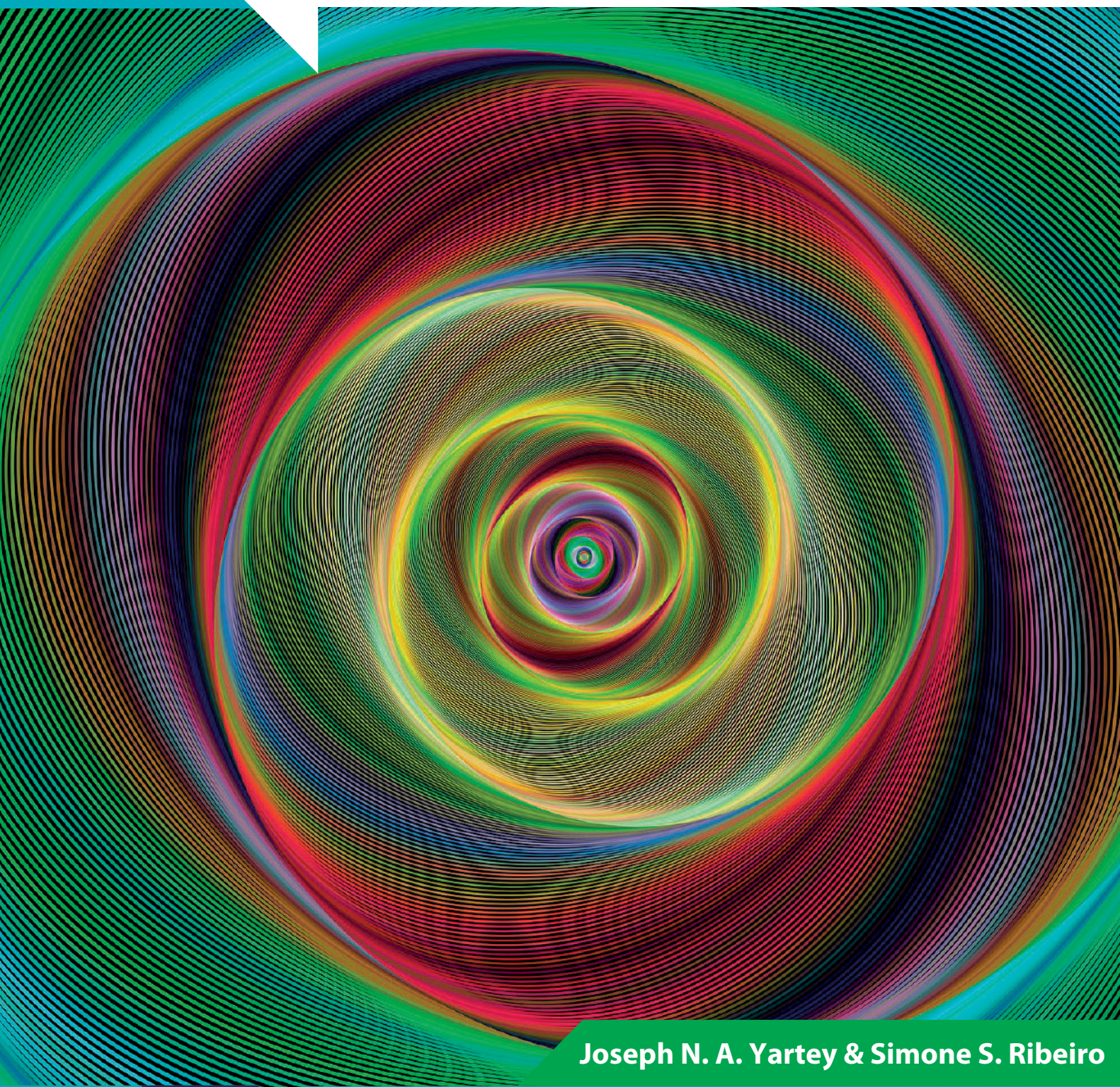
Instituto de Matemática
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA



Joseph N. A. Yartey & Simone S. Ribeiro

MATB97

Equações diferenciais

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Joseph N. A. Yartey & Simone S. Ribeiro

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
Reitor: João Carlos Salles Pires da Silva
Vice-Reitor: Paulo César Miguez de Oliveira

Pró-Reitoria de Ensino de Graduação
Pró-Reitor: Penildon Silva Filho

Instituto de Matemática
Diretor: Evandro Ferreira dos Santos

Superintendência de Educação a Distância -SEAD
Superintendente: Márcia Tereza Rebouças Rangel

Coordenação de Tecnologias Educacionais CTE-SEAD
Haenz Gutierrez Quintana
Coordenação Administrativa CAD-SEAD
Sofia Souza
Coordenação de Design Educacional CDE-SEAD
Lanara Souza

UAB -UFBA

Licenciatura em Matemática
Coordenador:
Prof. Marco Antonio N. Fernandes

Produção de Material Didático
Coordenação de Tecnologias Educacionais CTE-SEAD

Núcleo de Estudos de Linguagens & Tecnologias - NELT/UFBA

Coordenação
Prof. Haenz Gutierrez Quintana

Projeto gráfico
Prof. Haenz Gutierrez Quintana
Capa: Prof. Alessandro Faria
Foto de capa: Pixabay

Equipe de Revisão:
Edivalda Araujo
Julio Neves Pereira
Márcio Matos

Equipe de Design
Supervisão: Prof. Alessandro Faria

Editoração
Joseph Nee Anyah Yartey

Design de Interfaces
Raissa Bomtempo

Equipe Audiovisual
Direção:
Prof. Haenz Gutierrez Quintana

Câmera / Iluminação
Maria Christina Souza
Edição:
Flávia Ferreira Braga

Imagens de cobertura:
Maria Christina Souza

Animação e videografismos:
Arthur Farrot

Trilha Sonora:
Pedro Queiroz Barreto

Esta obra está sob licença Creative Commons CC BY-NC-SA 4.0: esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do seu trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária Reitor Macedo Costa
SIBI - UFBA

Y29 Yartey, Joseph Nee Anyah.

Equações diferenciais / Joseph N. A. Yartey e Simone S. Ribeiro - Salvador: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Educação a Distância, 2017.
174 p. : il.

ISBN: 978-8292-143-2
1. Equações diferenciais. 2. Equações diferenciais ordinárias. I. Ribeiro, Simone S. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática e Estatística. III. Universidade Federal da Bahia. Superintendência de Educação a Distância. IV. Título.

CDU 517.9

Sumário

APRESENTAÇÃO **6**

1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM **7**

Aula 1.1 Introdução às Equações Diferenciais e algumas aplicações **8**

1.1.1 Classificação 10

1.1.2 Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias 12

1.1.3 Uma família a $n-$ parâmetros de soluções 15

1.1.4 Determinando EDO associada a uma família a n-parâmetros de curvas 16

1.1.5 Solução da EDO do tipo $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f(x)$ 17

1.1.6 Problema de Valor Inicial da EDO de ordem n 18

1.1.7 Exercícios 19

Aula 1.2 Equação Diferencial de Primeira Ordem **23**

1.2.1 Interpretação geometrica da EDO de 1ª ordem 23

1.2.2 Problema de Valor Inicial da EDO de 1ª ordem 24

1.2.3 Exercícios 26

Aula 1.3 Equações Separáveis **28**

1.3.1 Equações da forma $y' = G(ax + by + c)$ 30

1.3.2 Exercícios 31

Aula 1.4 Equações Homogêneas **34**

1.4.1 Translação para Equações Homogêneas 36

1.4.2 Exercícios 38

Aula 1.5 Equações Exatas e Fatores Integrantes **39**

1.5.1 Determinando se uma equação é exata 41

1.5.2 Determinando a solução geral 42

1.5.3 Fator integrante: transformando uma equação diferencial em exata 44
1.5.4 Exercícios 53
Aula 1.6 Equações Lineares de primeira ordem 56
1.6.1 Método de solução 56
1.6.2 Exercícios 61
Aula 1.7 Aplicações das Equações Diferenciais de primeira ordem 65
1.7.1 Problemas de variação de temperatura 65
1.7.1.1 Exercícios 66
1.7.2 Problemas de mistura de líquidos 66
1.7.2.1 Exercícios 70
1.7.3 Modelagem de população 71
1.7.4 Problemas de crescimento e decaimento 72

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM SUPERIORES E A TRANSFORMADA DE LAPLACE 75
Aula 2.1 Equações Diferenciais de segunda ordem 76
2.1.1 Exercícios 79
Aula 2.2 Equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem - Solução geral 80
2.2.1 Princípio da Superposição 81
2.2.2 Wronskiano e Independência Linear 85
2.2.3 Exercícios 88
Aula 2.3 O Método de Redução de Ordem 91
2.3.1 Método 1: Usando a Fórmula de Abel 91
2.3.2 Método 2: D'Alembert 93
2.3.3 Exercícios 94
Aula 2.4 Equações diferenciais lineares homogêneas de coeficientes constantes de segunda ordem 95
2.4.1 Determinando o valor de λ 95
2.4.1.1 Caso 1: raízes reais e distintas 96
2.4.1.2 Caso 2: raízes complexas conjugadas 97
2.4.1.3 Caso 3: raízes reais e iguais 98

2.4.2 Equação de Euler-Cauchy de segunda ordem 99
2.4.3 Exercícios 100
Aula 2.5 Equações diferenciais lineares não-homogêneas de segunda ordem 105
2.5.1 Soluções particulares 107
2.5.1.1 Método de Variação de parâmetros 107
2.5.1.2 Método de Coeficientes a determinar 112
2.5.1.3 Exercícios 131
Aula 2.6 Equações diferenciais lineares de ordem superiores 133
2.6.1 Equações Diferenciais Lineares Homogêneas de ordem *n* com coeficientes constantes 136
2.6.2 Equações Diferenciais Lineares Não-Homogêneas de ordem *n* com coeficientes constantes - Método dos Coeficientes a determinar 142
2.6.3 Exercícios 145
Aula 2.7 Transformada de Laplace 148
2.7.1 Definição e Exemplos 148
2.7.2 Transformada Inversa de Laplace 152
2.7.3 Propriedade da Transformada de Laplace e Sua Inversa - Primero Teorema da Translação 155
2.7.4 Transformada de Laplace da Função degrau unitário 158
2.7.5 Propriedade da Transformada de Laplace e Sua Inversa - Segundo Teorema da Translação 160
2.7.6 Derivada da Transformada de Laplace 164
2.7.7 Resolução de Equações diferenciais pela Transformada de Laplace 165
2.7.7.1 Transformada de Laplace para Derivadas de uma função 165
2.7.7.2 Resolução de equações diferenciais ordinárias de coeficientes constantes 166
2.7.8 Tabela da Transformada de Laplace de Algumas Funções e suas propriedades 170
2.7.9 Exercícios 171
Bibliografia **173**

CARTA DE APRESENTAÇÃO

Caro (a)s aluno (a)s,
Sejam bem vindos a disciplina MATB97 - Equações Diferencias Ordinárias. Durante esse semestre, vocês terão oportunidade de estudar equações diferenciais e seus métodos de determinação de suas soluções. Esta discilina vai proporcionar uma experiência inicial com a teoria de equações diferenciais ordinárias e modelagem matemática.

É bem conhecido que muitos fenômenos que interessam às Engenharias e outras ciências podem ser estudadas através de modelos matemáticos nos quais aparecem de modo importante equações diferenciais ordinárias.

Bom aprendizado e sucesso!!

UNIDADE 1

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Aula 1.1

Introdução às Equações Diferenciais e algumas aplicações

Por que as equações diferenciais são importantes? Onde elas aparecem ? Quando desejamos estudar Leis físicas que descrevem a natureza, usamos modelos matemáticos como aproximação. Muitos destes modelos são relações que envolvem a taxa de variação de uma determinada grandeza física. Como foi visto no curso de Cálculo, a taxa de variação é uma derivada e as relações entre elas são equações. Sendo assim, estes fenômenos físicos são descritos por equações que envolvem derivadas que chamamos de equações diferenciais.

A grosso modo, o que é uma equação diferencial? Sabemos que uma equação algébrica é uma equação que tem números como incógnitas. Numa equação diferencial, a variável incógnita é uma função $y(x)$ e x é a sua variável independente.

Definição 1.1.1. *Uma equação que estabelece uma relação entre a variável independente x, a função incógnita $y = f(x)$ e suas derivadas $y', y'', \ldots y^{(n)}$ se chama de equação diferencial. Pode ser escrita na forma*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Exemplo 1.1.1.

1. $y' = \cos x$,
2. $y'' + 4x = 0$,

3. $x^2y''' + 2e^xy'' = (x^2 + 2)y^2$.

A seguir, veremos alguns problemas que podem ser estudados usando as equações diferenciais.

Modelo populacional

Em um modelo populacional, dizemos que uma população cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho. Este modelo é razoável para população de bactérias, por exemplo. Que equação matemática representa este modelo? As variáveis do problema são:

- t é a variável independente e representa o tempo,
- P é a incógnita e representa o número de indivíduos da população.

Assim, o modelo populacional pode ser escrito da seguinte forma:

- A taxa de crescimento populacional: $\frac{dP}{dt}$.
- Se a taxa de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população, então

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

onde k é a constante de proporcionalidade.

Esta equação é uma equação diferencial que envolve a função incógnita $P(t)$ e sua derivada. Note que $P(t) = Ce^{kt}$ é uma função que satisfaz

$$\frac{dP}{dt} = k(Ce^{kt}) = kP.$$

Sendo assim, esta função é uma solução da equação diferencial. Veremos estes conceitos com mais detalhes a seguir.

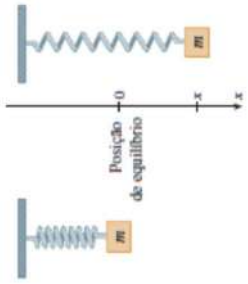
O que significa a constante C ? Note que, quando $t = 0$,

$$P(0) = C.$$

Podemos dizer então que C é a população inicial ou "condição inicial" do problema.

Lei de Hooke: um modelo para o movimento da mola

Consideremos o movimento de um objeto com massa m na extremidade de uma mola vertical como mostrado na figura ab



A Lei de Hooke diz que se a mola for esticada (ou comprimida) x unidades a partir da sua posição de repouso, então a mola exerce uma força sobre o corpo que é proporcional ao deslocamento x:

$$\text{força elástica} = -kx,$$

onde k é a constante positiva da mola e $x = x(t)$.

Ignorando qualquer resistência do ar ou do atrito e sabendo que $F = ma$, podemos formular a equação da lei de Hooke:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

1.1.1 Classificação

As equações diferenciais podem ser classificadas levando-se em conta as seguintes características:

1. O número de variáveis independentes da função incógnita;
2. O número de funções incógnitas;
3. A estrutura da equação e
4. A ordem da equação.

Definição 1.1.2. *Quanto ao número de variáveis independentes, as equações diferenciais podem ser* ***ordinárias*** *ou* ***parciais****. Uma equação diferencial é ordinária (EDO) se a função incógnita for uma função de apenas uma variável. Neste caso, as derivadas que aparecem na equação diferencial são apenas derivadas ordinárias, simples. Caso contrário, as derivadas serão derivadas parciais e aí teremos uma equação diferencial parcial (EDP).*

Exemplo 1.1.2.

1. $R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t)$, *(modelo de circuito RC) é uma equação diferencial ordinária. Função incógnita* $Q = Q(t)$.
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. *(Equação de Laplace) é uma equação diferencial parcial. Função incógnita* $u = u(x, y)$.
3. $u_t + uu_x = 0$ *é uma equação diferencial parcial. Função incógnita* $u = u(x, t)$.

Quanto ao número de incógnitas, teremos a seguinte classificação:

Definição 1.1.3. *Se o problema envolver apenas uma função incógnita, então teremos uma única equação diferencial, podendo esta ser ordinária ou parcial. Se, por outro lado, o problema envolver mais de uma função incógnita, então teremos um sistema de equações diferenciais.*

Exemplo 1.1.3. *Os exemplos dados em 1.1.2 são equações diferenciais com apenas uma função incógnita:* $1 - Q(t)$, $2 - u(x, y)$ e $3 - u(x, t)$. *O seguinte exemplo é um sistema que envolve as duas funções incógnitas* $x(t)$ *e* $y(t)$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t). \end{cases}$$

Definição 1.1.4. *A* ***ordem*** *de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação.*

Exemplo 1.1.4.

1. $y' = \cos x \quad \Rightarrow \quad$ *primeira ordem.*
2. $y'' + 4x = 0, \quad \Rightarrow \quad$ *segunda ordem.*
3. $x^2y''' + 2e^x y'' = (x^2 + 2)y^6 \quad \Rightarrow \quad$ *terceira ordem.*

Definição 1.1.5. *Quanto à* ***estrutura*** *de uma equação diferencial, ela pode ser classificada em* ***linear*** *ou* ***não linear****. Ela é linear quando a incógnita e suas derivadas aparecem de forma linear na equação. Por exemplo, uma equação diferencial linear de ordem n pode ser escrita na forma:*

$$a_0(t)y + a_1(t)y' + a_2(t)y'' \cdots + a_n(t)y^{(n)} = f(t).$$

Caso contrário, ela é dita não linear. Um exemplo é a equação não viscosa de Burgers: $u_t + uu_x = 0$*, onde o termo* uu_x *é um termo não linear.*

1.1.2 Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias

Considere a EDO de ordem n

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

.

Definição 1.1.6. *Seja* $\phi(x)$ *uma função real definida no intervalo I, derivável até ordem n para todo* $x \in I$*. Diz-se que* $\phi(x)$ *é uma* **solução explicita** *ou simplesmente uma solução da equação diferencial* (1) *no intervalo I, se*

1. $F\Big(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)\Big)$ *é definida para todo* $x \in I$ *e*
2. $F\Big(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)\Big) = 0$ *para todo* $x \in I$*.*

Exemplo 1.1.5. *Verifique que* $\phi(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{c}{x}$*, sendo c qualquer constante real, é uma solução da equação diferencial* $xy' + y = x^2$ *para todo o* $x \in \mathbb{R}$*.*

Solução: A EDO pode ser escrita na forma

$$F(x, y, y') = xy' + y - x^2 = 0$$

. Se $\phi(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$, então a sua derivada é $\phi'(x) = \frac{2x}{3} - \frac{c}{x^2}$. Substituindo na equação, temos que:

$$\begin{aligned} F(x, \phi(x), \phi'(x)) &= x\left(\frac{2x}{3} - \frac{c}{x^2}\right) + \left(\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}\right) - x^2 \\ &= \frac{2x^2}{3} - \frac{c}{\cancel{x}} + \frac{x^2}{3} + \frac{c}{\cancel{x}} - x^2 \\ &= x^2 - x^2 = 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que a função $\phi(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$ satisfaz a equação diferencial $xy' + y = x^2$, sendo assim uma solução da mesma.

Uma solução também pode aparecer na forma implícita, isto é, como uma função da forma $H(x, y) = 0$.

Definição 1.1.7. *A relação $H(x, y) = 0$ é chamado uma solução ímplicita da EDO (1) se esta relação dá origem a pelo menos uma função de valores reais $\phi(x)$ definida no intervalo I, tal que $\phi(x)$ é uma solução explicita de* (1) *em I.*

Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1.6. *Mostre que a relação $x^2 + y^2 - c = 0$, sendo $c > 1$ constante, é uma solução na forma implícita da equação diferencial $F(x, y, y') = yy' + x = 0$ no intervalo* $(-1, 1)$.

Solução: A relação $x^2 + y^2 - c = 0$ produza as funções

$$h(x) = y = \sqrt{c - x^2} \quad \text{e} \quad k(x) = y = -\sqrt{c - x^2}$$

ambas definidas em $(-1, 1)$.
Como $h'(x) = \frac{-x}{\sqrt{c - x^2}}$, então

$$F(x, h(x), h'(x)) = \left(\sqrt{c - x^2}\right)\left(\frac{-x}{\sqrt{c - x^2}}\right) + x = 0 \quad \text{e é definida em } (-1, 1).$$

Isto mostra que a função $x^2 + y^2 - c = 0,\ c > 1$, satisfaz a equação diferencial $yy' = -x$, sendo assim uma solução da mesma.

Exemplo 1.1.7. *A relação $x^2 + y^2 + 1 = 0$* **NÂO** *é uma solução na forma implícita da equação diferencial $F(x, y, y') = yy' + x = 0$ no intervalo $(-1, 1)$.*

Solução: A relação não produza uma função de valores reais no intervalo, resolvendo por y temos $p(x) = y = \sqrt{-4 - x^2}$ e este função não é definida pois $-4 - x^2 < 0$.
Entretanto quando derivamos a relação implicitamente, temos que $2x + 2yy' = 0$ ou $x + yy' = 0$, que é a equação diferencial que queremos resolver.

Observação. *Vimos nos Exemplos 1.1.5 e 1.1.6 que uma equação diferencial PODE ter infinitas soluções. Se uma solução envolve uma constante real arbitrária c, como descrita nos Exemplos 1.1.5 e 1.1.6, então ela é chamada de* ***solução geral*** *de uma equação diferencial. Se escolhermos uma constante específica c, encontramos uma* ***solução particular*** *do problema.*

Exemplo 1.1.8. *Mostre que $y = 2cx^2 + c^2$, sendo c uma constante, é uma solução geral de*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 8x^3\frac{dy}{dx} = 16x^2y$$

e ache uma solução particular que satisfaça a condição $y = -1$ quando $x = 1$.

Solução: Se $y = 2cx^2 + c^2$, então $\dfrac{dy}{dx} = 4cx$. Portanto

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 8x^3\frac{dy}{dx} &= (4cx)^2 + 8x^3(4cx)\\ &= 16c^2x^2 + 32cx^4\\ &= 16x^2\underbrace{(2cx^2 + c^2)}_{y} = 16x^2y.\end{aligned}$$

Portanto $y = 2cx^2 + c^2$ é uma solução da equação diferencial.
Se $y = -1$ quando $x = 1$, temos

$$-1 = 2c + c^2 \ \Rightarrow c^2 + 2c + 1 = 0 \Rightarrow (c + 1)^2 = 0 \Rightarrow c = -1.$$

Portanto a solução particular é $y = 1 - 2x^2$.

1.1.3 Uma família a $n-$ parâmetros de soluções

A solução geral da EDO de ordem n

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

é uma função que possui n constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$, que chamamos de **parâmetros.** Portanto a solução geral da EDO de ordem n é uma família a n**-parâmetros** de soluções (na forma explicita ou implícita) que contém todas as soluções possíveis num intervalo I.

Exemplo 1.1.9. *Do Exemplo 1.1.5 temos que* $y = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$ *é uma família a 1-parâmetro de soluções de* $xy' + y = x^2$.

Exemplo 1.1.10. *Mostre que* $y = c_1e^x + c_2e^{-2x}$ *é uma família a 2-parâmetros de soluções de*

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 0$$

e ache a solução particular que satisfaça a condição $y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$ *quando* $x = 0$.

Solução: Se $y = c_1e^x + c_2e^{-2x}$, então $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c_1e^x - 2c_2e^{-2x}$ e $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = c_1e^x + 4c_2e^{-2x}$. Portanto

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y &= (c_1e^x + 4c_2e^{-2x}) + (c_1e^x - 2c_2e^{-2x}) - 2(c_1e^x + c_2e^{-2x}) \\ &= c_1e^x + 4c_2e^{-2x} + c_1e^x - 2c_2e^{-2x} - 2c_1e^x - 2c_2e^{-2x} \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto $y = c_1e^x + c_2e^{-2x}$ é uma família a 2-parâmetros de soluções da equação diferencial.

Se $y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$ quando $x = 0$, temos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 & (1) \\ c_1 - 2c_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Resolvendo temos $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$. Portanto a solução particular é $y = e^x$.

1.1.4 Determinando EDO associada a uma família a n-parâmetros de curvas

Seja uma família de curvas a $n-$parâmetro. Podemos considerar a família como a solução geral de uma equação diferencial de ordem n. Vamos tentar encontrar a equação diferencial correspondente. A equação diferencial da família, não deve ter parâmetros (constantes arbitrárias) e sua ordem deve ser igual ao número dos parâmetros da família. A estratégia geral para encontrar a equação diferencial de uma dada família a $n-$parâmetros é derivando n vezes a equação. Isto produziria um sistema de $n+1$ equações que podem ser usadas para eliminar os parâmetros.

Exemplo 1.1.11. *Dado a curva $y^2 = cx^3 + 3$ a 1-parâmetro, determine a equação diferencial da família.*

Solução: Temos que:

$$y^2 = cx^3 + 3 \quad (1).$$

Uma vez que temos uma família a 1-parâmetro, estamos procurando uma equação de primeira ordem. Derivando a equação temos

$$2yy' = 3cx^2 \quad (2).$$

Encontrando o valor de c em (2), temos:

$$c = \frac{2yy'}{3x^2} \quad .(3)$$

Substituindo (3) em (1), temos:

$$\begin{aligned} y^2 &= \left(\frac{2yy'}{3x^2}\right)x^3 + 3 = \frac{2xyy'}{3} + 3 \\ \Rightarrow y' &= \frac{3y^2 - 9}{2xy}. \end{aligned}$$

que é a equação diferencial da família.

Exemplo 1.1.12. *Determine a equação diferencial da família de curvas a 2-parâmetros $y = \frac{c_1}{x} + c_2$.*

Solução: Temos que:

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 \qquad .(1)$$

Uma vez que temos uma família a 2-parâmetros, estamos procurando uma equação de segunda ordem. Derivando a equação 2 vezes e encontrando o valor de c_1, temos:

$$y' = -\frac{c_1}{x^2} \Longrightarrow c_1 = -x^2 y' \qquad (2)$$

$$y'' = \frac{2c_1}{x^3} \Longrightarrow c_1 = \frac{x^3 y''}{2} \qquad .(3)$$

Igualando (2) e (3), temos:

$$-x^2 y' = \frac{x^3 y''}{2}.$$

Simplificando, obtemos $y'' + 2x^2 y' = 0$, que é a equação diferencial da família.

1.1.5 Solução da EDO do tipo $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f(x)$

Lema 1.1.1. *Se uma EDO de ordem n é da forma*

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f(x),$$

então sua solução geral é obtida de uma maneira direta por integrações (sucessivas).

Exemplo 1.1.13. *Ache a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x + 2x.$$

Solução: Seja

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x + 2x.$$

Integrando, temos:

$$\begin{aligned} y &= \int (\cos x + 2x)\, \mathrm{d}x \\ \Rightarrow \quad y &= \operatorname{sen} x + x^2 + c. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.14. *Ache a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 20x^3 - \frac{1}{x^2}.$$

Solução: Seja

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 20x^3 - \frac{1}{x^2}.$$

Integrando, temos:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \int (20x^3 - x^{-2})\,\mathrm{d}x = 5x^4 + x^{-1} + c_1.$$

Integrando novamente, temos:

$$y = \int (5x^4 + x^{-1} + c_1)\,\mathrm{d}x = x^5 + \ln x + c_1x + c_2.$$

Portanto, a solução geral é $y = x^5 + \ln x + c_1x + c_2$.

1.1.6 Problema de Valor Inicial da EDO de ordem n

Definição 1.1.8. *Um **problema de Valor Inicial (PVI)** de uma equação diferencial de ordem n é*

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}) \qquad (*)$$

com as condições iniciais

$$(**)\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

onde $x_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{(n-1)}$ são valores dados. A solução geral de $(*)$ é uma família a $n-$parâmetros. As condições iniciais $(**)$ são usadas para determinar os valores das constantes da solução geral e assim, achamos uma solução particular.

Exemplo 1.1.15. *Resolva o PVI*

$$\begin{cases} y''' - e^x + \cos x = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \\ y''(0) = 3. \end{cases}$$

Solução: Seja

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = e^x - \cos x.$$

Integrando, temos:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \int (e^x - \cos x)\,\mathrm{d}x = e^x - \operatorname{sen} x + c_1.$$

Integrando novamente, temos:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \int (e^x - \operatorname{sen} x + c_1)\,\mathrm{d}x = e^x + \cos x + c_1 x + c_2.$$

Integrando novamente, temos:

$$y = \int (e^x + \cos x + c_1 x + c_2)\,\mathrm{d}x = e^x + \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$

Portanto a solução geral é $y = e^x + \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3$.
Se $y = 2$, $y' = 3$ e $y'' = 3$ quando $x = 0$, temos

$$\begin{cases} 1 + c_3 = 2 & \Rightarrow \quad c_3 = 1 \\ 1 + 1 + c_2 = 3 & \Rightarrow \quad c_2 = 1 \\ 1 + +c_1 = 3 & \Rightarrow \quad c_1 = 2. \end{cases}$$

Portanto, a solução particular é $y = e^x + \operatorname{sen} x + 1 + x + x^2$.

