 I_LRMS = sqrt(6/(2*sym('pi'))*int((i_L)^2,wt,sym('pi')/6,5*sym('pi')/6));
2 I_LRMS = simplify(expand(eval(I_LRMS)));

```

Como o resultado obtido é bastante longo/complexo, não será reproduzido aqui. Sugere-se determinar  $I_{LRMS}$  numericamente ou através de simulação.

A tensão máxima sobre os diodos foi discutida na seção 5.1.4.

```

1 V_DMax = sqrt(3)*V_p

```

$$V_{DMax} = \sqrt{3} V_p \quad (5.32)$$

A corrente máxima pode ser obtida derivando-se a equação da corrente e igualando a zero,

```

1 % Por exemplo:
2 eq = diff(i_L,wt)==0

```

$$eq = \frac{V_{pL} \left( \cos(\phi - wt) - \frac{e^{-\frac{3wt-2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau (e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1)} \right)}{Z} = 0$$

multiplica-se por  $Z/V_p$  para simplificar e substitui-se  $\omega t$  por  $t_{Max}$ .

```

1 % Por exemplo:
2 eq = subs(eq*Z/V_pL,wt, sym('t_Max'))

```

$$eq = \cos(\phi - t_{Max}) - \frac{e^{-\frac{3t_{Max}-2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau(e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1)} = 0$$

Como  $t_{Max}$  é argumento de um cosseno e também expoente da função exponencial, não é possível obter seu valor algébrico. Dessa forma, encontra-se  $t_{Max}$  numericamente e substitui-se em  $i_L(\omega t)$ . Um palpite inicial para a raiz é  $T/4$ .

```
1 % Por exemplo:
2 % t_Max = vpasolve(eq,sym('t_Max'),1/(4*f))
3 % I_LMax = i_L(t_Max)
```

Em termos práticos, o valor máximo que a corrente de carga poderá atingir é dado por

$$I_{D\ Max} = V_{pL}/R$$

```
1 I_DMax = V_pL/R
```

$$I_{D\ Max} = \frac{V_{pL}}{R} \quad (5.33)$$

### 5.3.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32 e 5.33.

```
1 syms wt
2 sympref("FloatingPointOutput",1);
3 V_p = sqrt(2)*220;
4 R = 10;
5 L = 50e-3;
6 f = 60;
7
8 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 omega = w;
2
3 tau = L/R
```

$$\tau = 0.0050$$

```
1 XL = w*L
```

$$X_L = 18.8496$$

```
1 Z = sqrt(R^2+(XL)^2)
```

$$Z = 21.3379$$

```
1 phi = atan2(XL,R)
```

$$\phi = 1.0830$$

```
1 i_L(wt) = (-sin(phi - wt) - exp((-3*wt + 2*sym(pi))/(3*omega*tau))*...
2 sin(phi)/(1 - exp(sym(pi)/(3*omega*tau))))*(V_p*sqrt(3)/Z)
```

$$i_L(wt) = 30.0304e^{1.1111-0.5305wt} + 25.2550 \sin(wt - 1.0830)$$

Que pode ser ilustrada através de

```
1 % figure
2 % fplot(i_L(wt),[0,2*pi])
```

A tensão média na carga é definida por:

```
1 V_LMed = (6*sqrt(3)*V_p)/(2*pi)
```

$$V_{LMed} = 514.5999$$

```
1 I_LMed = (6*sqrt(3)*V_p)/(2*pi*R)
```

$$I_{LMed} = 51.4600$$

```
1 V_LRMS = V_p*sqrt((3*(2*pi + 3*sqrt(3)))/(4*pi))
```

$$V_{LRMS} = 515.0528$$

```
1 I_LRMS = sqrt(6/(2*pi)*int((i_L)^2,wt,pi/3,2*pi/3))
```

$$I_{LRMS} = 51.4603$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{DMax} = 538.8877$$

```

1 syms wt_Max
2 eq = diff(subs(i_L(wt),wt,wt_Max))==0

```

$$eq = 25.2550 \cos(wt_{Max} - 1.0830) - 15.9316 e^{1.1111 - 0.5305 wt_{Max}} = 0$$

```

1 wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),2*pi/4)

```

$$wt_{Max} = 1.8559$$