1.1.7 Exercícios

1. **Equações diferenciais ordinárias e parciais:** Se a função incógnita da equação diferencial depende de apenas uma variável, então temos um exemplo de equação diferencial ordinária. Caso contrário, teremos uma equação diferencial parcial. Verifique se a equação diferencial a seguir é ordinária ou parcial e se a função dada é uma solução da equação:

(a) $u_{xx} + u_{yy} = 0$; $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

(b) $y'' - y = 0$; $y(t) = e^t$.

(c) $y'' - y = 0$; $y(t) = \cosh t$.

(d) $u_{xx} + u_{yy} = 0$; $u(x, y) = \cos x \cosh y$.

(e) $ty' - y = t^2$; $y = 3t + t^2$

(f) $\alpha^2 u_{xx} = u_t$; $u = (\pi/t)^{1/2} e^{-x^2/4\alpha^2 t}$.

(g) $y' - 2ty = 1$; $y = e^{t^2} \displaystyle\int_0^t e^{-s^2} ds + e^{t^2}$.

2. Determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem solução da forma $y = e^{rt}$.

(a) $y' + 2y = 0$. Resp: $r = -2$.

(b) $y'' + y' - 6y = 0$. Resp: $r = 2, -3$.

(c) $y'' - y = 0$. Resp: $r = \pm 1$.

(d) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$. Resp: $r = 0, 1, 2$

3. Determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem solução da forma $y = t^r$, para $t > 0$.

(a) $t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0$. Resp: $r = -1, -2$.

(b) $t^2 y'' - 4ty' + 4y = 0$. Resp: $r = 1$ ou $r = 4$.

4. **Equações lineares e não lineares**. A equação diferencial ordinária

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

é linear se F é uma função linear nas variáveis $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Esta definição é equivalente à de uma transformação linear vista em Álgebra Linear. Uma definição similar se aplica às equações diferenciais parciais. Desta maneira, a forma geral de uma equação diferencial linear de ordem n é:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t).$$

Uma equação que não respeita a condição acima é não linear. Para cada uma das seguintes equações diferenciais abaixo, diga a sua ordem se é linear ou não linear. Explique.

(a) $t^2y'' + ty' + 2y =$ sen t. Resp: segunda ordem linear.

(b) $y^{IV} + y''' + y'' + y' + y = 1$. Resp: quarta ordem linear.

(c) $y'' +$ sen $(t + y) =$ sen t. Resp: segunda ordem não linear.

(d) $y' + ty^2 = 0$. Resp: primeira ordem não linear.

(e) $y''' + ty' + (\cos^2 t)y = t^3$. Resp: terceira ordem linear.

5. Mostre que $y = a \cos(mx + b)$ é uma solução da equação diferencial $y'' + m^2y = 0$.

6. Mostre que $v = B + \dfrac{A}{r}$ é uma solução da equação diferencial $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = 0$.

7. Mostre que $Ax^2+By^2 = 1$ é uma solução da equação diferencial $x\left[y\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right] - y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.

8. Determine a equação diferencial da seguintes famílias de curvas.

(a) $y = e^{mx}$, onde m é constante arbitrário.

(b) $y = Ae^{3x} + Be^{5x}$, onde A e B são constantes não iguais.

(c) $y = k$ arcsen$x$, onde k é um parâmetro

(d) $y = Ae^x + \dfrac{B}{e^x}$

(e) $y = e^x(A \cos x + B \text{ sen } x)$

(f) $y = Ae^{2x} + Be^{-3x} + Ce^x$

(g) $xy = Ae^x + Be^x + x^2$

(h) $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$

9. Determine a equação diferencial de todas as retas que passam pelo origem.

10. Determine a equação diferencial de todas as circunferências de raio R.

11. Determine a equação diferencial de todas as retas que dista 1 unidade da origem.

12. Resolva PVI

(a) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} - 9x = 12 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 6x^2 - 1 = 0 \\ y(1) = 5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2 - 6x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{d^4y}{dx} = -\operatorname{sen} x + \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = y''(0) = -1 \\ y'''(0) = 7 \end{cases}$

Aula 1.2

Equação Diferencial de Primeira Ordem

Definição 1.2.1 (Equação Diferencial de Primeira Ordem). *Uma equação diferencial de primeira ordem contém somente a primeira derivada $y' = \frac{dy}{dx}$, possivelmente y e alguma função de x, isto é, é uma equação do tipo*

$$F(x, y, y') = 0 \qquad ou \qquad y' = f(x, y). \tag{1.2.1}$$

Exemplo 1.2.1.

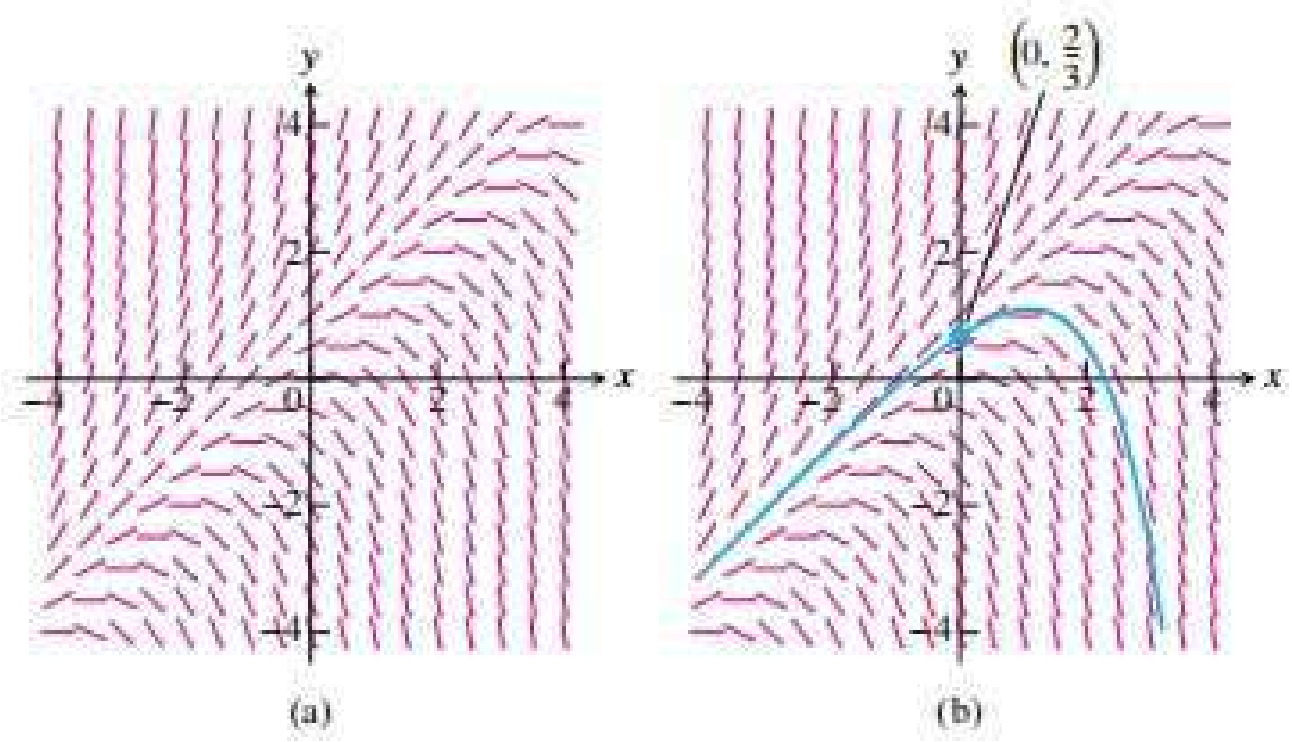
1. $y' = \cos x$,
2. $xy' + 4xy = 0$.

1.2.1 Interpretação geometrica da EDO de 1ª ordem

A EDO de 1ª ordem $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ associa a cada ponto (x_0, y_0) do domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ uma direção $m = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x_0, y_0)$. A direção em cada ponto (x_0, y_0) é a inclinação da reta tangente à curva, com equação $f(x, y) = c$, passando pelo ponto (x_0, y_0). O domínio D com a direção em cada ponto é chamado de um **campo de vetores**. Resolver a equação diferencial significa determinar curvas cujas retas tangentes no ponto (x_0, y_0) têm inclinação $m = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x_0, y_0)$.

Exemplo 1.2.2. *A EDO $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - x$ forma um campo de vetores em $\mathbb{R}^2$, como mostrado na figura (a) abaixo. Cada curva $y = x + 1 + ce^x$, onde c é um constante arbitrário, possui uma*

reta tangente no ponto (x, y) com inclinação $m = y - x$. A Figura (b) abaixo mostra uma solução particular passando pelo ponto $\left(0, \frac{2}{3}\right)$.



1.2.2 Problema de Valor Inicial da EDO de 1ª ordem

Definição 1.2.2. *Um **problema de Valor Inicial (PVI)** de uma equação diferencial de primeira ordem é dado por:*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

onde x_0, y_0 são valores dados. A solução $y = \phi(x)$ deste problema é uma solução da equação diferencial $y' = f(x, y)$ que também satisfaz a condição inicial $\phi(x_0) = y_0$. A condição inicial é normalmente usada para determinar o valor da constante c da solução geral.

Exemplo 1.2.3. *Podemos reescrever o Exemplo 1.2.2 como um problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - x \\ y(0) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

cuja solução é $y = x + 1 - \frac{1}{3}e^x$.

Queremos analisar as seguintes questões:

1. Sob que condições podemos garantir que existe uma solução do PVI (1.2.2)?

2. Sob que condições podemos garantir que a solução de (1.2.2) é única?

Teorema 1.2.1. *(Existência)*
Suponha que $f(x, y)$ *é continua num retângulo* $R = \{(x, y) : x_0 - h < x < x_0 + h,\ y_0 - k < y < y_0 + k\}$ *centrado em* (x_0, y_0). *Então existe um número* h_1 *(possivelmente menor que h) tal que uma solução* $y = \phi(x)$ *de* (1.2.2) *é definida no intervalo* $(x_0 - h_1, x_0 + h_1)$.

Demonstração. A demonstração desta será omitida, mas pode ser vista em [1].

Teorema 1.2.2. *(Unicidade)*
Suponha que $f(x, y)$ *e sua derivada parcial* $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ *sejam continuas num retângulo R como no Teorema 1.2.1. Então existe um número* h_2 *(possivelmente menor que* h_1 *) tal que uma solução* $y = \phi(x)$ *de* (1.2.2), *cuja existência é garantida pelo Teorema 1.2.1, é a única solução de* (1.2.2) *definida no intervalo* $(x_0 - h_2, x_0 + h_2)$.

Demonstração. A demonstração desta será omitida, mas pode ser vista em [1].

Exemplo 1.2.4. *Considere o PVI*

$$\begin{cases} (y+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Verifique que a existência e a unicidade de soluções estão garantidas.

Solução: Colocando a equação diferencial dada na forma exigida pelos Teoremas 1.2.1 e 1.2.2 temos:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) = \frac{\cos x}{y + 1}.$$

Note que a função f e a sua derivada $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-\cos x}{(y+1)^2}$ são continuas exceto quando $y = -1$. Então f e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são continuas num retângulo centrado em $(0, 2)$ que não corta a reta $y = -1$. O Teorema 1.2.2 garanta que existe uma solução $y = \phi(x)$ em algum intervalo centrado em $x = 0$ e que esta solução é única em algum intervalo (possivelmente menor) centrado em $x = 0$.
Provaremos mais adiante que a solução é $\phi(x) = -1 + \sqrt{9 + 2 \operatorname{sen} x}$.

Exemplo 1.2.5. *Considere o PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Verifique que a existência e a unicidade de soluções estão garantidas.

Solução: As funções $f(x, y) = -\dfrac{x}{y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{y^2}$ não são continuas em $(1, 0)$ (pois não são definidas em $(1, 0)$). Então os Teoremas 1.2.1 e 1.2.2 podem ser usados para estudar a existência e/ou unicidade de uma solução para o PVI.

Observação. *A relação $x^2 + y^2 = 1$ satisfaz o PVI* $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ *, mas não é uma solução no sentido do Teorema 1.2.1. Recorde que uma solução deve ser definida num intervalo que contém o coordenada x_0 do valor inicial mas , y é definida implicitamente em $x = 1$ mas não num intervalo em torno de $x = 1$. De fato o PVI possui 2 soluções $\phi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $\phi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.*

1.2.3 Exercícios

1. Seja a equação diferencial $x' = (x-1)\cos t$ e suponha que x é uma solução tal que $x(1) = 1$. Mostre que $x(t) = 1$ para todo t.

2. Determine uma região no plano xy na qual a equação diferencial dada tenha uma única solução cujo gráfico passe pelo ponto (x_0, y_0) nessa região.

   (a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{1/3}$

   (b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{xy}$

   (c) $(3y - y^2)\,\mathrm{d}y = (1 + x^2)\,\mathrm{d}x$

   (d) $(y - x)\,\mathrm{d}y = (y + x)\,\mathrm{d}x$

3. Considere o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Mostre que $y = 0$ e $y = \frac{1}{16}x^4$ são soluções. Será que isto contradiz o Teorema 1.2.2?

4. Verifique a unicidade ou não da solução do seguintes PVI

(a) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^4 - x^4 \\ y(0) = 7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3x - \sqrt[3]{y-1} \\ y(2) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = xy^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = xy^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Aula 1.3

Equações Separáveis

Definição 1.3.1. *Muitas equações diferenciais de primeira ordem podem ser escritas na forma*

$$g(y)y' = f(x), \tag{1.3.1}$$

mediante manipulações algébricas. Como $y' = \frac{dy}{dx}$, *é conveniente reescrever a equação na forma*

$$g(y)dy = f(x)dx. \tag{1.3.2}$$

Estas equações diferenciais são chamadas de ***equações separáveis*** *porque as variáveis* x *e* y *são separadas de modo que* y *apareça somente no lado esquerdo da esquação, enquanto* x*, apenas no lado direito da equação.*

Método de solução

Para resolver a equação (1.3.1), integramos ambos os lados com relação a x:

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx + c.$$

Do Cálculo, $\frac{dy}{dx}\,dx = dy$. Substituindo na expressão acima, chegamos ao método de solução:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c. \tag{1.3.3}$$

Supondo que f e g são funções contínuas, as integrais existem. Calculando as integrais de ambos os lados, chegamos à solução geral da equação.

Exemplo 1.3.1. *Ache a solução geral da equação diferencial* $9y\,y' + 4x = 0$.

Solução:

- Primeiramente, separamos as variáveis: $9y\,dy = -4x\,dx$.
- Integramos ambos os lados da equação acima em relação a x:

$$\int 9y\,dy = \int -4x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{9y^2}{2} = -\frac{4x^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 = c_1, \quad c_1 = c^2,$$

  isro é, a solução geral da equação diferencial é $4x^2 + 9y^2 = c_1$.

Exemplo 1.3.2. *Resolva a equação* $y' = 1 + y^2$.

Solução:

- Primeiramente, separamos as variáveis: $\dfrac{dy}{1+y^2} = dx$.
- Integramos ambos os lados da equação acima em relação a x:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \text{arctg}y = x + c \quad \Rightarrow \quad y = \text{ tg }(x+c)$$

  Assim, $y = \text{ tg }(x+c)$ é a solução geral da equação diferencial.

Exemplo 1.3.3 (Decaimento ou crescimento exponencial). *O decaimento ou crescimento exponencial é modelado pela equação diferencial* $y' = ky$. *Se a constante real* $k > 0$, *teremos crescimento e se* $k < 0$, *teremos decaimento. Resolva esta equação separável.*

Solução:

- Primeiramente, separamos as variáveis: $\dfrac{dy}{y} = kdx$.
- Integramos ambos os lados da equação acima em relação a x:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = kx + c_1 \quad \Rightarrow \quad y = e^{(kx+c_1)} = e^{c_1}e^{kx} = ce^{kx}$$

  E $y = e^{(kx+c_1)}$ é a solução geral.

Exemplo 1.3.4. *Resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x}, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Solução:

- Primeiramente, separamos as variáveis: $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$.
- Integramos ambos os lados da equação acima para encontrar a solução geral:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{1}{|x|} + c_1 \quad \Rightarrow \quad y = c/x,$$

  onde $c = e^{c_1}$.

- Substituímos a condição inicial (quando $x = 1$, $y = 1$) na solução geral:

$$1 = c/1 \quad \Rightarrow \quad c = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1/x$$

  é a solução do PVI dado.

1.3.1 Equações da forma $y' = G(ax + by + c)$

Se a equação diferencial é dada na forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = G(ax + by + c),$$

então podemos usar uma mudança de variáveis $u = ax+by+c$ para transformá-la numa equação de variáveis separáveis. Observe que

$$u = ax + by + c \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - a\right).$$

Substituindo os valores de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ e $ax + by + c$ encontrados acima na equação diferencial, obtemos:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - a\right) = G(u)$$

que se reduz a uma equação diferencial separável:

$$\frac{\mathrm{d}u}{a+bG(u)} = \mathrm{d}x.$$

Exemplo 1.3.5. *Resolva*

$$3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (2x+3y-1) + 4(2x+3y-1)^{-3} - 2.$$

Solução:

Seja $u = 2x+3y-1$ então $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 + 3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Substituindo na equação temos:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u + 4u^{-3} = \frac{u^4+4}{u^3}.$$

Separando as variáveis, temos:

$$\frac{u^3}{u^4+4}\mathrm{d}u = \mathrm{d}x.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int \frac{u^3}{u^4+4}\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\ln(u^4+4) = x + c \\ &\Rightarrow \quad u^4 + 4 = e^{4x+4c}.\end{aligned}$$

Logo a solução geral é $(2x+3y-1)^4 + 4 = e^{4x+4c}$.

1.3.2 Exercícios

1. Use o método de separação de variáveis para resolver cada uma das equações diferenciais abaixo:

   (a) $y' = \dfrac{1+y}{1+x}$.

   (b) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

   (c) $y' = (1+y)(1+x)$.

   (d) $y' - 2xy = x$.

   (e) $y' = x^2/y$. Resp: $3y^2 - 2x^3 = c$.

   (f) $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$. Resp: $y^{-1} + \cos x = c$ se $y \neq 0$ e também $y = 0$ para todo o x.

(g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^{y}}$. Resp: $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = c$; $y + e^y \neq 0$.

(h) $\dfrac{dy}{dx} = 3y - 2x + 6xy - 1$

(i) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y$

(j) $y' = e^{2x+y}$

(k) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{10 \ln x}{xy - xy^3}$

(l) $\dfrac{\mathrm{d}y}{dx} = xe^{x+2y}$

2. Ache a solução dos seguintes problemas de valor inicial.

(a) $y' = \dfrac{1+y}{1+x}$, $y(0) = 1$.

(b) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$.

(c) $y' = (1+y)(1+x)$, $y(0) = 1$.

(d) $y' - 2xy = x$, $y(0) = 1$.

(e) $y' = y^2(1-2x)$, $y(0) = -1/6$. Resp: $y = 1/(x^2 - x - 6)$.

(f) $y' = (1-2x)/y$, $y(1) = -2$. Resp: $y = -\sqrt{2x - 2x^2 + 4}$.

(g) $xdx + ye^{-x}dy = 0$, $y(0) = 1$. Resp: $y = [2(1-x)e^x - 1]^{1/2}$

(h) $dr/d\theta = r^2/\theta$, $r(1) = 2$. Resp: $r = 2/(1 - 2\ln\theta)$.

(i) $y' = \dfrac{2x}{y + x^2 y}$, $y(0) = -2$. Resp: $y = -[2\ln(1+x^2) + 4]^{1/2}$.

(j) $\begin{cases} 3e^x \text{ tg } ydx + (1 - e^x)\sec^2 ydy = 0 \\ y(\ln 2) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

(k) $\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = tu^3(1+t^2)^{-1/2} \\ u(0) = 1 \end{cases}$

(l) $\begin{cases} \dfrac{dv}{du} = \dfrac{e^{-2v}}{u^2 + 4} \\ v(0) = 2 \end{cases}$

3. Resolva o problema de valor inicial $y' = 2y^2 + xy^2$, $y(0) = 1$ e determine onde a solução atinge seu valor mínimo. *Sugestão:* Use o teste da primeira e da segunda derivadas para determinar o ponto de mínimo. Resp: $y = -1/((x^2/2) + 2x - 1)$; $x = -2$.

4. Resolva o problema de valor inicial $y' = 2\cos 2x/(3+2y)$, $y(0) = -1$ e determine onde a solução atinge seu valor máximo. Resp: $y = -\frac{3}{2} + \sqrt{\operatorname{sen} 2x + 1/4}$, $x = \pi/4$.

5. Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay+b}{cy+d},$$

onde a, b, c e d são constantes.
Resp: $y = \frac{c}{a}y + \frac{ad-bc}{a^2}\ln|ay+b| + k$, $a \neq 0$, $ay+b \neq 0$.

6. Resolva as seguintes equações diferenciais usando o método de separação de variáveis, após fazer uma mudança de variáveis apropriada:

   (a) $y' = (x+y)^2$. Resp: $y = -x + \operatorname{tg}(x+c)$.

   (b) $y' = (8x+2y+1)^2$. Resp: $8x + 2y + 1 = 2\operatorname{tg}(4x+c)$.

   (c) $(2x+3y-1)dx + (4x+6y-5)dy = 0$. Resp: $x + 2y + 3\ln|2x+3y-7| = c$.

   (d) $(2x-y)dx + (4x-2y+3)dy = 0$. Resp: $5x + 10y + c = 3\ln|10x-5y+6|$.

   (e) $y' = \dfrac{(2y-3x+7)^3+3}{2}$

   (f) $y' = -1 + \dfrac{e^{-(y+x+1)^2}}{2(y+x+1)}$

   (g) $y' = 2 - 3\sqrt{2x-y+7}$

7. Suponha que o valor y foi investido numa conta de poupança na qual os juros são continuamente capitalizados numa taxa constante de 5.5% ao ano. A equação $y' = ky$ descreve a taxa de crescimento do montante investido, onde k é a taxa de juros. Se \$5000 foram inicialmente investidos, qual é o montante após 3 anos? Resp: \$5896,96

8. Suponha que a cada mês uma população aumenta na razão k, isto é, no primeiro mês é p_0, no segundo mês kp_0, etc. Mostre que a população $p(t)$ satisfaz uma equação diferencial do tipo $p' = \lambda p$ e determine λ em função de k.

Aula 1.4

Equações Homogêneas

Definição 1.4.1. *Uma função F de duas variáveis é* **homogênea** *(de grau zero) se e somente se,*

$$F(tx, ty) = F(x, y) \tag{1.4.1}$$

para todos os $x, y, t \in \mathbb{R}$. Se F é homogênea, então $F(x, y)$ depende somente da razão y/x e portanto F pode ser considerada como uma função $g(u)$ onde $u = y/x$.

Exemplo 1.4.1.

(1) $F(x, y) = \dfrac{x + y}{x}$ *é homogênea pois*

$$F(tx, ty) = \frac{tx + ty}{tx} = \frac{t(x + y)}{tx} = \frac{x + y}{x} = F(x, y)$$

e $F(x, y) = 1 + \dfrac{y}{x} = 1 + u = g(u), \quad$ *onde* $u = y/x.$

(2) $F(x, y) = \dfrac{x^3 + xy^2}{y^3 + x^2 y}$ *é homogênea pois*

$$F(tx, ty) = \frac{t^3x^3 + t^3xy^2}{t^3y^3 + t^3x^2y} = \frac{t^3(x^3 + xy^2)}{t^3(y^3 + x^2y)} = \frac{x^3 + xy^2}{y^3 + x^2y} = F(x, y)$$

e $F(x, y) = \dfrac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)} = \dfrac{1 + u^2}{u^3 + u} = g(u), \quad$ *onde* $u = y/x.$

Definição 1.4.2. *Uma equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x, y)$$

onde a função F é homogênea, isto é $F(x, y) = g(u)$, onde $u = y/x$, será chamada de equação diferencial homogênea.

Método de solução

Equações homogêneas podem ser transformadas em equações separáveis mediante a mudança de variável natural $u = y/x$. Desta forma:

$$y = ux \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u.$$

Substituindo estes dados na equação diferencial, obtemos:

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = g(u) \quad \Rightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g(u) - u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

que pode ser resolvido pelo método das equações separáveis.

Exemplo 1.4.2. *Resolva a equação diferencial* $2xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - x^2$.

Solução:

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - x^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

A função $F(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{(y/x)}\right]$ é homogênea, logo fazemos a mudança de variável $u = y/x$ ou $y = ux$.

Aplicando a mudança de variável como sugerido acima, chegamos a

$$u'x + u = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad u'x = -\frac{1}{2}\frac{1}{u} - \frac{1}{2}u \quad \Rightarrow \quad u'x = -\frac{-u^2 - 1}{2u}.$$

Resolvendo pelo método das equações separáveis, obtemos:

$$\frac{2udu}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}.$$

Integrando ambos os lados, chegamos a:

$$\ln(u^2+1) = -\ln|x| + c_* = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + c_*.$$

Aplicando exponencial em ambos os membros,

$$u^2 + 1 = \frac{c}{x}, \quad \text{onde} \quad c = e^{c_*} \quad \Rightarrow \quad 1 + (y/x)^2 = \frac{c}{x}.$$

A solução pode ainda ser reescrita na forma:

$$x^2 + y^2 = cx \quad \text{ou} \quad \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}.$$

Esta solução representa uma família de círculos que passam pela origem e com centro $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$, sobre o eixo x.

1.4.1 Translação para Equações Homogêneas

Uma equação diferencial da forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

pode se tornar uma equação diferencial homogênea mediante uma translação (mudança de variáveis) conveniente:

Se os termos constantes c_1 e c_2 são ambos zero, então a equação acima já é homogênea. Isso fornece a idéia de que transladando x e y por uma determinada constante, a equação resultante terá os termos constantes c_1 e c_2 ambos iguais a zero. Para transformar esta equação em uma equação diferencial homogênea use as substituições:

$$\begin{cases} x = X + h \\ y = Y + k, \end{cases}$$

com h e k escolhidos de tal forma que as duas equações:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

se reduzem às equações

$$a_1X + b_1Y = 0, \quad a_2X + b_2Y = 0.$$

Portanto escolhemos h e k como soluções do sistema:

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.4.3. *Resolva* $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x + y + 3}{x - y - 5}$.

Solução: Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - y - 5 = 0, \end{cases}$$

temos $x = 1, \ y = -4$. Portanto vamos usar a mudança

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 4. \end{cases}$$

Logo $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}$ e a equação diferencial se reduz a

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{X + Y}{X - Y} = \frac{1 + \frac{Y}{X}}{1 - \frac{Y}{X}}.$$

Seja $U = \dfrac{Y}{X}$ ou $Y = UX$. Então $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = U + X\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X}$. Usando estas mudanças, temos

$$U + X\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} = \frac{1 + U}{1 - U}$$

$$\Rightarrow X\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} = \frac{1 + U - U(1 - U)}{1 - U} = \frac{1 + U^2}{1 + U}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - U}{1 + U^2}\,\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}X}{X}.$$

Integrando:

$$\operatorname{arctg}(U) - \frac{1}{2}\ln(1 + U^2) = \ln X + \ln c$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{arctg}(U) = \ln[cX^2(1 + U^2)]$$

$$\Rightarrow 2\,\text{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right) = \ln\left[cX^2\left(1+\frac{Y^2}{X^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 2\,\text{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right) = \ln\left[c\left(X^2+Y^2\right)\right]$$

$$\Rightarrow 2\,\text{arctg}\left(\frac{y+4}{x-1}\right) = \ln\left[c\left((x-1)^2+(y+4)^2\right)\right].$$

1.4.2 Exercícios

1. Resolva a equação diferencial dada.

   (a) $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$

   (b) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

   (c) $(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$

   (d) $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}$

   (e) $(x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - xy)\mathrm{d}y = 0$

   (f) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x+\sqrt{xy}},\ x > 0,\ y > 0$

2. Mostre que a equação $y' = \dfrac{yx}{x^2 - y^2}$ é homogênea e que possui, para cada ponto (x_0, y_0) do plano com $y_0 \neq x_0$, uma única solução $y(x)$ satisfazendo $y(x_0) = y_0$.

3. Resolva a equação diferencial dada.

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y + 1}{x + 3y - 2}$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-8x + 3y + 2}{-9x + 5y - 1}$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y + 4}{4y - 3x + 1}$

   (d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 3}{2y - x + 3}$

4. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   (a) $y' = y/x + (2x^3/y)\cos(x^2)$, $y(\sqrt{\pi/2}) = \sqrt{\pi}$.

   (b) $y'x\ln x = y$, $y(3) = \ln 81$.

   (c) $xy' = y + 4x^5\cos^2(y/x)$, $y(2) = 0$.

   (d) $yy' = (x-1)e^{-y^2}$, $y(0) = 1$.

Aula 1.5

Equações Exatas e Fatores Integrantes

Seja uma família de curvas $f(x, y) = c$, onde c é uma constante e f uma função diferenciável. Vimos do Cálculo que a diferencial total de f é:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Disto segue que se $f(x, y) = c$, então $df = 0$.

Exemplo 1.5.1. *Se $f(x, y) = x^2y^3 = c$, então a diferencial total desta expressão é:*

$$df = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0.$$

Reescrevendo a equação acima e dividindo tudo por dx, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2}.$$

Isto é, considerando f uma função diferenciável, a uma família de curvas $f(x, y) = c$ sempre corresponderá uma equação diferencial do tipo $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$.

Definição 1.5.1. *A equação diferencial escrita na forma*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.5.1}$$

é exata se existe uma função $F(x,y)$ tal que

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy. \tag{1.5.2}$$

Observação: Segue da definição que se $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata, então por (1.5.1) e (1.5.2), existe uma função $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

e $F(x,y) = c$ é a solução geral da equação (1.5.1).

Exemplo 1.5.2. *Seja a equação diferencial*

$$\underbrace{(9x^2 + 2y^2 + 2)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{(4xy + 12y^2)}_{N(x,y)}\,dy = 0.$$

Ela é exata. Note que se $F(x,y) = 3x^3 + 2xy^2 + 4y^3 + 2x$, então

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (9x^2 + 2y^2 + 2) = M(x,y) \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial x} = (4xy + 12y^2) = N(x,y)$$

Logo $3x^3 + 2xy^2 + 4y^3 + 2x = c$ é a solução geral da equação diferencial.

Método de solução

Antes de descrevermos o método de solução, precisamos analisar duas questões importantes com relação às equações exatas.

1. Existe uma maneira de testar se uma equação é exata ou não?
2. Se uma equação é exata, como poderemos achar sua solução geral, isto é, como poderemos encontrar uma função $F(x,y)$ tal que F satisfaz a equação exata e $F(x,y) = c$ é a solução geral?

3. Se uma equação não é exata, é possível modificá-la para torná-la exata?

1.5.1 Determinando se uma equação é exata

Se $F(x, y) = c$ é uma solução da equação diferencial exata $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, então

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \tag{1.5.3}$$

Suponha que M e N são contínuas e com derivadas parciais contínuas num domínio retangular $R: \ \alpha < x < \beta, \ \ \gamma < y < \delta$ do plano. Calculando a derivada parcial de M em relação a y e de N em relação a x, obtemos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}. \end{cases}$$

Pela hipótese de continuidade das derivadas parciais M_y e N_x, segue que as segundas derivadas parciais mistas são iguais $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, isto é,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.5.4}$$

Resumimos a ideia acima no seguinte teorema.

Teorema 1.5.1. *Sejam as funções $M, N, \dfrac{\partial N}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ contínuas num domínio retangular $R: \ \alpha < x < \beta, \ \ \gamma < y < \delta$ do plano. Então a equação diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é exata em R se, e somente se,*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Exemplo 1.5.3. *Verifique que a equação diferencial* $\cos(x+y)dx + (3y^2 + 2y + \cos(x+y))dy = 0$ *é exata.*

Solução: Note que $M(x, y) = \cos(x + y)$ e $N(x, y) = (3y^2 + 2y + \cos(x + y))$. Se a equação é

exata, então devemos ter $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. De fato,

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -\operatorname{sen}(x+y) \\ \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -\operatorname{sen}(x+y). \end{cases}$$

Portanto, a equação é exata.

1.5.2 Determinando a solução geral

Se a equação diferencial (1.5.1) é exata, queremos determinar uma função $F(x,y)$ tal que

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

com

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \end{cases} \tag{1.5.5}$$

Integrando a primeira equação de (1.5.5) em relação a x, obtemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial F}{\partial x} dx &= \int M(x,y)dx \\ \iff F(x,y) &= \int M(x,y)dx + k(y), \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

onde $k(y)$ é uma constante de integração quando se integra em relação a x. Para determinar $k(y)$, derivamos a função F em relação a y e igualamos a N, como na equação (1.5.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + k'(y) \\ \iff k'(y) &= N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right). \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

Esta última equação determina a função $k(y)$.

Exemplo 1.5.4. *Resolva a equação diferencial* $\cos(x+y)dx + (3y^2 + 2y + \cos(x+y))dy = 0$.

Solução: Já vimos no exemplo acima que esta equação diferencial é exata com

$$M(x,y) = \cos(x+y) \text{ e } N(x,y) = (3y^2 + 2y + \cos(x+y)).$$

Agora precisamos determinar sua solução, isto é, uma função $F(x,y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = \cos(x+y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$. Integrando $\frac{\partial F}{\partial x} = \cos(x+y)$ em relação a x, obtemos:

$$F(x,y) = \int \cos(x+y)dx + k(y) \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) + k(y).$$

Derivando a função F obtida em relação a y e igualando a $N(x,y)$, obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos(x+y) + k'(y) = 3y^2 + 2y + \cos(x+y) \quad \Leftrightarrow \quad k'(y) = 3y^2 + 2y \quad \Leftrightarrow \quad k(y) = y^3 + y^2 + c_1,$$

onde c_1 é uma constante real. Substituindo $k(y)$ na expressão de F acima, encontramos $F(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) + y^3 + y^2 + c_1$ e, portanto, a solução geral é:

$$\operatorname{sen}(x+y) + y^3 + y^2 + c_1 = c_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{sen}(x+y) + y^3 + y^2 = c,$$

onde $c = c_2 - c_1$.

Exemplo 1.5.5. *Ache o valor de b para o qual a equação diferencial $(xy^2 + bx^2y)dx + (x+y)x^2dy = 0$ é exata e resolva a equação com este valor de b.*

Solução:

Note que

$$M(x,y) = xy^2 + bx^2y \quad \text{e} \quad N(x,y) = (x+y)x^2.$$

Para a equação ser exata, precisamos ter $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, isto é,

$$2xy + bx^2 = 3x^2 + 2xy \quad \Leftrightarrow \quad b = 3.$$

Assim, vamos encontrar a solução de $(xy^2 + 3x^2y)dx + (x+y)x^2dy = 0$, isto é, encontrar uma função $F(x,y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$. Integrando $\frac{\partial F}{\partial x} = xy^2 + 3x^2y$ em relação a x, obtemos:

$$F(x,y) = \int (xy^2 + 3x^2y)dx = \frac{x^2y^2}{2} + x^3y + k(y).$$

Derivando esta última expressão em relação a y e observando que $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 y + x^3 + k'(y) = x^3 + yx^2 \quad \Rightarrow \quad k(y) = c.$$

Substituindo $k(y)$ na expressão de F, a solução geral será:

$$\frac{x^2 y^2}{2} + x^3 y = c.$$

1.5.3 Fator integrante: transformando uma equação diferencial em exata

Exemplo 1.5.6. *A equação diferencial $-ydx + xdy = 0$ não é exata. De fato,*

$$\begin{aligned} M(x, y) = -y \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1 \\ N(x, y) = x \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, a equação não é exata. Porém, note que se a equação diferencial for multiplicada por $1/x^2$, ela se torna

$$-\frac{-y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = 0,$$

que é uma equação exata:

$$\begin{aligned} M(x, y) = -\frac{-y}{x^2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1/x^2 \\ N(x, y) = 1/x \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1/x^2, \end{aligned}$$

e como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, esta nova equação diferencial é exata.

Este último exemplo nos mostra que, em geral, se a equação diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.5.8}$$

não é exata, podemos multiplicá-la por uma função apropriada $\mu(x, y)$, de modo que a nova

equação diferencial

$$M(x,y)\mu(x,y)dx + N(x,y)\mu(x,y)dy = 0 \tag{1.5.9}$$

seja exata.

A função $\mu(x,y)$ é chamada de **fator integrante** da equação (1.5.8). A equação (1.5.9) pode então ser resolvida pelo método da equações exatas e suas soluções também serão soluções da equação original (1.5.8).

Exemplo 1.5.7. *Verifique que* $\mu(x,y) = \dfrac{y}{x}$ *é um fator integrante para a equação diferencial*

$$y\,\mathrm{d}x + 2x\ln x\,\mathrm{d}y = 0$$

e então encontre sua solução.

Solução: Seja $M(x,y) = y$ e $N(x,y) = 2x\ln x$. Então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2\ln x + 2$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ a equação dada não é exata. Multiplicando a equação por $\dfrac{y}{x}$ temos a nova equação

$$\frac{y^2}{x}\,\mathrm{d}x + 2y\ln x\,\mathrm{d}y = 0$$

Agora se $\widetilde{M}(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$ e $\widetilde{N}(x,y) = 2y\ln x$. Então

$$\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y} = \frac{2y}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x} = \frac{2y}{x}$$

Como $\dfrac{\partial \widetilde{M}}{\partial y} = \dfrac{\partial \widetilde{N}}{\partial x}$ a nova equação é exata e portanto $\mu(x,y) = \dfrac{y}{x}$ é um fator integrante da equação diferencial original. Como a nova equação é exata, existe uma função $F(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{y^2}{x} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y\ln x \end{cases} \tag{1.5.10}$$

Integrando $\frac{\partial F}{\partial x}$ com respeito a x, temos:

$$F(x,y) = y^2 \ln x + h(y)$$

Derivando $F(x,y)$ em relação a y e igualando a $N(x,y)$, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \ln x + h'(y)$$

$$\Rightarrow \quad h'(y) = 0 \Longrightarrow h(y) = c, \;\; c = \text{constante.}$$

Portanto, substituindo $h(y)$ na expressão de F, a solução geral será:

$$y^2 \ln x = c.$$

Determinando fatores integrantes

Seja $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ uma equação diferencial não exata com fator integrante $\mu(x,y)$. Então

$$M(x,y)\mu(x,y)dx + N(x,y)\mu(x,y)dy = 0 \tag{1.5.11}$$

seja exata. Neste caso deveremos ter

$$\frac{\partial M\mu}{\partial y} = \frac{\partial N\mu}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{1.5.12}$$

Ou seja, se pudermos encontrar a função $\mu(x,y)$ satisfazendo a equação (1.5.12) então a equação (1.5.11) será exata. Infelizmente a equação (1.5.12), que determina o fator integrante é muito difícil de ser resolvida. Desta forma, procuramos fatores integrantes nos seguintes casos especiais:

Primeiro caso: μ é uma função somente em x, isto é $\mu = \mu(x)$

Se $\mu = \mu(x)$, então $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ e a equação (1.5.12) se reduz a:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}N = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

ou

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}}_{\text{função só em } x} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N} \cdot \mu(x). \tag{1.5.13}$$

Mas a equação (1.5.13) não tem sentido, a menos que a expressão $\dfrac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}$ seja uma função somente em x. Isto é,

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N} = h(x)$$

para alguma função h de uma variável, e a equação (1.5.13) se reduz a

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \mu \cdot h(x)$$

que é uma equação de variáveis separáveis. Separando as variáveis temos que

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = h(x)\,\mathrm{d}x$$

e integrando temos que

$$\ln \mu = \int h(x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mu = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Concluímos então que a equação admite o fator integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{1.5.14}$$

Segundo caso: μ é uma função somente em y, isto é $\mu = \mu(y)$

Se $\mu = \mu(y)$, então $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ e a equação (1.5.12) se reduz a:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} M = -\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

ou

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}}_{\text{função só em } y} = -\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M} \cdot \mu(y). \tag{1.5.15}$$

Mas a equação (1.5.15) não tem sentido, a menos que a expressão $\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M}$ seja uma função somente em y. Isto é,

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M}=f(y)$$

para alguma função f de uma variável e a equação (1.5.15) se reduz a

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}=-\mu\cdot f(y)$$

que é uma equação de variáveis separáveis. Separando as variáveis temos que

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=-f(y)\,\mathrm{d}y$$

e integrando temos que

$$\ln\mu=-\int f(y)\,\mathrm{d}y\Longrightarrow\mu=e^{-\int f(y)\,\mathrm{d}y}.$$

Concluímos então que a equação admite o fator integrante $\mu(y)$:

$$\mu(y)=e^{-\int f(y)dy}. \tag{1.5.16}$$

Terceiro caso: μ é uma função de xy, isto é, $\mu(x,y)=\mu(xy)$

Se $\mu(x,y)=\mu(t),$ com $t=xy$, então $\frac{\partial\mu}{\partial x}=y\cdot\mu'(t)$ e $\frac{\partial\mu}{\partial y}=x\cdot\mu'(t)$. A equação (1.5.12) então se reduz a:

$$x\cdot\mu'(t)M-y\cdot\mu'(t)N=-\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(t)$$

ou

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}}_{\text{função só em } t}=-\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{xM-yN}\cdot\mu(t). \tag{1.5.17}$$

Mas a equação (1.5.17) não tem sentido, a menos que a expressão $\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{xM-yN}$ seja uma função somente em t. Isto é,

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{xM-yN}=g(t)$$

para alguma função g de uma variável, e a equação (1.5.17) se reduz a

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = -\mu \cdot g(t)$$

que é uma equação de variáveis separáveis. Separando as variáveis temos que

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = -g(t)\,\mathrm{d}y$$

e integrando temos que

$$\ln \mu = -\int g(t)\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \mu(t) = e^{-\int g(t)\,\mathrm{d}t}$$

Conclui-se então que a equação admite o fator integrante $\mu(xy)$:

$$\mu(t) = e^{-\int g(t)\,\mathrm{d}t}, \quad \text{onde } t = xy. \tag{1.5.18}$$

Resumimos a teoria dos fatores integrantes no seguinte Teorema.

Teorema 1.5.2. *Seja $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ uma equação diferencial não exata.*

- *Se $\dfrac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N} = h(x)$ (é uma função somente em x), então a equação admitirá o fator integrante*

$$\mu(x) = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

- *Se $\dfrac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M} = f(y)$ (é uma função somente em y), então a equação admitirá o fator integrante*

$$\mu(y) = e^{-\int f(y)\,\mathrm{d}y}$$

- *Se $\dfrac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{xM - yN} = g(t)$, com $t = xy$, então a equação admitirá o fator integrante*

$$\mu(t) = e^{-\int g(t)\,\mathrm{d}t}$$

Exemplo 1.5.8. *Resolva o PVI*

$$2\,\mathrm{sen}\,(y^2)dx + xy\cos(y^2)dy = 0, \qquad y(2) = \sqrt{\pi/2}.$$

Solução: Vamos testar se a equação diferencial é exata:

$$M(x,y) = 2 \text{ sen } (y^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 4y \cos (y^2)$$
$$N(x,y) = xy \cos (y^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y \cos (y^2)$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, a equação não é exata.

Fator integrante: Temos que

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 4y \cos (y^2) - y \cos (y^2) = 3y \cos (y^2).$$

Assim

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N} = \frac{3}{x}.$$

Pelo Teorema 1.5.2, a equação admite o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{\ln x^3} \quad \Longrightarrow \quad \mu(x) = x^3.$$

Multiplicando este fator integrante pela equação, obtemos $2x^3 \text{ sen } (y^2)dx + x^4 y \cos (y^2)dy = 0$.

Vamos testar se a nova equação diferencial é exata:

$$M(x,y) = 2x^3 \text{ sen } (y^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 y \cos (y^2)$$
$$N(x,y) = x^4 y \cos (y^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x^3 y \cos (y^2)$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, a equação é exata. A seguir, encontraremos a solução geral $F(x,y) = c$, onde $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Integrando $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ em relação a x, obtemos:

$$F(x,y) = \int 2x^3 \text{ sen } (y^2)dx + k(y) = \frac{1}{2}x^4 \text{ sen } (y^2) + k(y).$$

De $\frac{\partial F}{\partial y} = N$, temos: $x^4 y \cos (y^2) + k'(y) = x^4 y \cos (y^2) \quad \Longrightarrow \quad k(y) = c_1$. Logo, a solução geral será $F(x,y) = c$, isto é, $\frac{1}{2}x^4 \text{ sen } (y^2) = c$. Substituindo a condição inicial, $y = \sqrt{\pi/2}$ para $x = 2$:

$$\frac{1}{2}16 \text{ sen } (\pi/2) = c \quad \Longrightarrow \quad c = 8.$$

Portanto, a solução do PVI é portanto $\frac{1}{2}x^4 \text{ sen } (y^2) = 8$.

Exemplo 1.5.9. *Resolva a equação*

$$(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)\,\mathrm{d}y = 0$$

Solução: Vamos testar se a equação diferencial é exata:

$$\begin{aligned} M(x,y) = x^2 + y^2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \\ N(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 2xy \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 + 2y \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, a equação não é exata.

Fator integrante: Temos que

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 2y - (3x^2 + 3y^2 + 2y) = -3(x^2 + y^2).$$

Assim

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M} = -3.$$

Pelo Teorema 1.5.2, a equação admite o fator integrante

$$\mu(y) = e^{-\int -3\,\mathrm{d}y} = e^{3y}.$$

Multiplicando a equação pelo este fator integrante, obtemos

$$e^{3y}(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + e^{3y}(x^3 + 3xy^2 + 2xy)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Vamos testar se a nova equação diferencial é exata:

$$\begin{aligned} M(x,y) = e^{3y}(x^2 + y^2) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3e^{3y}(x^2 + y^2) + 2ye^{3y} = e^{3y}(3x^2 + 3y^2 + 2y) \\ N(x,y) = e^{3y}(x^3 + 3xy^2 + 2xy) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{3y}(3x^2 + 3y^2 + 2y) \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, a equação é exata. A seguir, encontraremos a solução geral $F(x,y) = c$, onde

$\frac{\partial F}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Integrando $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ em relação a x, obtemos:

$$F(x,y) = \int e^{3y}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + k(y) = e^{3y}\left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) + k(y).$$

De $\frac{\partial F}{\partial y} = N$, temos: $e^{3y}(x^3+3xy^2+2xy) + k'(y) = e^{3y}(x^3+3xy^2+2xy) \implies k'(y) = 0 \implies$ $k(y) = c_1$. Logo, a solução geral será $F(x,y) = c$, isto é, $e^{3y}\left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) = c$ ou $x^3 + 3xy^2 = ce^{-3y}$.

Exemplo 1.5.10. *Resolva a equação*

$$\left(3x + \frac{6}{y}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x}\right)\mathrm{d}y = 0$$

Solução: Vamos testar se a equação diferencial é exata:

$$M(x,y) = 3x + \frac{6}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6}{y^2}$$
$$N(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2x}{y} - \frac{3y}{x^2}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, a equação não é exata.

Fator integrante: Temos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \left(-\frac{6}{y^2}\right) - \left(\frac{2x}{y} - \frac{3y}{x^2}\right) = \frac{-6x^2 - 2x^3y + 3y^3}{x^2y^2}$$

e

$$xM - yN = x\left(3x + \frac{6}{y}\right) - y\left(\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x}\right) = \frac{6x^2 + 2x^3y - 3y^3}{xy}.$$

Assim

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{xM - yN} = -\frac{1}{xy} = -\frac{1}{t} = g(t).$$

Pelo Teorema 1.5.2, a equação admite o fator integrante

$$\mu(t) = e^{-\int -\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t} = t.$$

Multiplicando a equação pelo este fator integrante $\mu = xy$, obtemos

$$(3x^2y + 6x)\,\mathrm{d}x + (x^3 + 3y^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Vamos testar se a nova equação diferencial é exata:

$$\begin{aligned} M(x,y) = 3x^2y + 6x \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \\ N(x,y) = x^3 + 3y^2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 \end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, a equação é exata. A seguir, encontraremos a solução geral $F(x,y) = c$, onde $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$. Integrando $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ em relação a x, obtemos:

$$F(x,y) = \int (3x^2y + 6x)\,\mathrm{d}x + k(y) = x^3y + 3x^2 + k(y).$$

De $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$, temos: $x^3 + k'(y) = x^3 + 3y^2 \quad \Longrightarrow \quad k'(y) = 3y^2 \quad \Longrightarrow k(y) = y^3 + c_1$. Logo, a solução geral será $F(x,y) = c$, isto é, $x^3y + 3x^2 + y^3 = c$.

1.5.4 Exercícios

1. Verifique se cada uma das equações a seguir é exata. E, caso afirmativo, resolva-a.

   (a) $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$.
   Resp: $x^2 + 3x + y^2 - 2y = c$.

   (b) $(3x^2 - 2xy + 2)dx + (6y^2 - x^2 + 3)dy = 0$.
   Resp: $x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = c$.

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax + by}{bx + cy}$.
   Resp: $ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$.

   (d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax - by}{bx - cy}$.
   Resp: Não é exata.

   (e) $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0$.
   Resp: $e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = c$ e também $y = 0$.

   (f) $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x)dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3)dy = 0$.
   Resp: $e^{xy} \cos 2x + x^2 - 3y = c$.

(g) $(x \ln y + xy)dx + (y \ln x + xy)dy = 0 \quad x > 0, y > 0.$

Resp: Não é exata.

(h) $xy^2 + y + (x^2y + x)\dfrac{dy}{dx} = 0$

(i) $e^x \operatorname{sen} y + 2x + (e^x \cos y + 2y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

(j) $e^{xy}(1 + xy) + x^2e^{xy}\dfrac{dy}{dx} = 0$

(k) $2x + 1 - \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{2y}{x}\dfrac{dy}{dx} = 0$

(l) $(2x \cos y - e^x)dx - x^2 \operatorname{sen} y\, dy = 0$

(m) $(3x^2y^2 + \operatorname{sen} x)dy + (2xy^3 + y \cos x)dx = 0$

2. Resolva os seguintes problemas de valor inicial

(a) $(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0$, $y(1) = 3$.

Resp: $x^2 - xy + y^2 = 7$.

(b) $(9x^2 + y - 1)dx - (4y - x)dy = 0$, $y(1) = 0$.

Resp: $3x^3 + xy - x - 2y^2 = 2$.

3. Mostre que qualquer equação separável,

$$M(x) + N(y)y' = 0,$$

é também exata.

4. Mostre que as equações a seguir não são exatas, mas se tornam exatas quando multiplicadas pelo fator integrante dado. A seguir, resolva cada equação.

(a) $x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0, \quad \mu(x, y) = 1/xy^3.$

Resp: $x^2 + 2 \ln |y| - y^{-2} = c$ e também $y = 0$.

(b) $\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x} \operatorname{sen} x\right)dx + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0, \quad \mu(x, y) = ye^x.$

Resp: $e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = c$.

(c) $ydx + (2x - ye^y)dy = 0, \quad \mu(x, y) = y.$

Resp: $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c$.

(d) $(x + 2) \operatorname{sen} ydx + x \cos ydy = 0, \quad \mu(x, y) = xe^x.$

Resp: $x^2e^x \operatorname{sen} y = 0$.

(e) $(x^2 + y^2 - x)dx - y\,dy = 0; \quad \mu(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$

5. Para as equações diferenciais abaixo, ache um fator integrante e resolva a equação.

(a) $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (y^2 + x^2)dy = 0.$

Resp: $\mu(x) = e^{3x}$, $(3x^2y + y^3)e^{3x} = c$.

(b) $y' = e^{2x} + y - 1.$

Resp: $\mu(x) = e^x$, $y = ce^x + 1 + e^{2x}$.

(c) $dx + (x/y - \text{ sen } y)dy = 0.$

Resp: $\mu(y) = y$, $xy + y \cos y - \text{ sen } y = c$.

(d) $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0.$

Resp: $\mu(y) = e^{2y}/y$, $xe^{2y} - \ln|y| = c$ e também $y = 0$.

(e) $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)dy = 0.$

Resp: $\mu(y) = \text{ sen } y$, $e^x \text{ sen } y + y^2 = c$.

(f) $\left(3x + \dfrac{6}{y}\right) + \left(\dfrac{x^2}{y} + 3\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

Resp: $\mu(x, y) = xy$, $x^3y + 3x^2 + y^3 = c$.

(g) $x^2 + 2y - x\dfrac{dy}{dx} = 0$

(h) $xe^x + x \ln y + y + \left(\dfrac{x^2}{y} + x \ln x + x \text{ sen } y\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

(i) $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$

(j) $\left(\dfrac{4x^3}{y^2} + \dfrac{3}{y}\right)dx + \left(\dfrac{3x}{y^2} + 4y\right)dy = 0$

Aula 1.6

Equações Lineares de primeira ordem

Definição 1.6.1. *Seja a equação diferencial $y' = f(x, y)$. Se f depende linearmente da variável dependente y, então podemos escrever f na forma*

$$f(x, y) = -p(x)y + q(x),$$

onde p e q são funções contínuas no intervalo aberto $\alpha < x < \beta$. Substituindo a expressão de $f(x, y)$ na equação diferencial, obtemos:

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.6.1}$$

que é conhecida como a forma geral da equação diferencial linear de primeira ordem.

Exemplo 1.6.1. *A equação diferencial $y' + \frac{1}{2}y = 1$ é linear com $p(x) = 1/2$ e $q(x) = 1$.*

Exemplo 1.6.2. *A equação diferencial $y' + 5y^2 = \operatorname{sen} x$ não é linear.*

1.6.1 Método de solução

A equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x) \tag{1.6.2}$$

pode ser resolvida com ajuda de um fator integrante. Reescrevendo (1.6.2) na forma

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

isto é

$$(p(x)y - q(x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0 \tag{1.6.3}$$

temos que

$$\begin{aligned} M(x, y) = p(x)y - q(x) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = p(x) \\ N(x, y) = 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, a equação (1.6.3) não é exata.

Fator integrante: Temos que

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = p(x)$$

Assim

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N} = p(x)$$

Pelo Teorema 1.5.2, a equação (1.6.3) admite o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Multiplicando a equação (1.6.2) por este fator integrante, obtemos

$$e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \tag{1.6.4}$$

O fato importante da equação (1.6.4) é que o lado esquerdo pode ser escrito como

$$e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right)$$

Portanto a equação (1.6.4) ficará

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right) = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

Integrando temos

$$y \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c$$

Portanto a solução da equação (1.6.2) é

$$y = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right] \tag{1.6.5}$$

Teorema 1.6.1. *A equação diferencial linear de primeira ordem*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

admite um fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ *e a sua solução geral é*

$$y = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right]$$

Observação. *Não é necessário memorizar esta fórmula. Para resolver a equação diferencial linear,*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

(1) calcule o fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$*;*

(2) multiplique a equação pelo fator integrante e isto transformará o lado esquerdo da equação em $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y \cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right)$*;*

(3) integre para achar a solução geral.

Exemplo 1.6.3. *Resolva* $y' + \dfrac{y}{x} = 3\cos 2x, \quad x > 0.$

Solução: A equação diferencial é linear.

Fator integrante: $e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} = e^{\ln x} = x$.

Multiplicando a equação pelo fator integrante temos:

$$\underbrace{xy' + y}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy)} = 3x\cos 2x.$$

Portanto,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy) = 3x\cos 2x.$$

Integrando, temos:

$$\begin{aligned} xy &= 3\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &\quad \text{(integração por partes)} \\ \Rightarrow xy &= 3\left\{\frac{1}{2}x\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}\,2x\,\mathrm{d}x\right\} + c \\ \Rightarrow xy &= 3\left\{\frac{1}{2}x\,\mathrm{sen}\,2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right\} + c \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é:

$$y = \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,2x + \frac{3}{4}\frac{\cos 2x}{x} + \frac{c}{x}.$$

Exemplo 1.6.4. *Ache a solução do problema de valor inicial* $y' + 2y = e^{-x}$ *e* $y(0) = 3/4$.

Solução: A equação diferencial é linear.