```

1 I_LMax = i_L(wt_Max)

```

$$I_{L_{Max}} = 51.7136$$

Assim

```

1 I_DMax = i_L(wt_Max)

```

$$I_{D_{Max}} = 51.7136$$

ou menor que

```

1 I_DMax = sqrt(3)*V_p/R

```

$$I_{D_{Max}} = 53.8888$$

## 5.4 Carga RL com Diodo de Roda Livre

### 5.4.1 Topologia

Esta topologia opera de maneira semelhante àquela apresentada na seção 5.3. O diodo de roda livre,  $D_{RL}$ , ajuda a proteger os demais diodos quando ocorrem as comutações de corrente entre os mesmos. Essa topologia está ilustrada na Fig. 5.14.

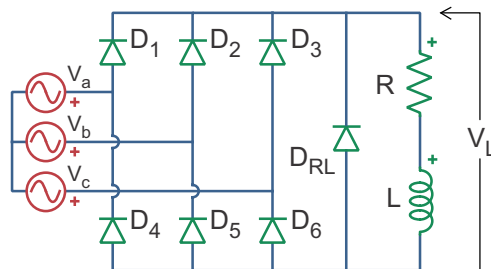
### 5.4.2 Etapas de operação

A operação desta estrutura é idêntica à da estrutura sem diodo de roda livre apresentada na seção 5.3.2. As etapas de operação são idênticas àquelas da Fig. 5.3.

### 5.4.3 Formas de onda

As principais formas de onda são idênticas àquelas da seção 5.3.3 e são ilustradas na Fig. 5.11.

Figura 5.14. Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



#### 5.4.4 Equações para o projeto

As principais equações para o projeto são as mesmas daquelas apresentadas seção 5.3.4. O diodo de roda-livre pode ser projetado como segue.

$$V_{DRL Max} = V_{pL}$$

#### 5.4.5 Exemplos numéricos

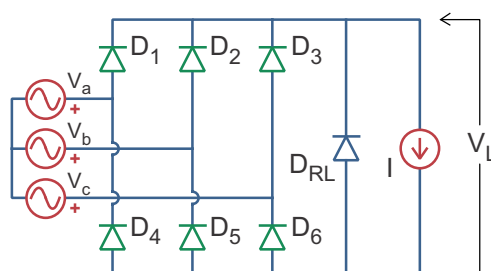
Os exemplos numéricos são idênticos àqueles da seção 5.3.5.

### 5.5 Carga I com Diodo de Roda-Livre

#### 5.5.1 Topologia

A carga conectada à esta topologia é uma fonte de corrente ou pode ser uma carga com uma indutância muito alta. Devido à característica indutiva da carga, a corrente permanece praticamente constante e é importante que haja um diodo em paralelo com a mesma para proteger os diodos  $D_1$ - $D_6$  nos instantes de suas comutações, Fig. 5.15.

Figura 5.15. Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga de fonte de corrente.



### 5.5.2 Etapas de operação

Esta estrutura opera de maneira semelhante àquela da seção 5.1, a diferença é que a corrente através dos diodos  $D_1$ - $D_6$  não varia senoidalmente, devido à fonte de corrente  $I$  em série com os mesmos quando estes estão em condução, Fig. 5.15. As etapas de operação são as mesmas da topologia estudada em 5.1.2 e não serão repetidas aqui.

### 5.5.3 Formas de onda

As principais formas de ondas estão mostradas na Fig. 5.16. Observa-se que a corrente através da carga é contínua e igual a  $I$  e que a mesma circula através do diodo  $D_1$  entre os ângulos  $\pi/3$  e  $\pi$ , através do diodo  $D_2$  após o ângulo  $\pi$  e até atingir o ângulo  $5\pi/3$  e então através do diodo  $D_3$  de  $5\pi/3$  até que o diodo  $D_1$  volte a conduzir. Por sua vez, o diodo  $D_5$  conduz entre os ângulos 0 e  $2\pi/3$ , então o diodo  $D_6$  conduz até atingir o ângulo  $4\pi/3$  e finalmente o diodo  $D_5$  conduz até o ângulo  $2\pi$ .