O fator integrante será:

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

Multiplicando a equação pelo fator integrante temos

$$\underbrace{e^{2x}y' + 2ye^{2x}}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{2x}y)} = e^{x}.$$

Portanto,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{2x}y) = e^{x}.$$

Integrando, temos:

$$\begin{aligned} e^{2x}y &= \int e^{x}\,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow e^{2x}y &= e^{x} + c. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é:

$$y = ce^{-2x} + e^{-x}.$$

Substituindo a condição inicial: $3/4 = c + 1$. Logo $c = -1/4$ e a solução do PVI é

$$y = -0.25e^{-2x} + e^{-x}.$$

Exemplo 1.6.5. *Resolva a equação diferencial* $xy' + (x+1)y = x$.

Solução: A equação diferencial não está na forma de uma equação linear. Precisamos dividir tudo por x, obtendo a equação equivalente $y' + \dfrac{x+1}{x}y = 1$ na forma linear com $p(x) = \dfrac{x+1}{x}$ e $q(x) = 1$. O fator integrante será:

$$\mu(x) = e^{\int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx} = e^{x+\ln x} = xe^x.$$

Multiplicando a equação pelo fator integrante temos:

$$\underbrace{xe^x y' + (x+1)e^x y}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xe^x y)} = xe^x$$

Portanto,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xe^x y) = xe^x$$

Integrando, temos:

$$\begin{aligned} xe^x y &= \int xe^x \,\mathrm{d}x \\ &\qquad \text{(integração por partes)} \\ \Rightarrow xe^x y &= xe^x - \int e^x \,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow xe^x y &= xe^x - e^x + c. \end{aligned}$$

A solução geral é:

$$y = \frac{ce^{-x}}{x} - \frac{1}{x} + 1.$$

que é a solução geral da equação diferencial linear.

Exemplo 1.6.6. *Seja* $y_1 = y_1(x)$ *uma solução da equação*

$$y' + p(x)y = 0 \tag{1.6.6}$$

e seja $y_2 = y_2(x)$ *uma solução de*

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{1.6.7}$$

Mostre que $y = y_1 + y_2$ *também é solução da equação* (1.6.7).

Solução: Para mostrar que a função $y = y_1 + y_2$ é solução da equação (1.6.7), devemos mostrar que ela satisfaz a equação diferencial. De fato,

$$\begin{aligned}
(y_1 + y_2)' + p(x)(y_1 + y_2) &= q(x) \\
y_1' + p(x)y_1 + y_2' + p(x)y_2 &= q(x) \\
0 + y_2' + p(x)y_2 &= q(x) \\
q(x) &= q(x).
\end{aligned}$$

1.6.2 Exercícios

1. Ache a soluçao geral das seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem:

   (a) $y' + 3y = t + e^{-2t}$. Resp: $y = ce^{-3t} + (t/3) - 1/9 + e^{-2t}$.

   (b) $y' + y = te^t + 1$. Resp: $y = ce^{-t} + 1 + t^2e^{-t}/2$.

   (c) $y' - 2y = 3e^t$. Resp: $y = ce^{2t} - 3e^t$.

   (d) $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$. Resp: $y = t^2e^{-t^2} + ce^{-t^2}$.

   (e) $2y' + y = 3t$. Resp: $y = ce^{-t/2} + 3t - 6$.

   (f) $y' + y = 5 \text{ sen } 2t$. Resp: $y = ce^{-t} + \text{ sen } 2t - 2 \cos 2t$.

   (g) $y' - (\text{ tg } t)y = \cos t$.

   (h) $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{x^2e^x + u}{x}$

   (i) $y^2dy + ydx = xdy$

   (j) $y' - 4y = 2x - 4x^2$

   (k) $xdy + (y - \text{ sen } x)dx = 0$

2. Resolva os problemas de valor inicial abaixo,

   (a) $y' - y = 2te^{2t}$, $y(0) = 1$. Resp: $y = 3e^t + 2(t-1)e^{2t}$.

   (b) $ty' + 2y = t^2 - t + 1$, $y(1) = 1/2$, $t > 0$. Resp: $(3t^4 - 4t^3 + 6t^2 + 1)/12t^2$.

(c) $y' - 2y = e^{2t}$, $y(0) = 2$. Resp: $y = (t+2)e^{2t}$.

(d) $t^3y' + 4t^2y = e^{-t}$, $y(-1) = 0$. Resp: $y = -(t+1)e^{-t}/t^4$.

(e) $y' - (\operatorname{tg} t)y = \cos t$, $y(0) = 1$.

(f) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} - y \operatorname{tg} t = \sec t \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x - 2 \\ y(e) = 0 \end{cases}$

3. Considere o PVI

$$y' + \frac{1}{2}y = t, \quad y(0) = -1.$$

Ache as coordenadas do ponto de mínimo local da solução. Resp: $(t, y) = (-2\ln\frac{4}{3}, -4\ln\frac{4}{3})$.

4. Considere o PVI

$$y' + \frac{2}{3}y = 1 - \frac{1}{2}t, \quad y(0) = y_0.$$

Ache o valor de y_0 para o qual a solução toca, mas não cruza, o eixo Ot. Resp: $y_0 = -1.642876$.

5. Ache o valor de y_0 para o qual, a solução do PVI

$$y' - y = 1 + 3\operatorname{sen} t, \quad y(0) = y_0$$

permanece finito quando $t \longrightarrow \infty$. Resp: $-5/2$.

6. Mostre que se a e λ são constantes positivas e b é um número real qualquer, então toda solução da equação

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

tem a propriedade que $y \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$. Sugestão: considere os casos $a = \lambda$ e $a \neq \lambda$ separadamente.

7. (**Equação de Bernoulli:**) Seja a equação

$$y' = f(x)y + g(x)y^{\alpha}, \tag{1.6.8}$$

onde $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ é uma constante e f e g são funções conhecidas. Faça a mudança de variável $u = y^{1-\alpha}$. Mostre que esta substituição reduz a equação acima à equação linear:

$$u' = (1-\alpha)f(x)u + (1-\alpha)g(x).$$

8. Use o exercício (1.6.8) para resolver as seguintes equações:

   (a) $y' = \dfrac{4y}{x} + x\sqrt{y}$. Resp: $y = c^2x^4 + cx^4 \ln x + \dfrac{x^4}{4}(\ln x)^2$.

   (b) $y' = -xy^2 + \dfrac{y}{x}$. Resp: $y = \dfrac{1}{cx^{-1} + x^2/3}$.

   (c) $y' + \dfrac{1}{x}y = y^{-2} \cos x$, $y(1) = 1$.

   (d) $y' + x^2y = \dfrac{1}{x^2}y^4$, $y(-1) = -2$.

9. Seja $y = y_1(x)$ uma solução da equação

$$y' + p(x)y = 0 \tag{1.6.9}$$

   e seja $y = y_2(x)$ uma solução de

$$y' + p(x)y = g(x). \tag{1.6.10}$$

   Mostre que $y = y_1(x) + y_2(x)$ também é solução da equação (1.6.10).

10. Mostre que a equação diferencial $y' + p(x)y = g(x)y \ln y$ pode ser resolvida usando a mudança de variável $z = \ln y$. Aplique este gmétodo para resolver a equação $xy' = 2x^2y + y \ln y$. Resp: $y = e^{cx+2x^2}$.

11. Mostre que a equação $(\cos y)y' + 2x \operatorname{sen} y = -2x$ pode ser transformada em uma equação linear com a mudança de variáveis $z = \operatorname{sen} y$.

12. **(Variação de Parâmetros):** Considere o seguinte método para resolver uma equação diferencial linear geral de primeira ordem:

$$y' + p(t)y = g(t). \tag{1.6.11}$$

   (a) Se $g(t) = 0$, mostre que a solução é:

$$y = Ae^{-\int p(t)dt} \tag{1.6.12}$$

(b) Se $g(t) \neq 0$, suponha que a solução é da forma

$$y = A(t)e^{-\int p(t)dt}, \tag{1.6.13}$$

onde A é agora uma função de t. Substituindo y e y' na equação diferencial (1.6.11), mostre que $A(t)$ deve satisfazer a condição

$$A'(t) = g(t)e^{\int p(t)dt}. \tag{1.6.14}$$

(c) Ache $A(t)$ a partir de (1.6.14). Substitua o valor encontrado na equação (1.6.13) e obtenha a solução da equação diferencial. Este método é conhecido por **variação de parâmetros**.

13. Use o método de variação de parâmetros para resolver a equação diferencial $y' - 2y = t^2e^{2t}$, $t > 0$. Resp: $y(t) = ce^{2t} + t^3e^{2t}/3$.

14. **(Equação de Ricatti):** A equação

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x) \tag{1.6.15}$$

é conhecida como equação de Ricatti.

(a) Mostre que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação (1.6.15), então a função $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ é solução da equação de Bernoulli

$$z' + (p + 2y_2q)z - qz^2 = 0. \tag{1.6.16}$$

(b) Sabendo que $y(x) = x$ é uma solução de Ricatti

$$y' + x^3y - x^2y^2 = 1,$$

determine as demais soluções.

Aula 1.7

Aplicações das Equações Diferenciais de primeira ordem

Modelagem é o processo de escrever uma equação diferencial para descrever uma situação física.

Muitos fenômenos em ciência e engenharia envolvem relações entre quantidades que variam com o tempo. E como taxas de variações são representados matematicamente por **derivadas**, tais fenômenos podem ser modelados por equações que envolvem derivadas. Nesta aula vamos analisar a modelagem de alguns destes fenômenos:

1.7.1 Problemas de variação de temperatura

A Lei do resfriamento de Newton afirma que a "taxa de variação da temperatura de um corpo é diretamente proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio ambiente."

Modele este fenômeno como uma equação diferencial de primeira ordem e classifique-o.

- Seja $T(t)$ a temperatura do corpo no tempo t e T_m a temperatura do ambiente.
- A taxa de variação da temperatura é $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$.
- Então o modelo matemático para a lei de resfriamento de Newton é:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_m), \tag{1.7.1}$$

onde k é um constante de proporcionalidade.

- A equação (1.7.1) pode ser resolvida como uma equação diferencial linear , pois podemos reescrevê-la como

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - kT = -kT_m.$$

ou como uma equação diferencial de variável separável, pois podemos separar os variáveis:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_m} = k\,\mathrm{d}t.$$

1.7.1.1 Exercícios

Use a Lei do Resfriamento para responder às seguintes questões:

1. Um corpo com temperatura desconhecida é colocado em um refrigerador mantido à temperatura constante de 0°F. Se após 20 minutos a temperatura do corpo é 40°F e após 40 minutos é 20°F, determine a temperatura inicial do corpo.

2. Um corpo à temperatura de 50°C é colocado em um forno cuja temperatura á mantida à 150°C. Se após 10 minutos a temperatura do corpo aumentou em 25°C, determine o tempo necessário para o corpo atingir os 100°C.

3. O corpo de uma vitima de assassinato foi descoberto. O perito da policia chegou à 1:00h da madrugada e, imediatamente, tomou a temperatura do cadáver, que era de $34,8$°C. Uma hora mais tarde ele tomou novamente a temperatura e encontrou $34,1$°C. A temperatura do quarto onde se encontrava a vítima era constante a 20°C. Estime a hora em que se deu a morte, admitindo que a temperatura normal de uma pessoa viva é $36,5$°C.
   Resp: $t \cong 2,24$ horas.

4. Um termômetro é retirado de uma sala e colocado do lado de fora em que a temperatura é de 10°C. Depois de 1 minuto a leitura do termômetro é de 15°C e após 2 minutos 12°C. Determine qual a temperatura da sala onde se encontrava o termômetro inicialmente.
   Resp: 40°C.

1.7.2 Problemas de mistura de líquidos

Há um certo número de exemplos comuns que podem ser classificados como "problemas de misturas" cuja configuração é a seguinte:

- Temos um reservatório (piscina, lago, oceano) de líquido (água, gás) que tem alguma substância (poluição, sal) dissolvido nele.

- O reservatório começa com um volume inicial V_0 e há uma quantidade inicial de substância y_0 no reservatório.

- Temos uma determinada quantidade de líquido $E(t)$ entrando no reservatório com um certo concentração $k(t)$ da substância e uma determinada quantidade de líquido saindo $S(t)$.

- Partimos do princípio de que a substância é uniformemente e perfeitamente misturados no reservatório, podemos perguntar a quantidade $y(t)$ de substância que permanece no reservatório após tempo t.

- Evidentemente, a quantidade de líquido entrando ou saindo podem ser constantes (ou seja, não dependem de tempo), e de igual modo a concentração do líquido entrando também poderia ser uma constante.

Modele este fenômeno como uma equação diferencial de primeira ordem e classifique-o.

- Seja $V(t)$ o volume total do reservatório em tempo t, com volume inicial V_0

- Seja $y(t)$ a quantidade total da substância no reservatório no tempo t, com quantidade inicial y_0

- Como a concentração da substância entrando no reservatório é $k(t)$ e taxa de entrada do líquido no reservatório é $E(t)$, então

$$\begin{pmatrix} \text{a taxa de entrada da substância} \\ \text{no reservatório no tempo } t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{taxa de entrada} \\ \text{do líquido} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{concentração da substância} \\ \text{no liquido na entrada} \end{pmatrix}$$

$$= E(t) \cdot k(t)$$

- Do mesmo modo, a concentração da substância no reservatório é $\dfrac{y(t)}{V(t)}$ e como a taxa de

saída do liquido no reservatório é $S(t)$, então

$$\left(\begin{array}{l}\text{a taxa de saída da substância}\\ \text{no reservatório no tempo } t\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{taxa de saída}\\ \text{do líquido}\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{l}\text{concentração da substância}\\ \text{no liquido na saída}\end{array}\right)$$

$$= S(t) \cdot \frac{y(t)}{V(t)}$$

- Portanto a taxa segundo a qual $y(t)$ está variando com o tempo será a taxa líquida:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(\begin{array}{l}\text{a taxa de entrada da substância}\\ \text{no reservatório no tempo } t\end{array}\right) - \left(\begin{array}{l}\text{a taxa de saída da substância}\\ \text{no reservatório no tempo } t\end{array}\right)$$

$$= E(t) \cdot k(t) - S(t) \cdot \frac{y(t)}{V(t)}$$

- Reescrevendo a equação na forma padrão temos:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{S(t)}{V(t)} \cdot y = E(t) \cdot k(t)$$

que é uma equação diferencial linear.

Exemplo 1.7.1. *Um tanque com capacidade de 400* **L** *contém inicialmente 100* **L** *de água salgada com 50* **kg** *de sal. Água salgada contendo* 1 *kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 5* **L/min**, *e a água misturada no tanque flui para fora a uma taxa de 3* **L/min**. *Quanto sal conterá o tanque quando estiver cheio de água salgada?*

Solução: Seja $y(t)$ a quantidade se sal no tanque no tempo t.

$$\left(\begin{array}{l}\text{a taxa de entrada de sal}\\ \text{no tanque no tempo } t\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{taxa de entrada}\\ \text{de água salgada}\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{l}\text{concentração de sal}\\ \text{no fluxo de entrada}\end{array}\right)$$

$$= \left(\frac{5\text{L}}{1\text{min}}\right) \cdot \left(\frac{1\text{kg}}{1\text{L}}\right) = 5kg/min$$

Como água salgada entra no tanque a uma taxa de 5 L/min e sai a uma taxa de 3 L/min, em tempo t teremos um volume total de $(100 + 2t)$L de água no tanque.

$$\left(\begin{array}{l}\text{a taxa de saída de sal}\\ \text{no tanque no tempo } t\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{taxa de saída}\\ \text{de água salgada}\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{l}\text{concentração de sal}\\ \text{no fluxo de saída}\end{array}\right)$$

$$= \left(\frac{3\text{L}}{1\text{min}}\right)\cdot\left(\frac{y(t)\text{kg}}{(100+2t)\text{L}}\right) = \frac{3y}{100+2t}kg/min$$

Portanto a taxa segundo a qual $y(t)$ está variando com o tempo será a taxa líquida:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(\begin{array}{l}\text{a taxa de entrada de sal}\\ \text{no tanque no tempo } t\end{array}\right) - \left(\begin{array}{l}\text{a taxa de saída de sal}\\ \text{no tanque no tempo } t\end{array}\right)$$

$$= 5 - \frac{3y}{100+2t}$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{3}{100+2t}\cdot y = 5 \qquad \text{linear}$$

$$\text{F.I} = e^{\int \frac{3}{100+2t}\,\mathrm{d}t} = e^{\frac{3}{2}\ln(100+2t)} = (100+2t)^{3/2}$$

Logo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[y(100+2t)^{3/2}\right] = 5(100+2t)^{3/2}$$

Integrando temos que

$$\begin{aligned} y(100+2t)^{3/2} &= 5\int (100+2t)^{3/2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{5(100+2t)^{5/2}}{5/2\cdot 2} + C \\ &= (100+2t)^{5/2} + C \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = 100 + 2t + C(100+2t)^{-3/2}.$$

Quando $t = 0,\ y = 50 \Longrightarrow 50 = 100 + C(100)^{-3/2} \Longrightarrow C = -50000.$

Logo,

$$y = 100 + 2t - 50000(100+2t)^{3/2}.$$

Precisamos mais 300 litros de água salgada para o tanque ficar cheio. Mas a cada minuto entra 2 litros de água salgada no tanque. Portanto o tanque estará cheio em 150 minutos.
Isto é, quando $t = 150$.

$$\begin{aligned} y &= 100 + 2(150) - 50000(100 + 300)^{-3/2} \\ &= 100 + 300 - 50000(400)^{-3/2} \\ &= 400 - 50000(20)^{-3} \\ &= 400 - \frac{50000}{8000} \\ &= 400 - 6,25 = 393,75kg \end{aligned}$$

Portanto o tanque conterá 393,75 kg de sal quando estiver cheio de água salgada.

1.7.2.1 Exercícios

1. Um tanque contém inicialmente 100 litros de água fresca. Despeja-se então água contendo $\frac{1}{2}$ kg de sal por litro no tanque, em uma taxa de 2 litros por minuto, e deixa-se a mistura escoar na mesma taxa. Após 10 minutos, interrompe-se o processo e adiciona-se água fresca numa taxa de 2 litros por minuto, com escoamento da mistura à mesma taxa. Determine a quantidade de sal no tanque ao fim de 20 minutos.

2. Um tanque contém inicialmente 60 **L** de água pura. Água salgada contendo 1 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 2 **L/min**, e a solução (perfeitamente homogênea) deixa o tanque a uma taxa de 3 **L/min**; o tanque está vazio depois de 1 hora.

   (a) Ache a quantidade de sal no tanque depois de t minutos

   (b) Qual a quantidade máxima de sal alcançada no tanque?

3. Um tanque contém inicialmente 100 **L** de água salgada com 1000 gramas de sal. Água salgada contendo uma concentração de sal de $(1 + 0,05 \text{ sen } t)$ gramas por litro entra no tanque a uma taxa de 2 **L/min**, e a solução (perfeitamente homogênea) deixa o tanque na mesma taxa. Seja $y(t)$ a quantidade de sal no tanque no tempo t.
   Escreva uma equação diferencial para y e resolve ela para encontrar y explicitamente como uma função de t.

4. Um tanque contém inicialmente 50 **L** de água salgada com 500 gramas de sal. Água salgada contendo 100 gramas de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 2 **L/min**, e

a solução (perfeitamente homogênea) deixa o tanque a uma taxa de 6 **L/min** . Seja $y(t)$ a quantidade de sal no tanque no tempo t.
Escreva uma equação diferencial para y e resolve ela para encontrar y explicitamente como uma função de t.

5. Um tanque contém 1000 **L** de água salgada com 15 **kg** de sal dissolvido. Água pura entra no tanque a uma taxa de 10 **L/min**. A solução é mantida bem misturada e sai do tanque na mesma taxa. Quanto sal permanece no tanque

   (a) depois de t minutos?

   (b) depois de 20 minutos?

1.7.3 Modelagem de população

Vamos modelar o fenômeno de crescimento da populações.

Modelo simples

- Seja $P(t)$ o número de indivíduos em uma população no tempo t.

- A população irá mudar com o tempo. De fato a taxa de variação de P será devido a natalidade (que aumenta P) e a mortalidade (que diminui P). Isto é

$$\begin{pmatrix} \text{a taxa de variação} \\ P \text{ no tempo } t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{a taxa de} \\ \text{natalidade} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{a taxa de} \\ \text{mortalidade} \end{pmatrix}$$

- Vamos supor que todos os indivíduos são idênticos na população e que a taxa de natalidade média per capita, r, e a taxa de mortalidade média per capita, m, são constantes positivos. Isto é

$$r = \text{taxa de natalidade per capita} = \frac{\text{número de nascidos vivos por ano}}{\text{tamanho da população}},$$

$$m = \text{taxa de mortalidade per capita} = \frac{\text{número de óbitos por ano}}{\text{tamanho da população}}.$$

- Então o número total de nascidos vivos na população no ano t é rP, e o número total de mortes da população no ano t é mP.

- Portanto a taxa de variação da população, $\frac{dP}{dt}$, é dado por

$$\frac{dP}{dt} = rP - mP = (r - m)P = kP,$$

onde $k = (r - m)$.

Portanto, a população cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho, isto satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{1.7.2}$$

onde k é chamado coeficiente de taxa de crescimento relativo, isto é, a taxa de natalidade menos a taxa de mortalidade.
A equação (1.7.2) é de variável separável com solução

$$P(t) = P_0\, e^{kt}. \tag{1.7.3}$$

Podemos deduzir as seguintes conclusões de (1.7.3):

- Não estamos interessados em valores negativos de P, pois representa o tamanho da população.
- a população irá crescer se $k > 0$ o que acontece quando $r - m > 0$ ou seja, quando a taxa de natalidade per capita, r, excede a taxa de mortalidade per capita m.
- Se $k < 0$, ou de forma equivalente, $r < m$ então mais pessoas morrem em média do que nascem, de modo a que a população irá encolher e (eventualmente) ficar extinta.

1.7.4 Problemas de crescimento e decaimento

Seja a equação diferencial

$$y' = ky. \tag{1.7.4}$$

Se $y = y(t)$, depende do tempo, esta equação diz que a taxa de variação de y é proporcional a y. Esta quantidade aumenta se $k > 0$ e diminui se $k < 0$.

A variável y pode modelar:

- o tamanho de uma população

- a quantidade de uma substância radioativa (neste caso $k < 0$ é a taxa de decaimento).
- a quantidade de dinheiro investido. Neste caso, k é a taxa de juros.
- etc.

Como visto anteriormente, esta equação diferencial 1.7.4 é uma equação a variáveis separáveis cuja solução é $y(t) = ce^{kt}$.

Exemplo 1.7.2. *Calcule o rendimento do capital R$10.000,00 investidos por 5 anos a uma taxa de juros anual de* 5%.

Solução: A constante $k = 0.05$ e portanto, a solução é $y = ce^{0.05t}$. Como a condição inicial $y(0) = 10000$, segue que $y(t) = 10000e^{0.05t}$. Após uma aplicação de 5 anos, o capital aumenta para:

$$y(5) = 10000e^{0.05x5} = 12.840,25,$$

isto é, o capital rendeu R$2.840,25.

Exemplo 1.7.3. ***O Sudário de Turin*** *é conhecido por ser o manto funerário de Jesus Cristo. Está preservado para exposição na Catedral San Giovanni Battista em Turin desde 1578. Três testes independentes de datação feitos em 1988 revelaram que a quantidade de carbono 14 do manto estaria entre* 99,119% *e* 99,275% *da quantidade encontrada em um tecido novo equivalente. Como podemos usar esses dados para determinar a idade do sudário?*

Solução: Este é um típico problema de decaimento radioativo, onde a taxa de decaimento (y') é proporcional à quantidade do seu material (ky) a cada instante t. Para o carbono 14, sabe-se que a constante de proporcionalidade é $k = -0,00001216$. Assim, a equação diferencial que modela o problema é $y' = -0,00001216y$, cuja solução é $y = ce^{-0,00001216t}$. Chamamos $y_0 = y(0)$ a quantidade inicial de carbono 14 no sudário e substituindo na solução, achamos o valor da constante c:

$$y(0) = ce^{-0,00001216x0} = c = y_0,$$

isto é, a solução é $y = y_0e^{-0,00001216t}$. Como dito no enunciado, a quantidade de carbono 14 em 1988 era de 99,119% do valor inicial y_0. Quanto tempo levou para a quantidade de carbono 14 decair de y_0 para $0.99119y_0$? Substituindo estes dados na equação e resolvendo-a para a variável tempo t:

$$0.99119y_0 = y_0e^{-0,00001216t} \quad \Rightarrow \quad t = 727,71anos,$$

isto é, o sudário deve ter sido fabricado por volta do ano 1260. Desta forma, fica provado que nunca poderia ser usado como manto funerário de Jesus Cristo.

UNIDADE 2

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM SUPERIORES E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Aula 2.1

Equações Diferenciais de segunda ordem

Definição 2.1.1. *Uma equação diferencial de segunda ordem*

$$y'' = f(x, y, y')$$

é linear quando a função f é linear em y e y', isto é, a função f pode ser escrita na forma:

$$f(x, y, y') = -p(x)y' - q(x)y + r(x).$$

E a forma geral da equação diferencial linear de segunda ordem é

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \tag{2.1.1}$$

Esta equação será chamada de homogênea se $r(x) = 0$. Caso contrário, será chamada de não homogênea.

Exemplo 2.1.1. *A equação diferencial $y'' = 2xyy' + e^{-x}$ é uma equação de segunda ordem, porém não é linear por causa do termo $2xyy'$.*

Exemplo 2.1.2. *A equação diferencial $y'' = 2xy' + e^{-x}y$ é uma equação de segunda ordem linear.*

Exemplo 2.1.3. *A equação diferencial* $y'' = 2xy + e^{-x}$ *é uma equação de segunda ordem linear.*

Definição 2.1.2. *Uma solução da equação* (2.1.1) *é uma função* $\phi(x)$ *definida num intervalo aberto, pelo menos duas vezes diferenciável e que satisfaz a equação diferencial, isto é,*

$$\phi(x)'' + p(x)\phi(x)' + q(x)\phi(x) = r(x).$$

Exemplo 2.1.4. *A função* $\phi(x) = e^x$ *é solução da equação* $y'' - 1/2y' - 1/2y = 0$. *De fato, a função* $\phi(x)$ *é infinitamente diferenciável e ela satisfaz a equação pois* $e^x - 1/2e^x - 1/2e^x = 0$.

Exemplo 2.1.5. *A função* $\phi(x) = x^3$ *definida em* $(0, +\infty)$ *é solução da equação*

$$y'' = \frac{1}{9x^3}(y')^2 + \frac{5}{x^2}y.$$

De fato, a função $\phi(x)$ *é infinitamente diferenciável. Vamos verificar se ela satisfaz a equação diferencial:*

$$6x = \frac{1}{9x^3}(3x^2)^2 + \frac{5}{x^2}x^3 \quad \Rightarrow \quad 6x = x + 5x \quad \Rightarrow \quad 6x = 6x.$$

Definição 2.1.3. *Um Problema de Valor Inicial (PVI) de segunda ordem tem a forma*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

onde x_0, y_0 *e* y_1 *são valores dados. Uma solução deste PVI é uma solução da equação diferencial* $y'' = f(x, y, y')$ *e que satisfaz as condições iniciais dadas, isto é,* $\phi'(x_0) = y_1$ *e* $\phi(x_0) = y_0$.

Exemplo 2.1.6. *Seja o seguinte PVI*

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6x = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

Verifique que a função $\phi(x) = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}$ *é solução deste PVI. De fato, a função* ϕ *é pelo menos duas vezes diferenciável e satisfaz a equação diferencial:*

$$36e^{-2x} - 63e^{-3x} - 90e^{-2x} + 105e^{-3x} + 54e^{-2x} - 42e^{-3x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

Além disso, a função ϕ *satisfaz as condições iniciais:* $\phi(0) = 9 - 7 = 2$ *e* $\phi'(0) = -18 + 21 = 3$.

Estudaremos métodos para resolver a equação (2.1.1) somente quando $p(x)$ e $q(x)$ forem constantes. Estes métodos poderão ser generalizados para equações diferenciais lineares de ordem superior.

Como não é possível achar uma solução da equação (2.1.1) de forma simples e/ou apenas por inspeção, vamos estudar as condições que garantem que a equação (2.1.1) tenha uma solução.

Teorema 2.1.1. *[**Teorema de Existência e Unicidade**] Seja o problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases}$$

Considere $p(x)$, $q(x)$ *e* $r(x)$ *funções contínuas num intervalo* $[a, b]$. *Se* $x_0 \in [a, b]$ *e se* y_0 *e* y_1 *forem números reais quaisquer, então a equação* (2.1.1) *tem uma e somente uma solução* $y(x)$ *no intervalo* $[a, b]$.

Exemplo 2.1.7. *Dado o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' + xy = \frac{1}{x^2} \\ y(2) = 0 \\ y'(2) = -1, \end{cases}$$

onde as funções $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = x$ *e* $r(x) = \frac{1}{x^2}$ *estão definidas no domínio* $[1, 5]$. *Então, como as funções* $p(x)$, $q(x)$ *e* $r(x)$ *são contínuas no seu domínio e* $2 \in [1, 5]$, *o teorema de existência e unicidade nos garante que existe UMA e SOMENTE UMA solução* $y(x)$ *do problema de valor*

inicial definida no intervalo $[1, 5]$.

Exemplo 2.1.8. *Mostre que* $y = x^2 \operatorname{sen} x$ *e* $y = 0$ *são ambas soluções de*

$$x^2y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0,$$

e que ambas satisfazem as condições $y(0) = 0$ *e* $y'(0) = 0$. *Será que isto contradiz o Teorema da Existência e Unicidade de soluções? Note que as condições iniciais são calculadas no ponto* $x = 0$ *e neste ponto as funções* $p(x)$, $q(x)$ *e* $r(x)$ *não estão definidas. Logo, o teorema não se aplica.*

2.1.1 Exercícios

1. Determine o intervalo de maior amplitude dentro do qual o problema de valor inicial proposto tem uma única solução. Não encontre a solução.

   (a) $xy'' + 3y = x$, $y(1) = 1$ e $y'(1) = 0$. Resp: $]0, +\infty[$.

   (b) $(x - 1)y'' - 3xy' + 4y = \operatorname{sen} x$, $y(-2) = 2$ e $y'(-2) = 1$. Resp: $]-\infty, 1[$.

   (c) $x(x - 4)y'' + 5xy' + 4y = 3$, $y(3) = 0$ e $y'(3) = -1$. Resp: $]0, 4[$.

   (d) $(x - 3)y'' + xy' + (\ln|x|)y = 0$, $y'(1) = 1$ e $y(1) = 0$. Resp: $]0, 3[$.

Aula 2.2

Equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem - Solução geral

Estamos interessados em encontrar a solução geral da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2.2.1}$$

Sabemos da Aula 2.1 que um problema de valor inicial com a equação (2.2.1) contém duas condições iniciais:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

Neste caso, uma solução geral deve envolver duas constantes arbitrários. De fato, este é o caso. Mais ainda, vamos ver que existem duas funções diferentes que podemos combinar para criar uma solução para uma equação linear de segunda ordem. A técnica dependerá do princípio de superposição

2.2.1 Princípio da Superposição

Teorema 2.2.1. ***[Princípio da Superposição]*** *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções da equação homogênea* (2.2.1)*, então*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{2.2.2}$$

é também uma solução para quaisquer constantes reais c_1 e c_2.

Demonstração. Como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de (2.2.1) temos que

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \tag{1}$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \tag{2}$$

Substituímos $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ na equação homogênea:

$$\Big(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\Big)'' + p(x)\Big(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\Big)' + q(x)(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) =$$

$$\begin{aligned}
&= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + p(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\
&= c_1 \underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{=0 \text{ de } (1)} + c_2 \underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)}_{=0 \text{ de } (2)} \\
&= c_1 \times 0 + c_2 \times 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é uma solução de (2.2.1). ■

Da Álgebra Linear, a solução (2.2.2) é chamada de combinação linear das soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$. O princípio da superposição diz que qualquer combinação linear de duas soluções da equação homogênea é também solução.

Observação. *Dadas duas soluções y_1 e y_2 da equação*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2.2.1}$$

podemos construir infinitas outras soluções da forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{2.2.2}$$

fazendo c_1 e c_2 percorrer todo o conjunto $\mathbb{R}$, isto é,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

tem a forma da solução geral de (2.2.1).

Portanto, uma pergunta surge: "Se y_1 e y_2 são soluções de (2.2.1), será que a expressão (2.2.2) é a solução geral? Isto é, será que todas as soluções de (2.2.1) podem ser escritos como uma combinação linear de y_1 e y_2 ou algumas soluções têm uma forma totalmente diferente"? Veremos a seguir que a equação (2.2.2) será solução geral se as soluções y_1 e y_2 satisfizerem uma determinada propriedade.

Definição 2.2.1. *Dizemos que duas soluções y_1 e y_2 formam um* **conjunto fundamental de soluções** *de* (2.2.1) *se qualquer solução de* (2.2.1) *pode ser expressa como uma combinação linear de y_1 e y_2.*

Teorema 2.2.2 (**Teorema da solução geral**). *Se p e q são funções continuas no intervalo aberto $I = (a, b)$ e se y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial linear homogênea:*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.2.1}$$

satisfazendo

$$W(y_1, y_2)(x_0) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0$$

para algum ponto $x_0 \in I$, então **qualquer** *outra solução de* (2.2.1) *no intervalo I pode ser escrito unicamente da forma*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

A expressão $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é chamado de **solução geral** *da equação diferencial linear de segunda ordem homogênea.*

Demonstração. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da equação (2.2.1) no intervalo I e seja Y uma outra solução em I. Escolha um ponto $x_0 \in I$. Pela Teorema de Existência e Unicidade (Teorema 2.1.1) sabemos que existe uma e somente uma solução $y(x)$ da equação (2.2.1) tal que

$$\begin{cases} y(x_0) = Y(x_0) \\ y'(x_0) = Y'(x_0) \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Portanto se pudermos mostrar que a solução da forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

satisfaz as condições iniciais (2.2.3), então teremos que $Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é um combinação linear de $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Portanto queremos mostrar que é possível escolher constantes c_1 e c_2 tais que:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= y(x_0) = y_0 \\ \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Para encontrar as constantes c_1 e c_2, precisamos resolver o sistema. Usaremos o método de Cramer:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}} \qquad \text{e} \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}$$

Portanto podemos resolver por c_1 e c_2 sempre que o denominador

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0$$

Portanto sempre podemos expressa qualquer solução de (2.2.1) como uma combinação linear de y_1 e y_2 se $W(y_1, y_2) \neq 0$. ■

Definição 2.2.2. *A expressão*

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

é conhecida como o Wronskiano de y_1 e y_2 no ponto x_0.

Exemplo 2.2.1. *Considere a equação diferencial*

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0$$

Mostre que as funções $y_1 = x^{1/2}$ e $y_2 = x^{-1}$ formam um conjunto fundamental de soluções e escreva a solução geral.

Solução:

- y_1 e y_2 são soluções pois

$$2x^2y_1'' + 3xy_1' - y_1 = 2x^2\left(\frac{-x^{-3/2}}{4}\right) + 3x\left(\frac{x^{-1/2}}{2}\right) - x^{1/2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right)x^{1/2} = 0.$$

$$2x^2y_2'' + 3xy_2' - y_2 = 2x^2\left(2x^{-3}\right) + 3x\left(-x^{-2}\right) - x^{-1} = (4 - 3 - 1)\,x^{-1} = 0$$

- Para mostrar que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções, calculamos o Wronskiano de y_1 e y_2 :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^{-1} \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & -x^{-2} \end{vmatrix} = -x^{-3/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{3}{2}x^{-3/2} = \frac{-3}{2\sqrt{x^3}}$$

Como $W \neq 0$ para $x > 0$, y_1, y_2 forma um conjunto fundamental de soluções e a solução geral é dada por

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x^{1/2} + \frac{c_2}{x},$$

onde c_1, c_2 são constantes.

2.2.2 Wronskiano e Independência Linear

Definição 2.2.3 (Independência linear). *Dizemos que duas funções reais $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes no intervalo (a, b) se não é possível escrever uma delas como múltiplo da outra, isto é, não existe $c \in \mathbb{R}$ que satisfaça a relação $y_1(x) = cy_2(x)$. Se duas funções não são linearmente independentes, dizemos que elas são linearmente dependentes.*

Observação. *Outra maneira de demostrar dependência linear é provar que podemos ter*

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

para todo $x \in (a, b)$ com c_1 e c_2 não ambos nulos.

Exemplo 2.2.2. *Seja $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$. Mostre que y_1 e y_2 são linearmente independentes em $\mathbb{R}$.*

Solução: Suponha que y_1 e y_2 são linearmente dependentes em $\mathbb{R}$, isto é

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 x^2 + c_2 x|x| = 0$$

sendo que c_1 e c_2 não são ambos zeros. Colocando $x = 1$ e $x = -1$ temos o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $c_1 = c_2 = 0$, uma contradição à nossa hipótese. Portanto y_1 e y_2 são linearmente independentes em $\mathbb{R}$.

O próximo resultado carateriza independência linear em termos do Wronskiano.

Teorema 2.2.3. *Sejam y_1 e y_2 funções deriváveis no intervalo aberto (a, b).*

(1) Se y_1 e y_2 são linearmente dependentes em (a, b) então $W(y_1, y_2)(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b)$

(2) Se $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ para algum $x_0 \in (a, b)$ então y_1 e y_2 são linearmente independentes em (a, b).

Demonstração. Observe que a segunda afirmação é a contra-positiva da primeira, então vamos demonstrar a primeira.

Suponha que as funções y_1 e y_2 são linearmente dependentes no (a, b). Então para todo $x \in (a, b)$ temos que

$$y_1(x) = cy_2(x)$$

Portanto o Wronskiano é

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cy_2(x) & y_2(x) \\ cy_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = cy_2(x)y_2'(x) - cy_2'(x)y_2(x) \equiv 0.$$

■

O próximo resultado é muito importante pois ele dá uma fórmula simples para o Wronskiano.

Teorema 2.2.4 (Fórmula de Abel). *Sejam p e q funções contínuas em um intervalo (a, b). Sejam y_1 e y_2 soluções da equação diferencial*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2.2.1}$$

Então o Wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$ é dado pela fórmula

$$W(y_1, y_2)(x) = c \cdot e^{-\int p(x)\, \mathrm{d}x}$$

Demonstração. Pela definição,

$$W = y_1y_2' - y_1'y_2 \rightarrow W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' \rightarrow W' = y_1y_2'' - y_1''y_2.$$

Como y_1 e y_2 são soluções de (2.2.1), então:

$$y_1''(x) + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \quad \text{e } y_2''(x) + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Daí,

$$y_1''(x) = -p(x)y_1' - q(x)y_1 \quad \text{e } y_2''(x) = -p(x)y_2' - q(x)y_2.$$

Substituindo y_1'' e y_2'' na expressão de W', obtemos:

$$W' = y_1(-p(x)y_2' - q(x)y_2) - y_2(-p(x)y_1' - q(x)y_1).$$

Colocando $p(x)$ e $q(x)$ em evidência na equação acima, temos:

$$W' = p(x)(-y_1y_2' + y_2y_1') + q(x)(-y_1y_2 + y_1y_2) \quad \rightarrow \quad W' = -pW$$

Resolvendo a equação diferencial para o wronskiano W, temos

$$W' = -pW \quad \rightarrow \quad W(x) = ce^{-\int p(x)dx}.$$

■

Exemplo 2.2.3. *Calcule o Wronskiano das duas soluções da equação*

$$x^2y'' - xy' + (\cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x})y = 0, \quad x > 0.$$

Solução: Como $x > 0$, podemos reescrever a equação diferencial na forma padrão

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}\left(\cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x}\right) = 0$$

Portanto $p(x) = -\dfrac{1}{x}$. Logo pela Fórmula de Abel temos que

$$W = c \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} = c \cdot e^{\int \left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x} = c \cdot e^{\ln x} = cx.$$

Teorema 2.2.5 (Teorema do Wronkiano). *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções da equação homogênea* (2.2.1) *definidas em (a, b), então seu Wronskiano é:*

$$W(y_1, y_2)(x) \equiv 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

ou

$$W(y_1, y_2)(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Demonstração. Pela Fórmula de Abel temos que

$$W(x) = c \cdot e^{-\int p(x)\, \mathrm{d}x}$$

- Se $c = 0$, então $W \equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$.
- Caso contrário, se $c \neq 0$, $W \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, pois W é uma exponencial e esta nunca se anula.

■

Para resumir a teoria, podemos relacionar todos os resultados sobre **conjunto fundamental de soluções**, **wronskianos** e **independência linear** da seguinte forma: sejam y_1 e y_2 soluções da equação homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

As seguintes quatro afirmações são equivalente:

- As funções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções no intervalo I.
- As funções y_1 e y_2 são linearmente independentes em I.
- $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, para algum $x_0 \in I$.
- $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, para todo $x \in I$.

2.2.3 Exercícios

1. Calcule o Wronskiano dos seguintes pares de funções:

(a) $e^{2t}, \quad e^{-3t/2}$. Resp: $-\frac{7}{2}e^{t/2}$.

(b) $\cos t, \quad \text{sen}\, t$. Resp: 1.

(c) $e^{-2t}, \quad te^{-2t}$. Resp: e^{-4t}.

(d) $e^t \text{ sen}\, t, \quad e^t \cos t$. Resp: $-e^{2t}$.

(e) $\cos^2\theta, \quad 1 + \cos 2\theta$. Resp: 0.

2. Verifique que $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são duas soluções da equação diferencial $t^2y'' - 2y = 0$ para $t > 0$. Então mostre que $y(t) = c_1t^2 + c_2t^{-1}$ é também uma solução desta equação para quaisquer c_1 e c_2.

3. Mostre que $y(x) = c_1 \text{ sen}\, x + c_2 \cos x$ é uma solução geral de $y'' + y = 0$ em algum intervalo . A seguir, ache a solução do PVI para o qual $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$. Resp: $y = 3 \text{ sen}\, x + 2 \cos x$.

4. Verifique que $y_1 = 1$ e $y_2 = x^{1/2}$ são soluções de $yy'' + (y')^2 = 0$, para $x > 0$. Mostrar então que $c_1 + c_2x^{1/2}$ não é em geral solução desta equação. Por que não? Isso contradiz o teorema da existência e unicidade de soluções para equações lineares de segunda ordem? Resp: A equação não é linear.

5. Se o wronskiano W de f e g é $3e^{4x}$ e $f(x) = e^{2x}$, ache $g(x)$. Resp: $3xe^{2x} + ce^{2x}$.

6. Se o wronskiano W de f e g é x^2e^x e $f(x) = x$, ache $g(x)$. Resp: $xe^x + cx$.

7. Se $W(f, g)$ é o wronskiano de f e g e se $u = 2f - g$ e $v = f + 2g$, ache o wronskiano $W(u, v)$ de u e v em termos do wronkiano $W(f, g)$ de f e g. Resp: $5W(f, g)$.

8. Se $W(f, g) = x \cos x - \text{ sen}\, x$, e se $u = f + 3g$ e $v = f - g$, ache o wronskiano $W(u, v)$ de u e v. Resp: $-4(x \cos x - \text{ sen}\, x)$.

9. Em cada uma das alíneas abaixo, verifique que as funções dadas y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial. Elas formam um conjunto fundamental de soluções?

   (a) $y'' + 4y = 0$, $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \text{ sen}\, 2x$. Resp: Sim.

   (b) $y'' - 2y' + y = 0$, $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$. Resp: Sim.

   (c) $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0, \quad x > 0$, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$. Resp: Sim.

10. O wronkiano de duas funções é $W(x) = x \text{ sen}^2 x$. As duas funções são linearmente dependentes ou independentes? Justifique.
    Resp: São linearmente independentes porque o wronkiano não se anula em todo ponto.

11. Ache o wronskiano das duas soluções da equação diferencial dada sem resolvê-la.

    (a) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$. Resp: cx^2e^x.

    (b) $x^2y'' + xy' + (x^2-4)y = 0$. Resp: c/x

12. Mostre que se $p(x)$ é diferenciável e $p(x) > 0$, então o wronskiano de duas soluções de $[p(x)y']' + q(x)y = 0$ é $W(x) = c/p(x)$, onde c é uma constante.

13. Se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes de $xy'' + 2y' + xe^xy = 0$ e se $W(y_1, y_2)(1) = 2$, ache o valor de $W(y_1, y_2)(5)$. Resp: $2/25$

14. Se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes de $x^2y'' - 2y' + (3+x)y = 0$ e se $W(y_1, y_2)(2) = 3$, ache o valor de $W(y_1, y_2)(4)$. Resp: $3\sqrt{e}$.

Aula 2.3

O Método de Redução de Ordem

O Método de Redução de ordem é um método para converter uma equação diferencial linear para uma equação diferencial linear de ordem inferior, e , em seguida construir a solução geral da equação diferencial original usando a solução geral da equação de inferior.

Vamos ilustrar o método de "redução de ordem"para equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem.

Problema: Seja a equação diferencial linear homogênea de ordem 2.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2.3.1}$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são quaisquer funções contínuas definidas no intervalo (a, b). Dadas duas soluções y_1 e y_2 linearmente independentes desta equação, é fácil escrever a sua solução geral:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + y_2(x).$$

Porém, infelizmente não existe um método geral para encontrar estas soluções LI da equação diferencial (2.3.1) no seu caso geral.

Suponha, no entanto, que conhecemos uma das soluções y_1 da equação homogênea. O que podemos fazer para encontrar uma segunda solução y_2 tal que o conjunto $\{y_1, y_2\}$ seja um conjunto fundamental de soluções?

Apresentamos dois métodos:

2.3.1 Método 1: Usando a Fórmula de Abel

Neste método escrevemos o Wronskiano $W[y_1, y_2]$ em 2 maneiras:

(1) Pela definição: $W[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_2 y_1'$

(2) Pela Fórmula de Abel: $W[y_1, y_2] = ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$

Igualando as duas teremos uma equação diferencial de primeira ordem de y_2 que podemos resolver. Veremos este procedimento no seguinte exemplo:

Exemplo 2.3.1. *Seja $y_1 = x$ uma solução da equação diferencial homogênea de segunda ordem*

$$x^2 y'' + xy' - y = 0, \quad x > 0.$$

Encontre a a sua solução geral.

Solução: Primeiramente, dividimos a equação diferencial por x^2:

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$$

Seja y_2 a outra solução linearmente independente com y_1.

- Pela definição do Wronskiano

$$W[y - 1, y_2] = y_1 y_2' - y_2 y_1' = x y_2' - y_2$$

- Pela Fórmula de Abel

$$W[y_1, y_2] = ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} = ce^{-\int \left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x} = ce^{-\ln x} = \frac{c}{x} = \frac{1}{x} \quad \text{(fazendo } c = 1\text{)}$$

Igualando os dois valores do Wronskiano temos a equação diferencial linear de 1ª ordem

$$x y_2' - y_2 = \frac{1}{x} \rightarrow \; y_2' - \frac{1}{x} y_2 = \frac{1}{x^2}$$

Equação é linear.
Fator integrante: $e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} = e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$
Multiplicando a equação pelo fator integrante temos

$$\underbrace{\frac{1}{x} y_2' - \frac{1}{x^2} y_2}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x} y_2\right)} = \frac{1}{x^3}$$

Portanto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}y_2\right) = \frac{1}{x^3}$$

Integrando temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}y_2 &= \int (x^{-3})\,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \frac{1}{x}y_2 &= -\frac{1}{2x^2} \\ \Rightarrow y_2 &= -\frac{1}{2x} \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é:

$$y = y = c_1 x + c_2 \frac{1}{2x}$$

2.3.2 Método 2: D'Alembert

Seja $y_1(x)$ uma solução de (2.3.1) diferente de zero e assim, cy_1 é também uma solução de (2.3.1) para qualquer constante c_1.

Procuramos a segunda solução y_2 de tal forma a garantir a independência linear das duas soluções y_1 e y_2, isto é, que $y_2/y_1 \neq$ *constante*. Daí, existe uma função $v(x)$ tal que $y_2/y_1 = v(x)$ e a solução y_2 será escrita na forma:

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

Precisamos então determinar $v(x)$ de tal forma que $y_2 = vy_1$ seja solução da equação (2.3.1). Veremos este procedimento no seguinte exemplo:

Exemplo 2.3.2. *Seja $y_1 = x$ uma solução da equação diferencial homogênea de segunda ordem*

$$x^2y'' + xy' - y = 0, \;\; x > 0$$

Encontre a a sua solução geral.

Solução: Primeiramente, dividimos a equação diferencial por x^2: $y'' + (1/x)y' - (1/x^2)y = 0$.

Fazendo $y_2 = vy_1$, uma solução da equação diferencial, substituímos y_2 e suas derivadas na equação:

$$y_2 = vy_1 \Rightarrow y_2' = v'y_1 + vy_1' \Rightarrow y_2'' = v''y_1 + v'y_1 + v'y_1 + vy_1''.$$

Substituindo $y_1 = x$, $y_1' = 1$ e $y_1'' = 0$ na equação acima, temos:

$$y_2 = vx \Rightarrow y_2' = v'x + v \Rightarrow y_2'' = v''x + 2v'x.$$

Finalmente, substituindo agora y_2 e suas derivadas na equação: diferencial $y'' + (1/x)y' - (1/x^2)y = 0$, temos:

$$v''x + 2v' + \frac{1}{x}(v'x + v) - \frac{1}{x^2}vx = 0 \quad \Rightarrow \quad xv'' + 2v' + v' + \frac{v}{x} - \frac{v}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v'' + \frac{3}{x}v' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(v')'}{v'} = -\frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{(v')'}{v'}dx = -\int \frac{3}{x}dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln v' = \ln x^{-3} \quad \Rightarrow \quad v' = x^{-3} \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2x^2} \quad \Rightarrow \quad y_2 = -\frac{1}{2x}.$$

Logo, a solução geral é $y = c_1 x + c_2 \frac{1}{2x}$.

2.3.3 Exercícios

1. Em cada problema abaixo, ache uma segunda solução da equação diferencial dada, conhecendo uma solução.

   (a) $x^2y'' + 3xy' - y = 0, x > 0, \quad y_1(x) = x^{-1}.$ Resp: $y_2 = \frac{\ln x}{x}$

   (b) $(x-1)y'' - xy' + y = 0, x > 1, \quad y_1(x) = e^x.$ Resp: $y_2 = x.$

   (c) $y'' + 5y' = 0; \quad y_1 = 1.$ Resp: $y = \frac{1}{5}e^{-5x}$

   (d) $y'' - y' = 0; \quad y_1 = 1.$ Resp: $y = e^x$

   (e) $y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y_1 = e^{2x}.$ Resp: $y = xe^{2x}$

   (f) $y'' + 16y = 0; \quad y_1 = \cos 4x.$ Resp: $y = \operatorname{sen} 4x$

   (g) $y'' - y = 0; \quad y_1 = \cosh x.$ Resp: $y = \cosh x\left(\frac{\ln(1+e^x)+1}{1+e^x}\right)$

   (h) $9y'' - 12y' + 4y = 0; \quad y_1 = e^{2x/3}.$ Resp: $y = xe^{\frac{2}{3}x}$

   (i) $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0; \quad y_1 = x^4.$ Resp: $y = x^4 \ln x$

   (j) $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1+x)y' - 2y = 0; \quad y_1 = x + 1.$ Resp: $y = x^2 + x + 2$

Aula 2.4

Equações diferenciais lineares homogêneas de coeficientes constantes de segunda ordem

Vamos agora estudar as equações homogêneas (2.3.1) com coeficientes constantes, isto é, $p(x) = a$ e $q(x) = b$, onde a e b são constantes:

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{2.4.1}$$

Observe que a função exponencial $e^{\lambda x}$ tem a propriedade de que suas derivadas são todas constantes multiplicadas por si própria. Isto nos faz considerar a função $y = e^{\lambda x}$ como uma possível solução de (2.4.1) se λ por convenientemente escolhida.

2.4.1 Determinando o valor de λ

Fazendo $y = e^{\lambda x}$ solução da equação e substituindo y e suas derivadas $y' = \lambda e^{\lambda x}$ e $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ na equação diferencial (2.4.1), temos:

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} &= 0 \\ \Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda^2 + a\lambda + b &= 0. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Observe que a função exponencial $e^{\lambda x}$ nunca se anula. A equação (2.4.2) é chamada de equação característica associada à equação diferencial (2.4.1). Para acharmos o valor de λ, basta resolver a equação característica.

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{2.4.3}$$

Podemos ter três casos para os valores de λ:

- Caso 1: as raízes são reais e distintas.
- Caso 2: as raízes são complexas.
- Caso 3: as raízes são reais e iguais

2.4.1.1 Caso 1: raízes reais e distintas

Se as raízes da equação característica λ_1 e λ_2 são reais e distintas, as soluções da equação diferencial serão:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \qquad \text{e} \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{2.4.4}$$

Observação: É fácil ver que estas duas soluções y_1 e y_2 são linearmente independentes uma vez que

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1 x}} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq \text{ constante.}$$

Logo, a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{2.4.5}$$

Exemplo 2.4.1. *Resolva o seguinte problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0, \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solução: A equação característica é $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ cuja solução é: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. Desta forma, a solução geral é:

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}.$$

Substituindo as condições iniciais, temos:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos: $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ e a solução do PVI é: $y(x) = e^x$.

2.4.1.2 Caso 2: raízes complexas conjugadas

Neste caso, as raízes podem ser escritas na forma:

$$\lambda_1 = r + i\theta \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = r - i\theta,$$

onde i é o número imaginário. Assim,

$$e^{(r+i\theta)x} = e^{rx}\, e^{i\theta x} = e^{rx}\,(\cos\theta x + i \operatorname{sen}\theta x).$$

Note que a expressão $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ é conhecida como **fórmula de Euler**. De forma análoga:

$$e^{(r-i\theta)x} = e^{rx}\, e^{-i\theta x} = e^{rx}\,(\cos\theta x - i \operatorname{sen}\theta x).$$

Como estamos interessados apenas em soluções reais e

$$e^{(r+i\theta)x} = e^{rx}\,(\cos\theta x + i \operatorname{sen}\theta x)$$

$$e^{(r-i\theta)x} = e^{rx}\,(\cos\theta x - i \operatorname{sen}\theta x),$$

então podemos obter y_1 e y_2 da seguinte forma:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{e^{(r+i\theta)x} + e^{(r-i\theta)x}}{2} = e^{rx}\cos\theta x. \\ \\ y_2 = \dfrac{e^{(r+i\theta)x} - e^{(r-i\theta)x}}{2} = e^{rx}\operatorname{sen}\theta x. \end{cases}$$

e a solução geral é:

$$y(x) = c_1 e^{rx}\cos\theta x + c_2 e^{rx}\operatorname{sen}\theta x. \tag{2.4.6}$$

Exemplo 2.4.2. *Resolva o seguinte problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} 2y'' - 4y' + 8y = 0, \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solução: A equação característica é $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$ cuja solução é: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Neste caso, a solução geral é:

$$y(x) = c_1 e^x \cos \sqrt{3}x + c_2 e^x \operatorname{sen} \sqrt{3}x.$$

Substituindo as condições iniciais, temos:

$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_1 + c_2\sqrt{3} = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos: $c_1 = 1$ e $c_2 = -1/\sqrt{3}$. Daí, a solução do PVI é:

$$y(x) = e^x \cos \sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}} e^x \operatorname{sen} \sqrt{3}x.$$

2.4.1.3 Caso 3: raízes reais e iguais

Neste caso, a única raiz repetida da equação característica é $\lambda = -a/2$ e assim, teremos apenas uma solução:

$$y = e^{-ax/2}.$$

Precisamos determinar uma segunda solução y_2 que seja linearmente independente com a primeira. Como já vimos antes, fazemos $y_2 = v(x)y_1$ e encontramos a segunda solução.

Exercício 2.4.1. *Prove que a segunda solução é* $y_2 = xe^{-ax/2}$.

Exemplo 2.4.3. *Resolva o seguinte problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0, \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 7 \end{cases}$$

Solução: A equação característica é $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ cuja solução é: $\lambda = -2$ com multiplicidade 2. Daí, a solução geral é:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

Substituindo as condições iniciais, temos:

$$\begin{cases} c_1 = -2, \\ -2c_1 + c_2 = 7 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos: $c_1 = -2$ e $c_2 = 3$. Daí, a solução do PVI é:

$$y(x) = -2e^{-2x} + 3xe^{-2x}.$$

2.4.2 Equação de Euler-Cauchy de segunda ordem

As equações de Euler-Cauchy de segunda ordem são equações diferenciais do tipo:

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0 \tag{2.4.7}$$

No ponto $x = 0$, o termo $a_2 x^2 y''$ da equação (2.4.7) se anula e por esse razão dizemos que $x = 0$ é um ponto singular para a equação de Euler-Cauchy. Qualquer solução de (2.4.7) estará definida para $x > 0$ ou para $x < 0$.