```
1 Figura_WF_6pulsosM0_para_carga_I()
```

### 5.5.4 Equações para o projeto

A tensão média sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\ Med} = \frac{6}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{3}V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (5.34)$$

```
1 syms V_pL wt I
2 V_LMed = 6/(2*sym('pi'))*int(V_pL*sin(wt),wt,sym(pi)/3,2*sym(pi)/3)
```

$$V_{L\ Med} = \frac{3V_{pL}}{\pi} \quad (5.35)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

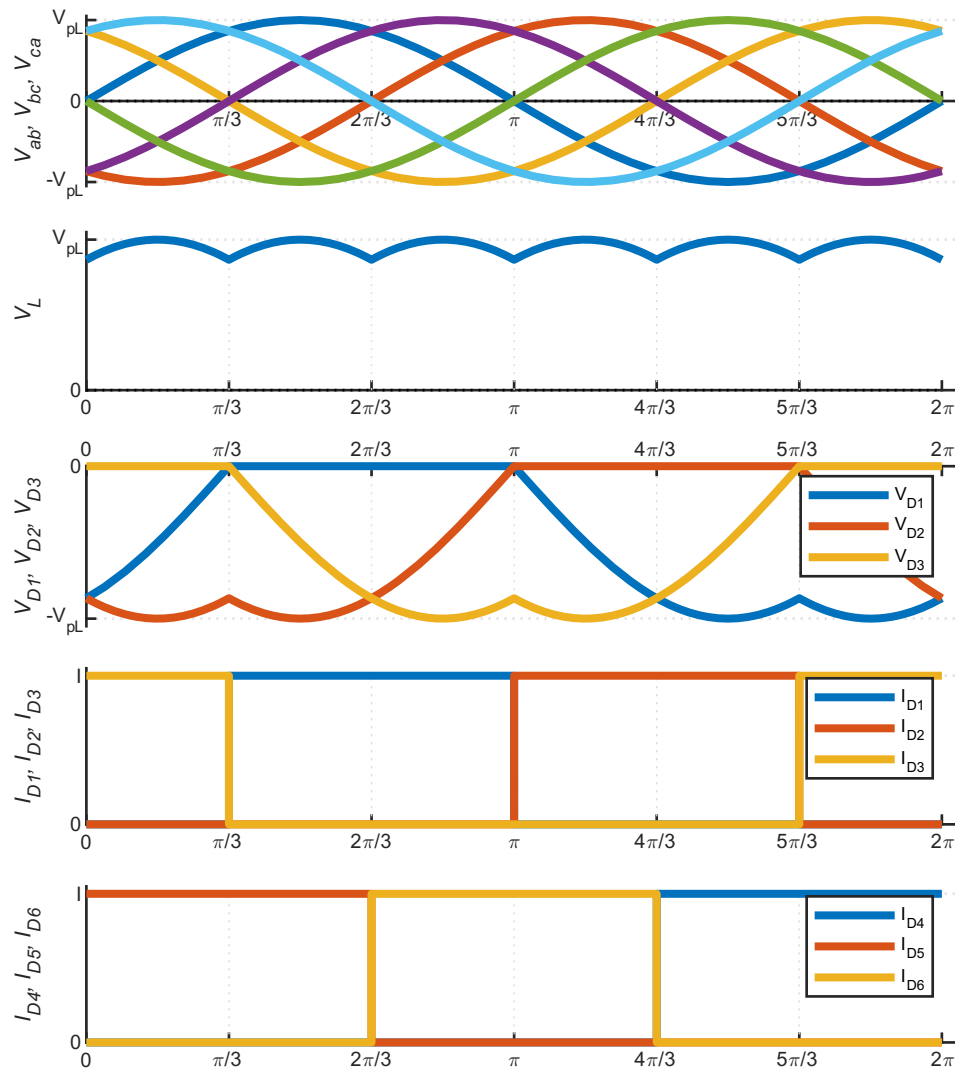
```
1 syms V_pL wt R
2 I_LMed = 6/(2*sym('pi'))*int(I,wt,sym('pi')/3,2*sym('pi')/3)
```

$$I_{L\ Med} = I \quad (5.36)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\ RMS} = \sqrt{\frac{6}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (\sqrt{3}V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (5.37)$$

Figura 5.16. Principais formas de onda.