O método para resolver a equação de Euler-Cauchy tem como principio a mudança de variável

$$x = e^t$$

que transforma a equação numa equação diferencial linear com **coeficientes constantes** nas variáveis y e t.

- $x = e^t \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^t = x$

- Pela regra da cadeia,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

  ou

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{2.4.8}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ &= \left(x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot x = x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \tag{2.4.9}$$

Substituindo equações (11.8) e (11.9) em (2.4.7) temos

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(a_1-a_2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_0y=0. \tag{2.4.10}$$

que é uma equação diferencial de coeficientes constantes.

Exemplo 2.4.4. *Resolva*

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0.$$

Solução: A equação é do tipo Euler-Cauchy, logo fazemos a mudança $x = e^t$ ou $t = \ln x$, e transformará a equação para

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=0$$

Eqn. característica:

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \ \lambda_2=2$$

Portanto a solução geral é

$$y=c_1e^t+c_2e^{2t}=c_1x+c_2x^2$$

pois $x = e^t$.

2.4.3 Exercícios

1. Ache a solução geral de cada uma das equações diferenciais abaixo:

   (a) $y'' + 2y' - 3y = 0$. Resp: $y = c_1e^x + c_2e^{-3x}$.

(b) $y'' - 2y' + 10y = 0$. Resp: $y = c_1 e^t \cos 3t + c_2 e^t \operatorname{sen} 3t$.

(c) $6y'' - y' - y = 0$. Resp: $y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x/3}$.

(d) $y'' + 6y' + 13y = 0$. Resp: $y = c_1 e^{-3x} \cos 2x + c_2 e^{-3x} \operatorname{sen} 2x$.

(e) $y'' + 5y' = 0$. Resp: $y = c_1 + c_2 e^{-5x}$.

(f) $2y'' + 2y' + y = 0$. Resp: $y = c_1 e^{-x/2} \cos(x/2) + c_2 e^{-x/2} \operatorname{sen}(x/2)$.

(g) $4y'' + 9y = 0$. Resp: $y = c_1 \cos(3x/2) + c_2 \operatorname{sen}(3x/2)$.

2. Ache a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
Resp: $y = e^t$

(b) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
Resp: $y = 2xe^{3x}$.

(c) $y'' + y = 0$, , $y(\pi/3) = 2$ e $y'(\pi/3) = -4$.
Resp: $(1 + 2\sqrt{3}) \cos x - (2 - \sqrt{3}) \operatorname{sen} x$.

(d) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$.
Resp: $y = -1 - e^{-3t}$.

(e) $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.
Resp: $y = \frac{1}{10} e^{-9(x-1)} + \frac{9}{10} e^{x-1}$.

(f) $9y'' - 12y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.
Resp: $y = 2e^{2x/3} - \frac{7}{3} xe^{2x/3}$.

(g) $y'' + y' + 1.25y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.
Resp: $y = 3e^{-x/2} \cos x + \frac{5}{2} e^{-x/2} \operatorname{sen} x$

3. Ache a equação diferencial cuja solução geral é $y(x) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$.
Resp: $y'' + y' - 6y = 0$.

4. Ache a equação diferencial cuja solução geral é $y(x) = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-2t}$.
Resp: $2y'' + 5y' + 2y = 0$.

5. Considere o problema de valor inicial:

$$4y'' + 12y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4.$$

(a) Ache a solução deste problema. Resp: $y = e^{-3x/2} - \frac{5}{2}xe^{-3x/2}$.

(b) Determine onde a solução é zero. Resp: $x = 2/5$.

(c) Determine as coordenadas (x_0, y_0) do ponto de mínimo.Resp: $x_0 = 16/15$ e $y_0 = -\frac{5}{3}e^{-8/5}$.

(d) Mude a segunda condição inicial para $y'(0) = b$ e ache a solução como uma função de b. A seguir, ache o valor crítico de b que separa a solução na sua parte positiva da parte que pode ser negativa. Resp: $y = e^{-3x/2} + (b + 3/2)xe^{-3x/2}$

6. Ache a solução do problema de valor inicial

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = \frac{5}{4}, \qquad y'(0) = -\frac{3}{4}.$$

Calcule o seu valor mínimo no intervalo $0 < t < 2$.
Resp: $y = \frac{1}{4}e^t + e^{-t}$. Mínimo é $y = 1$ em $t = \ln 2$.

7. Ache a solução do problema de valor inicial

$$2y'' - 3y' + y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

Calcule o seu valor máximo e o ponto onde a função se anula.
Resp: $y = -e^t + 3e^{t/2}$. Máximo é $y = \frac{9}{4}$ em $t = \ln(9/4)$ e $y = 0$ em $t = \ln 9$.

8. Considere o problema de valor inicial:

$$4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

(a) Ache a solução deste problema.
Resp: $y = e^{-x/2} + \frac{5}{2}xe^{-x/2}$.

(b) Determine as coordenadas (t_0, y_0) do ponto de máximo.
Resp: $x_0 = 8/5$ e $y_0 = 5e^{-4/5}$.

(c) Mude a segunda condição inicial para $y'(0) = b > 0$ e ache a solução dependente de b.
Resp: $y = e^{-x/2} + \frac{2b+1}{2}xe^{-x/2}$.

(d) Determine as coordenadas (t_M, y_M) do ponto de máximo em termos de b. Descreve como os valores de t_M e y_M quando b cresce.
Resp: $x_M = \dfrac{4b}{2b+1}$, $y_M = (1+2b)e^{-2b/(2b+1)}$. $x_M \longrightarrow 2$ e $y_M \longrightarrow \infty$ quando $b \longrightarrow \infty$.

9. Ache a solução do problema de valor inicial

$$y'' - y' - 2y = 0, \qquad y(0) = \alpha, \qquad y'(0) = 2.$$

Ache o valor de α para que a solução tenda a zero quando t tende a infinito.
Resp: $\alpha = -2$

10. Ache a solução do problema de valor inicial

$$4y'' - y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = \beta.$$

Ache o valor de β para que a solução tenda a zero quando t tende a infinito.
Resp: $\beta = -1$.

11. Considere o problema de valor inicial:

$$y'' + 2y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \alpha \geq 0.$$

(a) Ache a solução deste problema.
Resp: $y = e^{-x}(2\cos\sqrt{5}x + \dfrac{\alpha+2}{5}\operatorname{sen}\sqrt{5}x)$.

(b) Ache α para que $y = 0$ quando $t = 1$.
Resp: $\alpha \approx 1.5086$.

(c) Ache, como uma função de α, o menor valor positivo de x para o qual $y = 0$.
Resp: $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}(-\dfrac{2\sqrt{5}}{\alpha+2})$.

(d) Determine o limite da expressão da alínea (c) quando $\alpha \longrightarrow \infty$. Resp: $x = \pi/\sqrt{5}$.

12. Para cada uma das equações diferenciais abaixo, determine:

(a) O valor de α, se existir, para o qual todas as soluções tendem a zero quando $t \longrightarrow \infty$.

(b) O valor de α, se existir, para o qual todas as soluções não nulas se tornem ilimitadas quando $t \longrightarrow \infty$.

i $y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha - 1)y = 0$.

Resp: $y \longrightarrow 0$ para $\alpha < 0$. y se torna ilimitado para $\alpha > 1$.

ii $y'' + (3 - \alpha)y' - 2(\alpha - 1)y = 0$.

Resp: $y \longrightarrow 0$ para $\alpha < 1$. Não existe α para o qual a solução se torna ilimitada.

13. (**Redução à primeira ordem.**) Faça a substituição $u = y'$ nas equações diferenciais abaixo e, a seguir, resolva-as.

(a) $x^2y'' + 2xy' - 1 = 0$, $x > 0$.

Resp: $y = c_1x^{-1} + c_2 + \ln x$.

(b) $xy'' + y' = 1$, $x > 0$.

Resp: $y = c_1 \ln x + c_2 + x$.

(c) $y'' + x(y')^2 = 0$.

Resp: $y(x) = \dfrac{2}{c_2} \operatorname{arctg}(x/c_2) + c_1$.

(d) $y'' + y' = e^{-t}$.

Resp: $y(x) = e^{-x}(-c_1 - x - 1) + c_2$

14. (a) Considere a equação $y''+2ay'+a^2y = 0$. Mostre que as raízes da equação característica são $\lambda_1 = \lambda_2 = -a$. Portanto, uma solução é $y_1 = e^{-ax}$.

(b) A teoria do Wronskiano nos diz que

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 = c_1e^{-2ax},$$

onde c_1 é uma constante.

(c) Use a alínea anterior para mostrar que a segunda solução é $y_2(x) = xe^{-ax}$.

15. Encontre a solução geral das seguintes equações de Euler-Cauchy:

(a) $4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$ Resp: $y = c_1x^{1/2} + c_2x^{3/2}$

(b) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6x\dfrac{dy}{dx} = 0$ Resp: $y = c_1 + c_2x^7$

(c) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ Resp: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^2$

(d) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ Resp: $y = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(2 \ln x)$

Aula 2.5

Equações diferenciais lineares não-homogêneas de segunda ordem

Considere a equação diferencial linear não-homogêneas de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{2.5.1}$$

onde $g(x) \neq 0$.

Teorema 2.5.1. *Suponha que $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ são duas soluções de* (2.5.1) *então suas diferenças*

$$Y(x) = Y_1(x) - Y_2(x)$$

é uma solução da equação homogênea correspondente

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2.2.1}$$

Se, além disso, y_1 e y_2 forma um conjunto fundamental de soluções de (2.2.1), *então*

$$Y_1(x) - Y_2(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

Demonstração. Vamos provar que $Y(x) = Y_1(x) - Y_2(x)$ é uma solução de (2.2.1):

$$\begin{aligned} Y'' + p(x)Y' + q(x)Y &= Y_1'' - Y_2'' + p(x)\left(Y_1' - Y_2'\right) + q(x)\left(Y_1 - Y_2\right) \\ &= \left(Y_1'' + p(x)Y_1' + q(x)Y_1\right) - \left(Y_2'' + p(x)Y_2' + q(x)Y_2\right) \\ &= g(x) - g(x) = 0 \end{aligned}$$

Portanto $Y_1(x) - Y_2(x)$ é uma solução de (2.2.1) e como $\{y_1, y_2\}$ forma um conjunto fundamental de soluções de (2.2.1) temos que

$$Y_1(x) - Y_2(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

■

Teorema 2.5.2 (Teorema da solução geral). *Dado uma solução $y_p(x)$ da equação diferencial não-homogênea*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad (2.5.1)$$

então a solução geral da equação (2.5.1) *é da forma*

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (2.5.2)$$

onde y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial homogênea correspondente

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (2.2.1)$$

Demonstração. Sejam $y(x)$ e $y_p(x)$ duas soluções de (2.5.1) então pelo Teorema 2.5.1 temos que

$$y(x) - y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Portanto

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

■

Observação. *Chamamos $y_c = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ a solução complementar e $y_p(x)$ uma solução particular. Portanto a solução geral da equação* (2.5.1) *é da forma*

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

Isto é, para determinar a solução geral da equação linear não-homogênea (2.5.1)*, seguimos os 3 passos:*

1. *Determine a solução geral $y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ da equação homogênea correspondente* (2.2.1).

2. *Determine uma solução particular $y_p(x)$ da equação diferencial não-homogênea* (2.5.1).

3. *Escreve a solução geral de* (2.5.1)

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

2.5.1 Soluções particulares

As duas próximas seções vamos discutir duas métodos para determinar uma solução particular y_p da equação diferencial linear não homogênea de segunda ordem.

2.5.1.1 Método de Variação de parâmetros

Considere a equação diferencial linear não-homogêneas de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad (2.5.1)$$

onde $g(x) \neq 0$.

O método inicia-se supondo conhecidas duas soluções linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da equação homogênea associada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (2.2.1)$$

Hipótese: Procuramos uma solução particular da equação (2.5.1) da forma:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \qquad (2.5.3)$$

onde $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são funções a determinar, satisfazendo a

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{2.5.4}$$

Derivando (2.5.3) temos

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ &= u_1y_1' + u_2y_2' \quad \text{usando (2.5.4)} \end{aligned}$$

Derivando y_p' temos

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$

Substituindo $y_p,\ y_p'$ e y_p'' na equação (2.5.1) e efetuando algumas simplificações obtemos

$$u_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + u_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] + u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x)$$

e como y_1 e y_2 são soluções da (2.2.1), as expressões entre colchetes na última igualdade são iguais a zero e portanto

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = g(x) \tag{2.5.5}$$

Juntando as equações (2.5.4) e (2.5.5) temos o sistema linear nas variáveis u_1' e u_2' :

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1 + u_2'y_2 = g(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}$$

Usando a Regra de Cramer deduzimos que

$$u_1' = \frac{-y_2g(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2} = \frac{-y_2g(x)}{W(y_1, y_2)} \tag{2.5.6}$$

$$u_2' = \frac{y_1g(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2} = \frac{y_1g(x)}{W(y_1, y_2)} \tag{2.5.7}$$

onde $W(y_1, y_2)$ é o Wronskiano das funções y_1 e y_2, que por hipótese é diferente de zero.
Podemos determinar as duas funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ integrando os resultados em (12.6) e (12.7).

Resumo do Método:

Para resolver $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$

(1) Encontre o conjunto fundamental de soluções $\{y_1, y_2\}$ da equação homogênea associada. Portanto a solução complementar é $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$

(2) Calcule o Wronskiano $W(y_1, y_2)$

(3) Determine u_1 e u_2, integrando os resultados em (12.6) e (12.7).

(4) Uma solução particular é $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$.

Exemplo 2.5.1. *Resolve a equação*

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \text{ sen } x$$

Solução:

- Determine duas soluções l.i na equação homogênea:
  Equação característica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$.
  Portanto $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{2x}$ e a função complementar é

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

- $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x}$

- Observe que $g(x) = e^x \text{ sen } x$. Agora

$$u_1' = \frac{-y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{-e^{3x} \text{ sen } x}{e^{3x}} = -\text{ sen } x.$$

  Integrando temos que $u_1(x) = \cos x$.

$$u_2' = \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{e^{2x} \text{ sen } x}{e^{3x}} = e^{-x} \text{ sen } x.$$

  Integrando temos que $u_2(x) = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \text{ sen } x)$.

- Uma solução particular é dada por

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= e^x \cos x - \frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)e^{2x} \\ &= e^x \cos x - \frac{1}{2}e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{1}{2}e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

Portanto a solução é

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Exemplo 2.5.2. *Use o método de variação de parâmetros para achar a solução geral da equação de Euler-Cauchy*

$$x^2 y'' + xy' + y = \sec(\ln x), \quad x > 0.$$

Solução: Equação é do tipo Euler-Cauchy, logo fazendo a mudança $x = e^t$, transformará a equação para a forma

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = \sec(t) \tag{2.5.8}$$

- Determine duas soluções L.I da equação homogênea associada a equação (12.8).
  Equação característica: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$. Portanto as duas soluções L.I são

$$y_1 = \cos t \quad \text{e} \quad y_2 = \operatorname{sen} t$$

- $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$

- Observe que $g(t) = \sec(t)$. Agora

$$u_1' = \frac{-y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} = \frac{-\operatorname{sen}(t)\sec(t)}{1} = -\operatorname{tg}(t).$$

  Integrando temos que $u_1(t) = \ln(\sec(t))$.

$$u_2' = \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{\cos(t)\sec(t)}{1} = 1.$$

  Integrando temos que $u_2(t) = t$.

- Uma solução particular é dada por

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= \ln(\sec(t)) \cdot \cos(t) + t \cdot \operatorname{sen}(t) \\ &= \ln(\sec(\ln x)) \cdot \cos(\ln x) + \ln x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) \end{aligned}$$

Portanto a solução é

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x) + \ln(\sec(\ln x)) \cdot \cos(\ln x) + \ln x \cdot \operatorname{sen}(\ln x)$$

Exemplo 2.5.3. *Considere a equação diferencial*

$$(1-x)y'' + xy' - y = 1 - x$$

(a) Verifique se $y_1 = e^x$ e $y_2 = x$ são soluções da equação homogênea correspondente.

(b) Use o método de variação de parametros para determinar a solução geral da equação não homogênea.

Solução:

(a) y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea associada pois

$$(1-x)y_1'' + xy_1' - y_1 = (1-x)(e^x) + x(e^x) - e^x = 0$$

$$(1-x)y_2'' + xy_2' - y_2 = (1-x)(0) + x(1) - x = 0$$

Portanto y_1 e y_2 são duas soluções.

(b) O Wronskiano de y_1 e y_2 :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = -e^x - xe^x = (1-x)e^x$$

Para use o método de variação de parâmetros colocamos a equação na forma padrão dividendo por $(1-x)$ e temos

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 1.$$

O método de variação de parâmetros fornece uma solução particular da forma $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ onde

$$u_1' = \frac{-y_2g(t)}{W(y_1, y_2)} = \frac{-x}{(1-x)e^x} = \frac{1-x-1}{(1-x)e^x} = e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Integrando temos que $u_1(x) = -e^{-x} + \int \frac{e^{-x}}{x-1}\mathrm{d}x$ (este integral não tem uma forma fechada)

$$u_2' = \frac{y_1g(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{e^x}{(1-x)e^x} = \frac{1}{1-x}.$$

Integrando temos que $u_2(x) = -\ln(1-x)$.

Uma solução particular é dada por

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= \left(-e^{-x} + \int \frac{e^{-x}}{x-1}\mathrm{d}x\right)\cdot e^x - \ln(1-x)\cdot x \\ &= -1 + e^x\int \frac{e^{-x}}{x-1}\mathrm{d}x - x\ln(1-x) \end{aligned}$$

Portanto a solução geral é

$$y = c_1e^x + c_2x - 1 + e^x\int \frac{e^{-x}}{x-1}\mathrm{d}x - x\ln(1-x)$$

Observação. *O Exemplo 2.5.3 mostrou que em usando o método de variação de parâmetros podemos encontrar integrais muito difíceis de resolver. Além disso, determinar as soluções y_1 e y_2 da equação homogênea com coeficientes variáveis também pode ser uma tarefa muito árdua.*

2.5.1.2 Método de Coeficientes a determinar

O método de coeficientes a determinar é um método para determinar a solução particular y_p da equação diferencial linear não-homogêneas de coeficientes constantes

$$y'' + py' + qy = g(x) \tag{2.5.9}$$

quando $f(x)$ tem a forma especial, envolvendo somente polinômios, exponenciais, senos e cossenos.

1º Caso: Quando a função $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Admitiremos como solução particular a função

$$y_p(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n$$

Modificação: Se alguma parcela de y_p coincide com termos de y_c então esse y_p deverá ser multiplicado por x^s onde s é o menor inteiro positivo que elimina essa coincidência.

Exemplo 2.5.4.

(a) Determine o solução geral da equação $y'' - 5y' + 6 = 2x^2 - 1$

(b) Resolve o problema de valor inicial $y'' + 2y' = 12x^2, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1.$

Solução:

(a) $y'' - 5y' + 6 = 2x^2 - 1$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \Rightarrow y_1 = e^{2x} \\ \text{e} \\ \lambda_2 = 3 \Rightarrow y_2 = e^{3x} \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = 2x^2 - 1$, assumimos a solução particular

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Como nenhum termo de y_p coincide com termos de y_c, não precisamos modificar y_p.
Para determinar os constantes A, B, C, substituirmos y_p na equação diferencial:

$$y_p' = 2Ax + B, \qquad y_p'' = 2A$$

Substituindo na equação temos que

$$\begin{aligned} 2A - 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) &= 2x^2 - 1 \\ \Rightarrow (6A)x^2 + (6B - 10A)x + (2A - 5B + 6C) &= 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes temos que

$$\begin{cases} 6A = 2 \quad \Rightarrow A = \dfrac{1}{3} \\ 6B - 10A = 0 \quad \Rightarrow B = \dfrac{10A}{6} = \dfrac{5}{9} \\ 2A - 5B + 6C = -1 \quad \Rightarrow C = \dfrac{-1 - 2A + 5B}{6} = \dfrac{5}{27} \end{cases}$$

Portanto

$$y_p = \frac{x^2}{3} + \frac{5x}{9} + \frac{5}{27}$$

Solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{x^2}{3} + \frac{5x}{9} + \frac{5}{27} \end{aligned}$$

(b) $y'' + 2y' = 12x^2$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{0x} = 1 \\ \text{e} \\ \lambda_2 = -2 \Rightarrow y_2 = e^{-2x} \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1 + c_2 e^{-2x}$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = 12x^2$, assumimos a solução particular

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Mas temos um termo constante em y_p e um termo constante em y_c, logo modificamos y_p pela multiplicamos por x assim eliminamos o termo constante. Portanto a expressão coreto de y_p é

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Para determinar os constantes A, B, C, substituirmos y_p na equação diferencial:

$$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y_p'' = 6Ax + 2B$$

Substituindo na equação temos que

$$\begin{aligned} 6Ax + 2B + 2(3Ax^2 + 2Bx + C) &= 12x^2 \\ \Rightarrow (6A)x^2 + (6A + 4B)x + (2B + 2C) &= 12x^2 \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes temos que

$$\begin{cases} 6A = 12 & \Rightarrow A = 2 \\ 6A + 4B = 0 & \Rightarrow B = -\dfrac{6A}{4} = -3 \\ 2B + 2C = 0 & \Rightarrow C = -B = 3 \end{cases}$$

Portanto

$$y_p = 2x^3 - 3x^2 + 3x$$

Solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 + c_2e^{-2x} + 2x^3 - 3x^2 + 3x \end{aligned}$$

Agora usamos as condições inciais para determinar c_1 e c_2 :

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-2x} + 2x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow y'(x) = -2c_2e^{-2x} + 6x^2 - 6x + 3$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0$$
$$y'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad -2c_2 + 3 = 1$$

Resolvendo temos que $c_1 = -1$ e $c_2 = 1$. Portanto a solução do PVI é

$$y = -1 + e^{-2x} + 2x^3 - 3x^2 + 3x$$

2º Caso: Quando a função $g(x) = e^{kx}$.

Admitiremos como solução particular a função

$$y_p(x) = Ae^{kx}$$

Modificação: Se y_p é uma das soluções de y_c então esse y_p deverá ser multiplicado por x^s onde s é o menor inteiro positivo que elimina essa coincidência.

Exemplo 2.5.5.

(a) Determine a solução geral da equação $y'' - 7y' + 12y = 3e^{-x}$

(b) Determine a solução geral da equação $y'' - 7y + 10y = 8e^{2x}$

(c) Resolve o problema de valor inicial $y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 5$

Solução:

(a) $y'' - 7y' + 12y = 3e^{-x}$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \Rightarrow y_1 = e^{3x} \\ \text{e} \\ \lambda_2 = 4 \Rightarrow y_2 = e^{4x} \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1e^{3x} + c_2e^{4x}$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = 3e^{-x}$, assumimos a solução particular

$$y_p = Ae^{-x}.$$

Como y_p é uma das parcelas de y_c, não precisamos modificar y_p.
Para determinar o constante A substituirmos y_p na equação diferencial:

$$y_p' = -Ae^{-x}, \qquad y_p'' = Ae^{-x}$$

Substituindo na equação temos que

$$\begin{aligned} Ae^{-x} + 7Ae^{-x} + 12Ae^{-x} &= 3e^{-x} \\ \Rightarrow 20Ae^{-x} &= 3e^{-x} \\ \Rightarrow A &= \frac{3}{20} \end{aligned}$$

Portanto

$$y_p = \frac{3}{20}e^{-x}$$

Solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1e^{3x} + c_2e^{4x} + \frac{3}{20}e^{-x} \end{aligned}$$

(b) $y'' - 7y' + 10y = 8e^{2x}$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \Rightarrow y_1 = e^{2x} \\ \text{e} \\ \lambda_2 = 5 \Rightarrow y_2 = e^{5x} \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{5x}$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = 8e^{2x}$, assumimos a solução particular

$$y_p = Ae^{2x}.$$

Mas temos que y_p coincide com uma das parcelas de y_c, logo modificamos y_p pela multiplicamos por x assim eliminamos este coincidência. Portanto a expressão coreto de y_p

é

$$y_p = Axe^{2x}$$

Para determinar os constantes A substituirmos y_p na equação diferencial:

$$y_p' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}, \qquad y_p'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

Substituindo na equação temos que

$$\begin{aligned} 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 7Ae^{2x} - 14Axe^{2x} + 10Axe^{2x} &= 8e^{2x} \\ \Rightarrow -3Ae^{2x} &= 8e^{2x} \\ \Rightarrow A &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Portanto

$$y_p = -\frac{8}{3}xe^{2x}$$

Solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1e^{2x} + c_2e^{5x} + 2x^3 - \frac{8}{3}xe^{2x} \end{aligned}$$

(c) $y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \Rightarrow y_1 = e^{2x} \\ \text{e} \\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_2 = xe^{2x} \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = 8e^{2x}$, assumimos a solução particular

$$y_p = Ae^{2x}.$$

Mas temos que y_p coincide com uma das parcelas de y_c, logo modificamos y_p pela multi-

plicamos por x e temos

$$y_p = Axe^{2x}$$

Observamos que o modificado y_p ainda coincide com uma das parcelas de y_c, então multiplicamos de novo por x e assim eliminamos este coincidência. Portanto a expressão coreto de y_p é

$$y_p = Ax^2e^{2x}$$

Para determinar os constantes A substituirmos y_p na equação diferencial:

$$y_p' = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}, \qquad y_p'' = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 8Ax^2e^{2x}$$

Substituindo na equação temos que

$$\begin{aligned} 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} - 4(2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}) + 4Ax^2e^{2x} &= 8e^{2x} \\ \Rightarrow 2Ae^{2x} &= 8e^{2x} \\ \Rightarrow A &= 4 \end{aligned}$$

Portanto

$$y_p = 4x^2e^{2x}$$

Solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + 4x^2e^{2x} \end{aligned}$$

Agora usamos as condições inciais para determinar c_1 e c_2 :

$$y(x) = (c_1 + c_2x + 4x^2)e^{2x} \Rightarrow y'(x) = (c_2 + 8x)e^{2x} + 2(c_1 + c_2x + 4x^2)e^{2x}$$

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\Rightarrow c_1 = 1 \\ y'(0) = 5 &\Rightarrow 2c_1 + c_2 = 5 \end{aligned}$$

Resolvendo temos que $c_1 = 1$ e $c_2 = 3$. Portanto a solução do PVI é

$$y = (1 + 3x + 4x^2)e^{2x}$$

3º caso: Quando a função $g(x) =$ sen (kx) **ou** cos (kx)**.**

Admitiremos como solução particular a função

$$y_p(x) = A \text{ sen } (kx) + B \cos (kx)$$

Modificação: Se alguma parcela de y_p coincide com termos de y_c então esse y_p deverá ser multiplicado por x^s onde s é o menor inteiro positivo que elimina essa coincidência.