```

1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(6/(2*sym('pi'))*int((V_pL*sin(wt))^2,wt,sym('pi')/3,2*sym('pi')/3))

```

$$V_{LRMS} = \frac{\sqrt{0.2500 V_{pL}^2 (2\pi + 3 \sin(0.6667\pi) - 3 \sin(1.3333\pi))}}{\pi^{0.5000}}$$

Como

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

```

1 V_LRMS = subs(V_LRMS, {sin(2*sym('pi')/3), sin(4*sym('pi')/3)}, {sqrt(3)/2, -sqrt(3)/2})

```

$$V_{LRMS} = \frac{\sqrt{0.2500 V_{pL}^2 (2\pi + 5.1962)}}{\pi^{0.5}}$$

Que corresponde a

$$V_{LRMS} = V_{pL} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}} \quad (5.38)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

```
1 syms V_p wt R, assume([I, sym('pi')], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(6/(2*sym('pi'))*int(I^2,wt,sym('pi')/3,2*sym('pi')/3))
```

$$I_{LRMS} = I \quad (5.39)$$

A tensão máxima sobre os diodos  $D_1$ - $D_6$  corresponde à soma fasorial de duas fontes de alimentação.

$$V_{DMax} = \sqrt{3}V_p$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{DMax} = 1.7321 V_p \quad (5.40)$$

E sobre o diodo de roda livre

$$V_{DRLMax} = V_{pL}$$

```
1 V_DRLMax = V_pL
```

$$V_{DRLMax} = V_{pL}$$

E a corrente máxima,

$$I_{DMax} = I_{DRLMax} = I$$

```
1 I_DMax = I
```

$$I_{DMax} = I \quad (5.41)$$

### 5.5.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 5.35, 5.36, 5.38, 5.39, 5.40 e 5.41.

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 V_pL = sqrt(3)*sqrt(2)*220;
3 I = 10;
4
5 V_LMed = 3*V_pL/pi

```

$$V_{L\ Med} = 514.5999$$

```

1 I_LMed = I

```

$$I_{L\ Med} = 10$$

```

1 V_LRMS = V_pL*sqrt(1/2+3*sqrt(3)/(4*pi))

```

$$V_{L\ RMS} = 515.0528$$

```

1 I_LRMS = I

```

$$I_{L\ RMS} = 10$$

```

1 V_DMax = sqrt(3)*V_p

```

$$V_{D\ Max} = 538.8877$$

```

1 I_DMax = I

```

$$I_{D\ Max} = 10$$

## 5.6 Conclusão

Esta topologia aproveita de maneira mais eficaz as fontes de alimentação trifásicas. As tensões e correntes através da carga têm suas frequências multiplicadas por seis. A corrente da carga nunca se anula, de modo que a topologia sempre opera no modo de condução contínua. De fato, a mesma é aproximadamente contante para até mesmo pequenas indutâncias. Idealmente o diodo de roda livre não deverá entrar em condução.

# Anexo 1: Demonstração

A equação pode ser simplificado, conforme demonstrado a seguir.

$$i_{L,E1,MCC} = - \frac{e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \left( e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \left( V_p \sin(\phi - wt) - V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \right) + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Multiplica-se o numerador pelo termo  $e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}$ .

$$i_{L,E1,MCC} = - \frac{\left( V_p \sin(\phi - wt) - V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \right) + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Coloca-se  $V_p/Z$  em evidência.

$$i_{L,E1,MCC} = - \frac{V_p}{Z} \frac{\left( \sin(\phi - wt) - \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \right) + e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{1 - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Coloca-se  $\sin(\phi - wt)$  em evidência.

$$i_{L,E1,MCC} = - \frac{V_p}{Z} \frac{\sin(\phi - wt) \left( 1 - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \right) + e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{1 - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Separa-se a fração da direita em dois termos.

$$i_{L,E1,MCC} = - \frac{V_p}{Z} \left[ \sin(\phi - wt) + \frac{e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{1 - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}} \right]$$

Agrupam-se os termos exponenciais no numerador

$$i_{L,E1,MCC} = - \frac{V_p}{Z} \left[ \sin(\phi - wt) + \frac{\sin(\phi) e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1} \right]$$

Redefinindo  $i_{L,E1,MCC}$

|   |                                                                                                                              |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $i_{L,E1,MCC} = -V_p/Z * (\sin(\phi - wt) + \sin(\phi) * \exp(-wt/(\omega\tau))) / (\exp((-sym('pi')))/( \omega\tau)) - 1))$ |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

# ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETIFICADORAS À DIODO

 [www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

 [contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

 [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)

 [www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br)

# ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETIFICADORAS À DIODO

 [www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

 [contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

 [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)

 [www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br)