Exemplo 2.5.6. *Resolver as seguintes equações:*

(a) $y'' - 4y' + 3y = 3 \text{ sen } (2x)$

(b) $y'' + y = 4 \text{ sen } x$

Solução:

(a) $y'' - 4y' + 3 = 3 \text{ sen } (2x)$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \Rightarrow y_1 = e^x \\ \text{e} \\ \lambda_2 = 3 \Rightarrow y_2 = e^{3x} \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = 3 \text{ sen } (2x)$, assumimos a solução particular

$$y_p = A \text{ sen } 2x + B \cos 2x.$$

Como nenhum termo de y_p coincide com termos de y_c, não precisamos modificar y_p.
Para determinar os constantes A, B substituirmos y_p na equação diferencial:

$$y_p' = 2A \cos 2x - 2B \text{ sen } 2x, \qquad y_p'' = -4A \text{ sen } 2x - 4B \cos 2x$$

Substituindo na equação temos que

$$\begin{aligned}(-4A \text{ sen } 2x - 4B \cos 2x) - 4(2A \cos 2x - 2B \text{ sen } 2x) &= 3 \text{ sen } 2x \\ \Rightarrow (-A + 8B) \text{ sen } 2x + (-B - 8A) \cos 2x &= 3 \text{ sen } 2x\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes temos que

$$\left.\begin{aligned}-A + 8B &= 3 \\ B + 8A &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{-3}{65} \text{ e } B = \frac{24}{65}$$

Portanto

$$y_p = -\frac{3}{65} \text{ sen } 2x + \frac{24}{25} \cos 2x$$

Solução geral é

$$\begin{aligned}y &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{3x} - \frac{3}{65}(\text{ sen } 2x - 8 \cos 2x)\end{aligned}$$

(b) $y'' + y = 4 \text{ sen } x$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i \\ \text{e} \\ \lambda_2 = -i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = \text{sen } x \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = 4 \text{ sen } x$, assumimos a solução particular

$$y_p = A \text{ sen } x + B \cos x.$$

Mas temos o termo sen x está em y_p e em y_c, logo modificamos y_p pela multiplicamos por x assim eliminamos esta coincidência Portanto a expressão coreto de y_p é

$$y_p = Ax \text{ sen } x + Bx \cos x$$

Para determinar os constantes A, B, substituirmos y_p na equação diferencial:

$$y_p' = A \text{ sen } x + B \cos x + Ax \cos x - Bx \text{ sen } x$$

$$y_p'' = 2A \cos x - 2B \text{ sen } x - Ax \text{ sen } x - Bx \cos x$$

Substituindo na equação e simplificando temos que

$$2A \cos x - 2B \text{ sen } x = 4 \text{ sen } x$$

Comparando os coeficientes temos que

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \end{cases}$$

Portanto

$$y_p = -2x \cos x$$

Solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x - 2x \cos x \end{aligned}$$

4º caso: Quando a função $g(x) = g_1(x) + \cdots g_n(x)$ sendo que $g_i(x)$ é um polinômio (1º caso), ou exponencial (2º caso) ou seno ou cosseno (3º caso).

Admitiremos como solução particular

$$y_p(x) = y_{p_1} + \cdots y_{p_n}$$

onde y_{p_i} é a solução associado a g_i respectivamente.

Exemplo 2.5.7. *Resolver as seguintes equações:*

(a) $y'' - 9y = e^{2x} + 5e^{3x}$

(b) $y'' - y = 3 \text{ sen } x - e^{2x} + 1$

Solução:

(a) $y'' - 9y = e^{2x} + 5e^{3x}$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \Rightarrow y_1 = e^{3x} \\ \text{e} \\ \lambda_2 = -3 \Rightarrow y_2 = e^{-3x} \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = e^{2x} + 5e^{3x}$, a solução particular é da forma:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

onde

y_{p_1} é uma solução particular de $y'' - 9y = e^{2x}$ e

y_{p_2} é uma solução particular de $y'' - 9y = 5e^{3x}$.

Do 3º caso acima, temos que $y_{p_1} = -\frac{1}{5}e^{2x}$ e $y_{p_2} = \frac{5}{6}xe^{3x}$.

Portanto

$$y_p = -\frac{1}{5}e^{2x} + \frac{5}{6}xe^{3x}$$

Solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{5}{6}xe^{3x} \end{aligned}$$

(b) $y'' - y = 3 \operatorname{sen} x - e^{2x} + 1$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \Rightarrow y_1 = e^{x} \\ \text{e} \\ \lambda_2 = -1 \Rightarrow y_2 = e^{-x} \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = 3 \text{ sen } x - e^{2x} + 1$, a solução particular é da forma

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

onde

y_{p_1} é uma solução particular de $y'' - y = 3 \text{ sen } x$,

y_{p_2} é uma solução particular de $y'' - y = -e^{2x}$ e

y_{p_3} é uma solução particular de $y'' - y = 1$

Dos casos 1º, 2º e 3º acima temos que

$$y_{p_1} = -\frac{3}{2} \text{ sen } x, \quad y_{p_2} = -\frac{1}{3}e^{2x}, \quad y_{p_3} = -1$$

Portanto

$$y_p = -\frac{3}{2} \text{ sen } x - \frac{1}{3}e^{2x} - 1$$

Solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{3}{2} \text{ sen } x - \frac{1}{3}e^{2x} - 1 \end{aligned}$$

5º caso: Quando a função $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdots g_n(x)$ sendo que $g_i(x)$ é um polinômio (1º caso), ou exponencial (2º caso) ou seno ou cosseno (3º caso).

Construímos uma solução particular $y_p(x)$ da seguinte forma:

(a) Escreve as soluções particulares y_{p_i} associada a cada função g_i **sem** atribuir qualquer coeficiente,

(b) Multiplique todos os y_{p_i} em (a) para obter todos os termos distintos do produto,

(c) Insere os coeficientes a determinar na expressão na expressão em (b), um para cada termo, assim obtemos a forma correta de $y_p(x)$.

(d) Caso um dos termos de $y_p(x)$ seja solução da equação homogênea associada, multiplique por x^s onde s é o menor inteiro positivo que elimina essa coincidência.

Exemplo 2.5.8. *Resolver as seguintes equações:*

(a) $y'' + 9y = (x^2 + 2)e^{3x}$

(b) $y'' - 6y' + 9y = e^x \text{ sen } x$

(c) $y'' - 2y' - 3y = x^3 e^{5x} \cos(3x)$

Solução:

(a) $y'' + 9y = (x^2 + 2)e^{3x}$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3i \\ \text{e} \\ \lambda_2 = -3i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \cos 3x \\ y_2 = \text{sen } 3x \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \text{ sen } 3x$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = (x^2 + 2)e^{3x} = g_1(x) \cdot g_2(x)$ construímos a solução particular da seguinte forma:

- Para $g_1(x) = x^2 + 2 \longrightarrow y_{p_1}(x) = x^2 + x + 1$ (sem os coeficientes)
- Para $g_2(x) = e^{3x} \longrightarrow y_{p_2}(x) = e^{3x}$ (sem os coeficientes)
- Multiplicamos y_{p_1} e y_{p_2} :

$$(x^2 + x + 1)e^{3x} = x^2 e^{3x} + xe^{3x} + e^{3x}$$

Temos 3 termos distintos, assim teremos 3 constantes em y_p.

Logo

$$y_p = (A + Bx + Cx^2)e^{3x}$$

Para determinar os constantes A, B, C substituirmos y_p na equação diferencial:

$y_p' = (A + 2Cx + 3A + 3Bx + 3Cx^2)e^{3x}$, $\quad y_p'' = (2BC + 3B + 12Cx + 3B + 9A + 9Bx + 9Cx^2)e^{3x}$

Substituindo na equação temos os sistema

$$\begin{cases} C + 3B + 9A = 1 \\ 2C + 3B = 0 \\ 18C = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ A = \frac{19}{162},\ B = -\frac{1}{27},\ C = \frac{1}{18} \right.$$

Portanto

$$y_p = \left(\frac{19}{162} - \frac{1}{27}x + \frac{1}{18}x^2 \right) e^{3x}$$

Solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x + \left(\frac{19}{162} - \frac{1}{27}x + \frac{1}{18}x^2 \right) e^{3x} \end{aligned}$$

(b) $y'' - 6y' + 9y = e^x \operatorname{sen} x$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \right. \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{3x} \\ y_2 = xe^{3x} \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1 e^{3c} + c_2 x e^{3x}$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = e^x \operatorname{sen} x = g_1(x) \cdot g_2(x)$ construímos a solução particular da seguinte forma:

- Para $g_1(x) = e^x \longrightarrow y_{p_1}(x) = e^x$ (sem os coeficientes)
- Para $g_2(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow y_{p_2}(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ (sem os coeficientes)
- Multiplicamos y_{p_1} e y_{p_2} :

$$e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

Temos 2 termos distintos, assim teremos 2 constantes em y_p.

Logo

$$y_p = e^x(A \operatorname{sen} x + B \cos x)$$

Para determinar os constantes A, B substituirmos y_p na equação diferencial:

$$y_p' = e^x(A \text{ sen } x + B \cos x + A \cos x - B \text{ sen } x), \qquad y_p'' = e^x(2A \cos x - 2B \text{ sen } x)$$

Substituindo na equação temos os sistema

$$\begin{cases} -4A + 3B = 0 \\ 3A + 4B = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ A = \frac{3}{25}, \;\; B = \frac{4}{25} \right.$$

Portanto

$$y_p = \left(\frac{3}{25} \text{ sen } x + \frac{4}{25} \cos x\right) e^x$$

Solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= (c_1 + c_2 x)e^{3x} + \left(\frac{3}{25} \text{ sen } x + \frac{4}{25} \cos x\right) e^x \end{aligned}$$

Exemplo 2.5.9. *Determine a função complementar $y_c(x)$ e uma forma adequada para a solução particular $y_p(x)$ utilizando o método dos coeficientes a determinar das seguintes equações diferenciais. Não avalie as constantes em $y_p(x)$*

(a) $y'' - 2y' - 3y = x^3 e^{5x} \cos(3x)$

(b) $y'' + 25y = 4x^3 \text{ sen } (5x) - 2e^{3x} \cos(5x)$

Solução:

(a) $y'' - 2y' - 3y = x^3 e^{5x} \cos(3x)$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \text{e} \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = e^{3x} \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = x^3 e^{5x} \cos(3x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x)$ construímos a solução particular da

seguinte forma:

- Para $g_1(x) = x^3 \longrightarrow y_{p_1}(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ (sem os coeficientes)
- Para $g_2(x) = e^{5x} \longrightarrow y_{p_2}(x) = e^{5x}$ (sem os coeficientes)
- Para $g_3(x) = \cos(3x) \longrightarrow y_{p_3}(x) = \cos(3x) + \operatorname{sen}(3x)$ (sem os coeficientes)
- Multiplicamos y_{p_1}, y_{p_2} e y_{p_3} :

$$(x^3+x^2+x+1)e^{5x}\Big(\cos(3x)+\operatorname{sen}(3x)\Big) = x^3e^{5x}\cos(3x)+x^2e^{5x}\cos(3x)+xe^{5x}\cos(5x)+$$
$$+e^{5x}\cos(3x)+x^3e^{5x}\operatorname{sen}(3x)+x^2e^{5x}\operatorname{sen}(3x)+xe^{5x}\operatorname{sen}(5x)+e^{5x}\operatorname{sen}(3x)$$

Temos 8 termos distintos, assim teremos 8 constantes em y_p.

Logo

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^3e^{5x}\cos(3x) + Bx^2e^{5x}\cos(3x) + Cxe^{5x}\cos(5x) + De^{5x}\cos(3x) + Ex^3e^{5x}\operatorname{sen}(3x) + \\ &+ Fx^2e^{5x}\operatorname{sen}(3x) + Gxe^{5x}\operatorname{sen}(5x) + He^{5x}\operatorname{sen}(3x) \\ &= (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{5x}\cos(3x) + (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)e^{5x}\operatorname{sen}(3x) \end{aligned}$$

(b) $y'' + 25y = 4x^3\operatorname{sen}(5x) - 2e^{3x}\cos(5x)$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^2 + 25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5i \\ \text{e} \\ \lambda_2 = -5i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \cos(5x) \\ y_2 = \operatorname{sen}(5x) \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1\cos(5x) + c_2\operatorname{sen}(5x)$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = 4x^3\operatorname{sen}(5x) - 2e^{3x}\cos(5x)$, a solução particular é da forma

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

onde

y_{p_1} é uma solução particular de $y'' + 25y = 4x^3\operatorname{sen}(5x)$,

y_{p_2} é uma solução particular de $y'' + 25y = -2e^{3x}\cos(5x)$

Seja $g_1(x) = 4x^3 \text{ sen } (5x)$ um produto de um polinômio de grau 3 com a função seno. Construímos a solução particular y_{p_1} da seguinte forma:

- Para $4x^3$ temos a solução particular $x^3 + x^2 + x + 1$ (sem os coeficientes)
- Para $\text{sen } (5x)$ temos a solução particular $\cos (5x) + \text{ sen } (5x)$ (sem os coeficientes)
- Multiplicando temos

$$(x^3+x^2+x+1)\Big(\cos (5x) + \text{ sen } (5x)\Big) = x^3 \cos (5x) + x^2 \cos (5x) + x \cos (5x) + \cos (5x) + \\ + x^3 \text{ sen } (5x) + x^2 \text{ sen } (5x) + x \text{ sen } (5x) + \text{ sen } (5x)$$

Temos 8 termos distintos, assim teremos 8 constantes em y_{p_1}.

Logo

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^3 \cos (3x) + Bx^2 \cos (5x) + Cx \cos (5x) + D \cos (5x) + Ex^3 \text{ sen } (5x) + Fx^2 \text{ sen } (5x) + \\ &+ Gx \text{ sen } (5x) + H \text{ sen } (5x) \\ &= (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \cos (5x) + (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H) \text{ sen } (5x) \end{aligned}$$

Mas os termos $D \cos (5x)$ e $H \text{ sen } (5x)$ são soluções de y_c, então multiplicamos por x para eliminar esta coincidência. Portanto correta de y_{p_1} é

$$\begin{aligned} y_{p_1} &= x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \cos (5x) + x(Ex^3 + Fx^2 + Gx + H) \text{ sen } (5x) \\ &= (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx) \cos (5x) + (Ex^4 + Fx^3 + Gx^2 + Hx) \text{ sen } (5x) \end{aligned}$$

Seja $g_2(x) = -2e^{3x} \cos (5x)$ um produto de uma função exponencial com uma função cosseno. Construímos a solução particular y_{p_2} da seguinte forma:

- Para $-2e^{3x}$ temos a solução particular e^{3x} (sem os coeficientes)
- Para $\cos (5x)$ temos a solução particular $\cos (5x) + \text{ sen } (5x)$ (sem os coeficientes)
- Multiplicando temos

$$(e^{3x})\Big(\cos (5x) + \text{ sen } (5x)\Big) = e^{3x} \cos (5x) + e^{3x} \text{ sen } (5x)$$

Temos 2 termos distintos, assim teremos 2 constantes em y_{p_2}.

Logo

$$y_{p_2} = Ie^{3x}\cos(5x) + Je^{3x}\operatorname{sen}(5x)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y_p &= y_{p_1} + y_{p_2} \\ &= (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx)\cos(5x) + (Ex^4 + Fx^3 + Gx^2 + Hx)\operatorname{sen}(5x) + \\ &+ Ie^{3x}\cos(5x) + Je^{3x}\operatorname{sen}(5x) \end{aligned}$$

Resumo do Método dos Coeficientes a determinar:

Para resolver $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$

(1) Encontre o conjunto fundamental de soluções $\{y_1, y_2\}$ da equação homogênea associada. Portanto a solução complementar é $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$

(2) Divide, se necessário, $g(x)$, em partes: $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x)$

(3) Para cada $g_i(x)$, escolhe a sua forma da solução particular correspondente y_{p_i} de acordo com a tabela abaixo:

$g_i(x)$	$y_{p_i}(x)$
$P_n(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$	$x^s(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0)$
$e^{\alpha x}$	$Ax^se^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0)e^{\alpha x}$
$\operatorname{sen}\beta x$ ou $\cos\beta x$	$x^s(A\operatorname{sen}\beta x + B\cos\beta x)$
$P_n(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ ou $P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$	$x^s\left[(A_nx^n + \cdots + A_0)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + (B_nx^n + \cdots + B_0)e^{\alpha x}\cos\beta x\right]$

onde s é o menor inteiro não negativo ($s = 0, 1, 2, \ldots$) que garanta que nenhuma parcela da solução particular seja solução da equação homogênea associada.

(4) $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_k}$

2.5.1.3 Exercícios

1. Resolva a equação diferencial dada pelo **método dos coeficientes a determinar**.

   (a) $y'' + 3y' + 2y = 6$. Resp: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + 3$

   (b) $y'' - 10y + 25y = 30x + 3$. Resp: $y = (c_1 + c_2x)e^{5x} + \frac{3}{5}(2x + 1)$

   (c) $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$. Resp: $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + x^2 - 4x + 5$

   (d) $y'' + 3y' = -48x^2e^{3x}$. Resp: $y = c_1 + c_2e^{-3x} + \left(\frac{-28}{27} + \frac{8x}{3} - \frac{8x^2}{3}\right)e^{3x}$

   (e) $y'' - y' = -3$. Resp: $y = c_1 + c_2e^{x} + 3x + 3$

   (f) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$. Resp $y = (c_1 + c_2x)e^{\frac{1}{2}x} + 3 + \frac{1}{8}x^2e^{\frac{1}{2}x}$

   (g) $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} 2x$. Resp: $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x) - \frac{3}{4}x \cos(2x)$

   (h) $y'' + y = 2x \operatorname{sen} x$. Resp: $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x^2 \cos x$

2. Resolva a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas:

   (a) $y'' - 6y' - 7y = -9e^{-2x}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 13$. Resp: $y = e^{-x} - 2e^{7x} - e^{-2x}$

   (b) $5y'' + y' = -6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

   (c) $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$

   (d) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, $x(0) = x'(0) = 0$

   (e) $y'' + 9y = \cos x - \operatorname{sen} x$, $y(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0$

3. Resolva a equação diferencial dada pelo **método da variação dos parâmetros**.

   (a) $y'' + y = \sec x$

   (b) $y'' + y = \operatorname{sen} x$

   (c) $y'' + y = \cos^2 x$

   (d) $y'' - y = \cosh x$

   (e) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$

   (f) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

4. Resolva a equação diferencial pelo **método da variação dos parâmetros,** sujeita à condição inicial $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

(a) $4y'' - y = xe^{x/2}$

(b) $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$

(c) $2y'' + y' - y = x + 1$

(d) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(12x^2 - 6x)$

5. Determine a função complementar $y_c(x)$ e uma forma adequada para a solução particular $y_p(x)$ utilizando o método dos coeficientes a determinar das seguintes equações diferenciais. Não avalie as constantes em $y_p(x)$

(a) $y'' - 9y = 6x^3e^{3x} - 2e^{-3x} \operatorname{sen} 9x$

Resp: $\begin{cases} y_c = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} \\ y_p(x) = (Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex)e^{3x} + Fe^{-3x} \cos 9x + Ge^{-3x} \operatorname{sen} 9x \end{cases}$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 5x^3 - 2 - x^2e^{2x} + 4e^{2x} \cos x$

Resp: $\begin{cases} y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} \\ y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D + (Ex^4 + Fx^3 + Gx^2)e^{2x} + He^{2x} \cos x + Ie^{2x} \operatorname{sen} x \end{cases}$

(c) $y'' + 4y' + 20y = x^2e^{-2x} \operatorname{sen} 4x - 3 \cos 4x - xe^{-2x}$

Resp: $\begin{cases} y_c = e^{-2x}(c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x) \\ y_p(x) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{-2x} \cos 4x + (Dx^3 + Ex^2 + Fx)e^{-2x} \operatorname{sen} 4x + G \cos 4x + \\ +H \operatorname{sen} 4x + (Ix + J)e^{-2x} \end{cases}$

6. Sabendo-se que as funções $t^{-1/2} \operatorname{sen} t$ e $t^{-1/2} \cos t$ são soluções linearmente independentes da equação $t^2\ddot{x} + t\dot{x} + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)x = 0, \quad t > 0$, encontre a solução geral de

$$t^2\ddot{x} + t\dot{x} + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)x = 3t^{3/2} \operatorname{sen} t.$$

7. Determine duas soluções linearmente independentes de $t^2\ddot{x} - 2x = 0$ da forma $x = t^r$. Usando essas duas soluções, determine a solução geral de $t^2\ddot{x} - 2x = t^2$.

8. Uma solução da equação $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ é $(1 + t)^2$, e o Wronskiano de duas soluções qualquer, desta equação, é constante. Determine a solução geral de

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 1 + t$$

Aula 2.6

Equações diferenciais lineares de ordem superiores

Agora vamos começar a construção de soluções para equações diferenciais lineares de ordem n, isto é equações diferenciais da forma:

$$a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.6.1}$$

A equação é

- **de coeficientes constantes:** quando $p_0, p_1, \cdots, p_n$ são todos constantes
- **homogênea:** quando $g(x) = 0$
- **não-homogênea:** quando $g(x) \neq 0$
- **homogênea:** quando $g(x) = 0$
- **forma padrão:** divide (2.6.1) por $a_n(x)$

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p_n(x)y = g(x) \tag{2.6.2}$$

Definição 2.6.1. *Uma solução de* (2.6.2) *é uma função $y = h(x)$ definido no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que tem derivadas $y' = h'(x)$, $y'' = h''(x), \cdots, y^{(n)} = h^{(n)}(x)$ e satisfaz a equação* (2.6.2) *para todo x no intervalo I.*

Exemplo 2.6.1. *Mostre que xe^{-x} é uma solução da equação $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Solução:

$$y = xe^{-x}$$

então

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$y'' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (-2+x)e^{-x}$$

$$y''' = e^{-x} - (-2+x)e^{-x} = (3-x)e^{-x}$$

$$y^{(4)} = -e^{-x} - (3-x)e^{-x} = (-4+x)e^{-x}$$

Portanto

$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = (-4+x)e^{-x} + 2(3-x)e^{-x} + (-2+x)e^{-x} = (-4+x+6-2x-2+x)e^{-x} = 0$$

Portanto $y = xe^{-x}$ é uma solução.

Problema de Valor Inicial (PVI)

Um problema de valor inicial da equação diferencial linear de ordem n consiste na equação

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p_n(x)y = g(x)$$

e n condições iniciais

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = y_0' \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

Teorema 2.6.1 (Existência e Unicidade). *Se as funções $p_1(x),\ p_2(x), \cdots, p_n(x)$ e $g(x)$ são continuas e deriváveis no intervalo aberto (a,b), então existe somente uma função $y(x)$ satisfazendo* (2.6.2) *no intervalo (a,b) e as condições iniciais*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = y_0' \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

Soluções da equação linear homogênea de ordem n

Definição 2.6.2. *Um conjunto de funções $\{\phi_1,\ \phi_2, \cdots \phi_n\}$ é dito linearmente independentes no intervalo $I = (a,b)$ se não existem constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ tal que*

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0, \qquad \forall\ x \in I$$

exceto $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Teorema 2.6.2. *Um conjunto de funções deriváveis $\{\phi_1,\ \phi_2, \cdots \phi_n\}$ é linearmente independentes no intervalo I se e somente se o Wronskiano do conjunto é diferente de zero, isto é*

$$0 \neq W(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)(x) = \det\begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \cdots & \phi_n'(x) \\ \phi_1''(x) & \phi_2''(x) & \cdots & \phi_n''(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

em I.

Teorema 2.6.3. *Suponha que as funções $p_1(x),\ p_2(x), \cdots, p_n(x)$ e $g(x)$ são continuas e deriváveis no intervalo aberto (a, b) e as funções $y_1(x),\ y_2(x), \cdots, y_n(x)$ são soluções da equação homogênea*

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p_n(x)y = 0. \tag{2.6.3}$$

Então se $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x) \neq 0$ em pelo menos um ponto $a < x < b$, então a solução geral de (2.6.3) *é dado por*

$$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

$c_1, c_2, \cdots, c_n$ constantes arbitrárias.

Soluções da equação linear não-homogênea de ordem n

Considere a equação diferencial linear de ordem n não-homogênea

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p_n(x)y = g(x) \tag{ 2.6.2}$$

e suponha que $y_1(x),\ y_2(x), \cdots, y_n(x)$ é um conjunto de n soluções linearmente independentes da equação homogênea correspondente. Se $y_p(x)$ é qualquer solução particular de (2.6.2) então a solução geral de (2.6.2) é da forma

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

2.6.1 Equações Diferenciais Lineares Homogêneas de ordem n com coeficientes constantes

Consideramos a equação diferencial linear homogênea de ordem n com coeficientes constantes

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0 y = 0. \tag{2.6.4}$$

Quando $n = 2$ sabemos que uma solução desta equação pode ser resolvido, assumindo inicialmente uma solução da forma

$$y(x) = e^{\lambda x} \tag{2.6.5}$$

e substituindo e resolvendo por λ. Vamos fazer a mesma coisa para o caso geral n. Substituindo (2.6.5) em (2.6.4) obtemos o polinômio característico:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2.6.6}$$

As raízes do polinômio característico determinam a solução de (2.6.4). Em relação o polinômio característico, tem-se 3 casos a considerar:

Caso 1: O polinômio característico admite somente raízes reais e distintas

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ as raízes do polinômio caraterístico, então temos n soluções linearmente independentes

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \;\; y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \; \cdots, y_{n-1}(x) = e^{\lambda_{n-1} x}, \;\; y_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

Assim a solução geral é

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_{n-1} e^{\lambda_{n-1} x} + c_n e^{\lambda_n x}$$

Exemplo 2.6.2.

(a) Determine a solução geral da equação $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$.

(b) Resolve o problema de valor inicial $y^{(3)} - 5y'' - 22y' + 56y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -2,\ y''(0) = -4$.

Solução:

(a) Polinômio caraterístico: $\lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 = 0$

$$\lambda^2 = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3 \\ \text{ou} \\ \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = -2 \end{cases}$$

Portanto solução geral é

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$$

(b) Polinômio caraterístico: $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 22\lambda + 56 = 0$

Primeiramente observamos que $p(2) = 8 - 20 - 44 + 56 = 0$ portanto $\lambda - 2$ é um fator de $p(\lambda)$. Aplicando o Briot-Ruffini

1	−5	−22	56	2
1	−3	−28	0	

Isto nos dá a fatoração

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 - 5\lambda^2 - 22\lambda + 56 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda - 28) \end{aligned}$$

Mas $\lambda^2 - 3\lambda - 28 = (\lambda - 7)(\lambda + 4)$

Portanto as raízes de $p(\lambda)$ são $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 7,\ \lambda_3 = -4$. Portanto a solução geral

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{7x} + c_3 e^{-4x}$$

Agora usamos as condições inciais para determinar $c_1,\ c_2$ e c_3 :

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{7x} + c_3 e^{-4x} \\ \Rightarrow y'(x) &= 2c_1 e^{2x} + 7c_2 e^{7x} - 4c_3 e^{-4x} \\ \Rightarrow y''(x) &= 4c_1 e^{2x} + 49c_2 e^{7x} + 16c_3 e^{-4x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ y'(0) = -2 &\Rightarrow 2c_1 + 7c_2 - 4c_3 = -2 \\ y''(0) = -4 &\Rightarrow 4c_1 + 49c_2 + 16c_3 = -4 \end{aligned}$$

Resolvendo temos que $c_1 = \dfrac{13}{15},\ c_2 = -\dfrac{16}{55}$ e $c_3 = \dfrac{14}{33}$. Portanto a solução do PVI é

$$y = \frac{13}{15}e^{2x} - \frac{16}{55}e^{7x} + \frac{14}{33}e^{-4x}$$

Caso 2: O polinômio característico admite raízes reais com alguns raízes com multiplicidade.

Suponhamos que o polinômio característico possui uma raiz real λ_k com multiplicidade p. Com essa raiz construiremos p soluções linearmente independentes da equação (2.6.4) da seguinte maneira:

$$y_1 = e^{\lambda_k x}, \quad y_2 = xe^{\lambda_k x}, \quad y_3 = x^2 e^{\lambda_k x}, \quad \cdots, \quad y_{p-1} = x^{p-2} e^{\lambda_k x}, \quad y_p = x^{p-1} e^{\lambda_k x}$$

Essa construção é feita com todas as raízes reais do polinômio característica, para obtemos n soluções linearmente independentes da equação (2.6.4).

$$y_{p+1} = e^{\lambda_{p+1} x}, \quad y_{p+2} = e^{\lambda_{p+2} x}, \quad \cdots, \quad y_{n-1} = e^{\lambda_{n-1} x}, \quad y_n = e^{\lambda_n x}$$

Assim a solução geral é

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{\lambda_k x} + c_2 x e^{\lambda_k x} + c_3 x^2 e^{\lambda_k x} + \cdots + c_{p-2} x^{p-2} e^{\lambda_k x} + c_p x^{p-1} e^{\lambda_k x} + c_{p+1} e^{\lambda_{p+1} x} + c_{p+2} e^{\lambda_{p+2} x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} \\ &= (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_p x^{p-1}) e^{\lambda_k x} + c_{p+1} e^{\lambda_{p+1} x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

Exemplo 2.6.3.

(a) Determine a solução geral da equação $y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$.

(b) Resolve o problema de valor inicial $y^{(3)} - y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0.$

Solução:

(a) Polinômio caraterístico: $p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

Podemos verificar que

$$\begin{cases} p(-1) = 1 - 1 - 3 + 5 - 2 = 0 \\ p(2) = 16 + 8 - 12 - 10 - 2 = 0 \end{cases}$$

Portanto -1 e 2 são raízes de $p(\lambda)$, podemos aplicar Briot-Ruffini

1	1	−3	−5	−2	−1
1	0	−3	−2	0	2
1	2	1	0		

Isto nos dá a fatoração

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda - 2 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 \\ &= (\lambda + 1)^3(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Portanto as raízes de $p(\lambda)$ são $\lambda_1 = -1,$ (multiplicidade 3) e $\lambda_2 = 2.$

Portanto a solução geral

$$y = c_1 e^{2x} + (c_2 + xc_3 + x^2)e^{-x}$$

(b) Polinômio caraterístico: $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

Primeiramente observamos que $p(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ portanto $\lambda - 1$ é um fator de $p(\lambda)$.

Aplicando o Briot-Ruffini

1	−1	−1	1	1
1	0	−1	0	

Isto nos dá a fatoração

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1) \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Portanto as raízes de $p(\lambda)$ são $\lambda_1 = 1$ (multiplicidade 2) e $\lambda_2 = 1$.

Portanto a solução geral

$$y = (c_1 + xc_2)e^x + c_3 e^{-x}$$

Agora usamos as condições inciais para determinar $c_1,\ c_2$ e c_3 :

$$\begin{aligned} y(x) &= (c_1 + xc_2)e^x + c_3 e^{-x} \\ \Rightarrow y'(x) &= (c_1 + c_2 + xc_2)e^x - c_3 e^{-x} \\ \Rightarrow y''(x) &= (2c_2 + c_1 + xc_2)e^x + c_3 e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) = 2 &\Rightarrow c_1 + c_3 = 2 \\ y'(0) = 1 &\Rightarrow c_1 + c_2 - c_3 = 1 \\ y''(0) = 0 &\Rightarrow 2c_2 + c_1 + c_3 = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo temos que $c_1 = 2,\ c_2 = -1$ e $c_3 = 0$. Portanto a solução do PVI é

$$y = (2 - x)e^x$$

Caso 3: O polinômio característico admite raízes complexas distintas.

Observe que as raízes complexas aparecem em pares conjugados.

Para cada par distintas raízes complexas conjugados $(\lambda,\ \bar{\lambda}),\ \lambda = \alpha + i\beta$ (com multiplicidade k) podemos construir $2k$ soluções linearmente independentes da seguinte forma:

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x), & y_2 = xe^{\alpha x}\cos(\beta x), & y_3 = x^2e^{\alpha x}\cos(\beta x), & \cdots, & y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ y_{k+1} = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), & y_{k+2} = xe^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), & y_{k+3} = x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), & \cdots, & y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \end{cases}$$

Exemplo 2.6.4. *Resolver as seguintes equações*

(a) $y^{(4)} - y = 0$

(b) $y^{(5)} + 12y^{(4)} + 104y^{(3)} + 408y'' + 1156y' = 0$

Solução:

(a) Polinômio caraterístico: $p(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$

Portanto as raízes de $p(\lambda)$ são $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = i,\ \overline{\lambda_3} = -i$.

E podemos construir as seguintes soluções linearmente independentes:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & \to\ y_1 = e^x \\ \lambda_2 = -1 & \to\ y_2 = e^{-x} \\ \lambda_3 = i,\ \overline{\lambda_3} = -i & \to \begin{cases} y_3(x) = e^{0x}\cos x = \cos x \\ y_4(x) = e^{0x}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \end{cases} \end{cases}$$

Portanto a solução geral

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x$$

(b) Polinômio caraterístico: $p(\lambda) = \lambda^5 + 12\lambda^4 + 104\lambda^3 + 408\lambda^2 + 1156\lambda = 0$

Mas

$$\begin{aligned}\lambda^5 + 12\lambda^4 + 104\lambda^3 + 408\lambda^2 + 1156\lambda &= \lambda(\lambda^4 + 12\lambda^3 + 104\lambda^2 + 408\lambda + 1156)\\ &= \lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 34)^2\\ &= \lambda(\lambda + 3 + 5i)^2(\lambda + 3 - 5i)^2\end{aligned}$$

Portanto as raízes de $p(\lambda)$ são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -3 - 5i, \text{ (multiplicidade 2)}, \quad \overline{\lambda_2} = -3 + 5i \text{ (multiplicidade 2)}$$

E podemos construir as seguintes soluções linearmente independentes:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 & \rightarrow \quad y_1 = e^{0x} = 1 \\ \lambda_2 = -3 - 5i,\ \overline{\lambda_2} = -3 + 5i \text{ (multiplicidade 2)} & \rightarrow \begin{cases} y_2(x) = e^{-3x}\cos 5x \\ y_3(x) = xe^{-3x}\cos 5x \\ y_4(x) = e^{-3x}\operatorname{sen} 5x \\ y_5(x) = xe^{-3x}\operatorname{sen} 5x \end{cases} \end{cases}$$

Portanto a solução geral

$$y = c_1 + c_2e^{-3x}\cos(5x) + c_3e^{-3x}\operatorname{sen}(5x) + c_4xe^{-3x}\cos(5x) + c_5xe^{-3x}\operatorname{sen}(5x)$$

2.6.2 Equações Diferenciais Lineares Não-Homogêneas de ordem n com coeficientes constantes - Método dos Coeficientes a determinar

A solução geral da equação diferencial linear não-homogêneas de ordem n com coeficientes constantes

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0 y = g(x). \tag{2.6.7}$$

é dado por

$$y(x) = y_p + y_c$$

onde y_c é a solução geral da equação homogênea associada e y_p é uma solução particular de (2.6.7).

A resolução de y_p será pelo Método dos coeficientes a determinar que foi estudada na Aula 12.

Exemplo 2.6.5. *Resolve a equação diferencial ou o problema do valor inicial*

(a) $y''' - 4y' = 1 - 3x$

(b) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 10xe^x$

(c) $y''' - 4y' = 12 \text{ sen } 2x$

Solução:

(a) $y''' - 4y' = 1 - 3x$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^3 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_2 = e^{2x} \\ \text{e} \\ \lambda_3 = -2 \Rightarrow y_3 = e^{-2x} \end{cases}$

Portanto

$$y_c = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = 1 - 3x$, assumimos a solução particular

$$y_p = Ax + B.$$

Como o termo de y_p é uma solução em y_c, precisamos modificar y_p. pela multiplicação por x. Portanto a forma correta de y_p é

$$y_p = Ax^2 + Bx$$

Para determinar os constantes A, B substituirmos y_p na equação diferencial:

$$y_p' = 2Ax + B, \qquad y_p'' = 2A \quad y_p''' = 0$$

Substituindo na equação temos que

$$\begin{aligned}(0) - 4(2Ax + B) &= 1 - 3x \\ \Rightarrow -8Ax - 4B &= 1 - 3x\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes temos que

$$\begin{cases} -8A = 3 & \Rightarrow A = -\dfrac{8}{3} \\ \\ -4B = 1 & \Rightarrow B = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Portanto

$$y_p = \frac{3x^2}{8} - \frac{1}{4}x$$

Solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x}{4}\end{aligned}$$

(b) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 10xe^x$

Cálculo de y_c :

Eqn caraterística: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (multiplicidade 3)

Portanto

$$y_c = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$$

Cálculo de y_p :

Como $g(x) = (10x)e^x = g_1(x) \cdot g_2(x)$ construímos a solução particular da seguinte forma:

- Para $g_1(x) = 10x \longrightarrow y_{p_1}(x) = x + 1$ (sem os coeficientes)
- Para $g_2(x) = e^x \longrightarrow y_{p_2}(x) = e^x$ (sem os coeficientes)
- Multiplicamos y_{p_1} e y_{p_2} :

$$(x + 1)e^x = xe^x + e^x$$

Temos 2 termos distintos, assim teremos 2 constantes em y_p.

Logo

$$y_p = Axe^x + Be^x$$

Mas os termos Axe^x e Be^x são soluções de y_c, então multiplicamos por x^3 para eliminar esta coincidência. Portanto correta de y_p é

$$y_p = x^3(Ax + B)e^x$$

Para determinar os constantes A, B substituirmos y_p na equação diferencial temos os sistema

$$\begin{cases} 24A = 10 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{5}{12}, \\ B = 0 \end{cases}$$

Portanto

$$y_p = \frac{5}{12}x^4e^x$$

Solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1e^x + c_2xe^x + c_3xe^x + \frac{5}{12}x^4e^x \end{aligned}$$

2.6.3 Exercícios

1. Ache a solução geral de cada uma das equações diferenciais abaixo:

   (a) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$. Resp: $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} + c_3e^{-2x}$.

   (b) $2y^{(4)} + 11y''' + 18y'' + 4y' - 8y = 0$. Resp: $y = c_1e^{1/2x} + (c_2 + c_3x + c_4x^2)e^{2x}$.

   (c) $y^{(4)} + 16y = 0$. Resp: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x$.

   (d) $y''' - 5y'' + 7y' = 0$. Resp: $y = c_1 + \left[c_2 \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right]e^{5/2x}$.

   (e) $y^{(5)} - 15y^{(4)} + 84y^{(3)} - 220y'' + 275y' - 125y = 0$.
   Resp: $y = c_1e^x + c_2e^{5x} + c_3xe^{5x} + c_4e^{2x} \cos x + c_5e^{2x} \operatorname{sen} x$.

   (f) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^{2x} - e^{3x}$, Resp: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x} - \dfrac{1}{40}e^{3x} + \dfrac{1}{12}xe^{2x}$

   (g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$, Resp: $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x + x^3e^x$

   (h) $y''' - 2y' = 3x^2 - 2x + 1$. Resp: $y = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} - \dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{3x^2}{8}$.

(i) $y^{(4)} - 4y'' = 8 \text{ sen } 4x$. Resp: $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + c_4e^{2x} + \dfrac{1}{40} \text{ sen } (4x)$.

(j) $y^{(4)} + 2y'' + y = 4 \text{ sen } x$. Resp: $y = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x + c_3x \cos x + c_4x \text{ sen } x - \dfrac{1}{2}x^2 \text{ sen } (x)$.

(k) $y^{(3)} - 5y'' + 6y' = 2x + 3e^{2x}$. Resp: .

(l) $y^{(3)} + 4y' = 3e^{2x} - x - 2 \text{ sen } 2x$. Resp: .

2. Ache a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y''' + y' = \text{ sen } x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Resp: $y = -x \cos x + 3x - 2 \text{ sen } x$

(b) $y^{(4)} - 6y^{(3)} - y'' = 72x + 24$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 6$, $y'''(0) = -57$.

Resp: .

3. Resolve as equações de Euler-Cauchy de ordem 3

(a) $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ Resp: $c_1x + c_2x^2 + c_3x \ln x$

(b) $x^3y''' + 2xy' - 2y = x^2 \ln x + 3x$ Resp: $c_1x + c_2x \cos(\ln x) + c_3x \text{ sen } (\ln x) + \dfrac{x^2}{2} \ln x - x^2 + 3x \ln x$

(c) $x^3y''' + xy' - y = x \ln x$ Resp: $c_1x + c_2x \ln x + c_3x(\ln x)^2 + \dfrac{1}{24}x(\ln x)^4$

4. Determine a função complementar $y_c(x)$ e uma forma adequada para a solução particular $y_p(x)$ utilizando o método dos coeficientes a determinar das seguintes equações diferenciais. Não avalie as constantes em $y_p(x)$

(a) $y^{(5)} + 2y''' + y' = x + x \cos x$

Resp: $\begin{cases} y_c = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \text{ sen } x + c_4x \cos x + c_5x \text{ sen } x \\ y_p(x) = x(Ax + B) + x^2 [(Cx + D) \cos x + (Ex + F) \text{ sen } x] \end{cases}$

(b) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = x^3 \text{ sen } 2x + x^2 \cos 2x$

Resp: $\begin{cases} y_c = c_1 \cos 2x + c_2x \cos 2x + c_3 \text{ sen } 2x + c_4x \text{ sen } 2x \\ y_p(x) = (Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2) \text{ sen } 2x + (Ex^5 + Fx^4 + Gx^3 + Hx^2) \cos 2x \end{cases}$

(c) $y^{(4)} + y'' = x^2 \cos x$

Resp: $\begin{cases} y_c = c_1 + c_2x + c_3 \cos x + c_4 \text{ sen } x \\ y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C) \text{ sen } x + (Dx^2 + Ex + F) \cos x \end{cases}$

(d) $y''' + 8y'' + 16y = x \text{ sen } x + x^2 \cos 2x$

(e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2e^x - 3e^x$

(f) $y^{(4)} + 2y'' + y = x \operatorname{sen} x$

(g) $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = x^3e^x + x^2e^{-x}$

Resp: $\begin{cases} y_c = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x \\ y_p(x) = x^4(A + Bx + Cx^2 + Dx^3)e^x + (Ex^2 + Fx + G)e^{-x} \end{cases}$

(h) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \operatorname{sen} x + \cos 2x + \operatorname{sen} 3x$

(i) $y''' + 2y'' + 2y' = 3^{-x} \cos x$

Resp: $\begin{cases} y_c = c_1 + c_2e^{-x} \cos x + c_3e^{-x} \operatorname{sen} x \\ y_p(x) = x(Ae^{-x} \cos x + Be^{-x} \operatorname{sen} x) \end{cases}$

(j) $y''' + 2y'' + 2y' = x^2e^{-x} \cos x - xe^{-x} \operatorname{sen} x$

(k) $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y'' + 8y' + 4y = 7e^{-x} \cos x$

Resp: $\begin{cases} y_c = c_1e^{-x} \cos x + c_2xe^{-x} \cos x + c_3e^{-x} \operatorname{sen} x + c_4xe^{-x} \operatorname{sen} x \\ y_p(x) = x^2(Ae^{-x} \cos x + Be^{-x} \operatorname{sen} x) \end{cases}$

(l) $y^{(4)} - 2y'' + y = xe^x + x^2e^{-x} + e^{2x}$

Aula 2.7

Transformada de Laplace

2.7.1 Definição e Exemplos

Definição 2.7.1. *Seja $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ um função. A **transformada de Laplace** de $f(t)$ denotado por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou $F(s)$ é definido pela integral*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t := \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$$

desde que a integral convirja, onde s é um parâmetro (real ou complexo).

Teorema 2.7.1. *[Condições Suficientes para a existência de $\mathcal{L}\{f(t)\}$] Se $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ é uma função continua por partes e existem constantes $a > 0$, $M > 0$ e $T > 0$ tal que*

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad \text{para todo} \quad t > T,$$

então $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a$.

Exemplo 2.7.1. *Determine a transformada de Laplace da função $f(t) = t^n$, $t \geq 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.*

Solução:

- Para $n = 0$,

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \cdot 1\, \mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^A = \lim_{A\to\infty} -\frac{1}{s}\left[e^{-sA} - 1\right] = \frac{1}{s}, \ (s > 0).$$

- Para $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\cdot t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{A\to\infty}\left\{\frac{t^n\cdot e^{-st}}{-s}\Big|_0^A - \int_0^A \frac{nt^{n-1}e^{-st}}{-s}\,\mathrm{d}t\right\} \qquad \text{(Integrando por partes)} \\
&= 0 + \frac{n}{s}\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\cdot t^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\},\ \ (s>0).
\end{aligned}$$

Portanto temos a relação de recorrência,

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\},\quad \forall\, n,$$

que significa

$$\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n-1}{s}\mathcal{L}\{t^{n-2}\},\quad \mathcal{L}\{t^{n-2}\} = \frac{n-2}{s}\mathcal{L}\{t^{n-3}\},\cdots.$$

Potanto por indução, temos que que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\mathcal{L}\{t^{n-2}\} = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\mathcal{L}\{t^{n-3}\} = \\
&= \cdots = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdots\cdot\frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\} = \frac{n!}{s^n}\cdot\frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Portanto temos que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ \ (s>0).$$

Observação. *A partir de agora vamos usar* $\int_0^\infty$ *em vez de* $\lim_{A\to\infty}\int_0^A$, *sem prejuízo.*

Exemplo 2.7.2. *Determine a transformada de Laplace de* $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$.

Solução:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\Big|_{t=0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-a},\ s>a.\end{aligned}$$

Exemplo 2.7.3. *Determine a transformada de Laplace de* $\operatorname{sen}(at)$ e $\cos(at)$.

Lembrando que

$$\left(\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen}(bx)-b\cos(bx)),\ \int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx)+b\operatorname{sen}(bx))\right)$$

Solução:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot\operatorname{sen}(at)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\operatorname{sen}(at)-a\cos(at))\Big|_{t=0}^{\infty} \\ &= \frac{a}{s^2+a^2},\quad s>0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot\cos(at)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\cos(at)+a\operatorname{sen}(at))\Big|_{t=0}^{\infty} \\ &= \frac{s}{s^2+a^2},\quad s>0.\end{aligned}$$

Exemplo 2.7.4. *Determine a transformada de Laplace de* $\sinh(at)$ e $\cosh(at)$.

Solução:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot\sinh(at)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot\frac{(e^{at}-e^{-at})}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{-at}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-a}\right]\ \text{(por Exemplo 2.7.2)} \\ &= \frac{a}{s^2-a^2},\ s>|a|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cosh(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot\cosh(at)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\cdot\frac{(e^{at}+e^{-at})}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{-at}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-a}\right] \text{ (por Exemplo 2.7.2)} \\
&= \frac{s}{s^2-a^2},\ s>|a|.
\end{aligned}$$

Tabelando os resultados acima temos

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
$t^n\ (n=0,1,2,3,\cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\quad (s>0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\quad (s>a)$
sen at	$\frac{a}{s^2+a^2},\quad (s>0)$
cos at	$\frac{s}{s^2+a^2},\quad (s>0)$
cosh at	$\frac{s}{s^2-a^2},\quad (s>\|a\|)$
sinh at	$\frac{s}{s^2-a^2},\quad (s>\|a\|)$

Tabela 2.7.1: Transformada de alguns funções

Lema 2.7.2 (Linearidade da Transformada de Laplace)**.** *Se α e β são constantes, então*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha\mathcal{L}\{f(t)\}+\beta\mathcal{L}\{g(t)\}$$

para todo s tal que as transformadas tanto de f quanto de g existam.

Demonstração.

$$\int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]\,\mathrm{d}t = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,\mathrm{d}t$$

sempre que ambos as integrais convergirem para $s > c$. logo, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s) \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.7.5. *Calcule*

$$(a)\ \mathcal{L}\{1 + 5t\} \qquad (b)\ \mathcal{L}\{4e^{-3t} - 10 \operatorname{sen} 2t\}$$

Solução:

(a) $\mathcal{L}\{1 + 5t\} = \mathcal{L}\{1\} + 5\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2}$ pela Tabela 2.7.1.

(b) $\mathcal{L}\{4e^{-3t} - 10 \operatorname{sen} 2t\} = 4\mathcal{L}\{e^{-3t}\} - 10\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \dfrac{4}{s+3} - \dfrac{20}{s^2+4}$ pela Tabela 2.7.1.

2.7.2 Transformada Inversa de Laplace

Teorema 2.7.3. *Se $f(t)$ e $g(t)$ satisfazem as hipóteses do Teorema 2.7.1 e*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\} \quad \textit{para todo } s > a,$$

$f(t) = g(t)$ em todos os pontos t onde ambas as funções são continuas.

O Teorema acima nos diz que a Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

é única. Isto permite definir a Transformada Inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ como

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t).$$

Um método conveniente para se obter as transformadas inversas de Laplace, consiste em usar uma tabela de transformadas de Laplace.

Exemplo 2.7.6. *Da Tabela 2.7.1 temos que*

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$.
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{t^4}{4!}$.
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{\text{sen}\,(2t)}{2}$.
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3}\right\} = \cos\,(\sqrt{3}t)$.

Lema 2.7.4 (Linearidade da Transformada Inversa de Laplace)**.** *Se α e β são constantes, então*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

onde F e G são as transformadas das funções f e g .

Exemplo 2.7.7. *Calcule*

$$(a)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^2+4}\right\} \qquad (b)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\}$$

Solução: Usando a linearidade da transformada inversa de Laplace e Tabela 2.7.1 temos que

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\} - \left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = t^3 - \text{sen}\,(2t)$.

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2+4}\right\} = -2\cos\,(2t) + 3\,\text{sen}\,(2t)$.

Transformada Inversa de Laplace e Frações Parciais

Frações parciais desempenham um papel importante na determinação das transformadas inversas de Laplace.

Se uma transformada $F(s)$ não puder ser encontrada na tabela, então deve-se expandir em frações parciais e escrever $F(s)$ em termos de funções simples de s nas quais as transformadas são conhecidas.

Exemplo 2.7.8. *Determine a transformada inversa de Laplace das seguintes funções:*

$$(a)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} \qquad (b)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}.$$

Solução:

(a) Usando frações parciais temos que

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}.$$

Resolvendo temos que $A = -\frac{1}{3}$ e $B = -\frac{1}{3}$. Portanto

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1/3}{s+1} - \frac{1/3}{s+2}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1/3}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s+2}\right\} = -\frac{1}{3}[e^{-t} + e^{-2t}].$$

(b) Usando frações parciais temos que

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}.$$

Resolvendo temos que $A = 2$, $B = -2$ e $C = 1$. Portanto

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+1}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1}\right\} = 2e^t + \operatorname{sen} t - 2\cos t.$$

2.7.3 Propriedade da Transformada de Laplace e Sua Inversa - Primero Teorema da Translação

Lema 2.7.5 (Primeiro Teorema da Translação)**.**

(a) Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *e* a *for um número real qualquer, então,*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \quad ou \quad \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s\to s-a}.$$

(b) Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ *então*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t) \quad ou \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} = e^{at}f(t).$$

Demonstração.

(a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-ut}f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{(pela mudança } u = s-a) \\
&= F(u) = F(s-a).
\end{aligned}$$

(b) Seja $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$ então

$$\begin{aligned}
F(s-a) &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$.

■

Exemplo 2.7.9. *Calcule*

(*a*) $\mathcal{L}\{e^{-2t} \text{ sen } 3t\}$ (*b*) $\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\}$

(*c*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-3)^5}\right\}$ (*d*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-4s+5}\right\}$ (*e*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{(s+2)^2}\right\}$ (*f*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+6s+25}\right\}$

Solução:

(a) $\mathcal{L}\{e^{-2t} \text{ sen } 3t\} = \mathcal{L}\{\text{ sen } 3t\}_{s\to s-(-2)} = \dfrac{s}{s^2+9}\Big|_{s\to s+2} = \dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}.$

(b) $\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\} = \mathcal{L}\{t^3\}_{s\to s-(5)} = \dfrac{3!}{s^4}\Big|_{s\to s-5} = \dfrac{3!}{(s-5)^4}.$

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-3)^5}\right\}$

Seja $F(s) = \dfrac{1}{s^5}$, então $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \dfrac{t^4}{4!}$.

Agora $\dfrac{1}{(s-3)^5} = F(s-5)$. Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-3)\} = e^{3t}f(t) = \frac{1}{4!}t^4e^{3t}.$$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-4s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)^2+1}\right\}$ completando o quadrado.

Seja $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$, então $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \text{ sen } t$.

Agora $\dfrac{1}{(s-2)^2+1} = F(s-2)$. Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-2)\} = e^{2t}f(t) = e^{2t} \text{ sen } t.$$

(e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{(s+2)^2}\right\}$

Usando frações parciais, temos que

$$\frac{2s+5}{(s+2)^2} = \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}$$

Portanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s+2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = 2e^{-2t} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

Seja $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$, então $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t$.

Agora $\dfrac{1}{(s+2)^2} = F(s+2)$. Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s+2)\} = e^{-2t}f(t) = te^{-2t}.$$

Portanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s+2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = 2e^{-2t} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = 2e^{-2t} + te^{-2t}.$$

(f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+6s+25}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s+3)^2+16}\right\}$ completando o quadrado.
Temos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+3)^2+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3-2}{(s+3)^2+4^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2+4^2}\right\}.$$

- Vamos calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{(s+3)^2+4^2}\right\}$.
  Seja $F(s) = \dfrac{s}{s^2+4^2}$, então $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \cos(4t)$.

  Agora $\dfrac{s+3}{(s+3)^2+4^2} = F(s+3)$. Portanto,

  $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s+3)\} = e^{-3t}f(t) = e^{-3t}\cos(4t).$$

- Vamos calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+3)^2+4^2}\right\}$.

  Seja $G(s) = \dfrac{1}{s^2+4^2}$, então $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \dfrac{\operatorname{sen}(4t)}{4}$.

Agora $\dfrac{1}{(s+3)^2+4^2} = G(s+3)$. Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2+4^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s+3)\} = e^{-3t}f(t) = e^{-3t}\frac{\operatorname{sen}(4t)}{4}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+3)^2+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2+4^2}\right\} = e^{-3t}\cos(4t) - 2e^{-3t}\frac{\operatorname{sen}(4t)}{4}.$$

2.7.4 Transformada de Laplace da Função degrau unitário

Funções degrau unitário

Definição 2.7.2. *A função degrau unitário é definido por*

$$\mathcal{U}_a(t) = \mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & se\ t < a \\ 1, & se\ t \geq a \end{cases}$$

e

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0, & se\ t < 0 \\ 1, & se\ t \geq 0 \end{cases}$$

Em geral, se $b > a$,

$$\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b) = \begin{cases} 0, & se\ 0 < t < a \\ 1, & se\ a < t \geq b \\ 0, & se\ t > b \end{cases}$$

Transformada de Laplace da Função degrau unitário

Exemplo 2.7.10. *Determine a transformada de Laplace da função degrau unitário $\mathcal{U}(t-a)$.*

Solução:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot\mathcal{U}(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{t=a}^{\infty}\\ &= \frac{e^{-as}}{s}.\end{aligned}$$

Expressando funções definidas por mais de uma sentença em termos de funções degrau unitário

Podemos expressar uma função $f(t)$ definida por mais de uma sentença como uma combinação linear de funções degrau unitário da seguinte maneira:

- Para cada intervalo finito $[a,b]$ onde f possui uma expressão diferente, multiplique a expressão de f pela diferença das funções degraus $\mathcal{U}(t-a)-\mathcal{U}(t-b)$;
- Para expressão definida num intervalo infinito $[c,\infty]$ somente multiplicar a expressão por $\mathcal{U}(t-c)$;
- $f(t)$ é a somatório de todos os produtos.

Vamos ilustrar com os seguintes exemplos:

Exemplo 2.7.11. *Expresse*

$$f(t)=\begin{cases} t^2-t+3, & se\ \ 0\le t<2\\ e^t, & se\ \ 2\le t<5\\ 2t\ \text{sen}\ t, & se\ \ t\ge 5\end{cases}$$

como uma combinação linear de funções de grau unitário.

Solução: Observe que $f(t)$ possui três expressões diferentes nos intervalos $[0,2)$, $[2,5)$, e $[5,\infty)$, logo temos duas diferenças, $\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(t-2)$ e $\mathcal{U}(t-2)-\mathcal{U}(t-5)$ e três produtos,

- $(t^2-t+3)\Big(\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(t-2)\Big)$ para (t^2-t+3) definida em $[0,2)$;
- $e^t\Big(\mathcal{U}(t-2)-\mathcal{U}(t-5)\Big)$ para e^t definida em $[2,5)$;
- $2t$ sen $t\,\mathcal{U}(t-5)$ para $2t$ sen t definida em $[5,\infty)$.

Portanto $f(t)$ é a soma deste três produtos,

$$\begin{aligned} f(t) &= (t^2 - t + 3)\left(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)\right) + e^t\left(\mathcal{U}(t-2) - \mathcal{U}(t-5)\right) + 2t \text{ sen } t\, \mathcal{U}(t-5) \\ &= (t^2 - t + 3)\,\mathcal{U}(t) + (e^t + t^2 - t + 3)\,\mathcal{U}(t-2) + (2t \text{ sen } t - e^t)\,\mathcal{U}(t-5). \end{aligned}$$

Exemplo 2.7.12. *Expresse*

$$f(t) = \begin{cases} t^2e^t, & se\ 0 \le t < 3 \\ \cos t, & se\ 3 \le t < 6 \\ 2t, & se\ t \ge 6 \end{cases}$$

como uma combinação linear de funções degrau unitário.

Solução: Observe que $f(t)$ possui três expressões diferentes nos intervalos $[0,3)$, $[3,6)$, e $[6,\infty)$, logo temos duas diferenças, $\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-3)$ e $\mathcal{U}(t-3) - \mathcal{U}(t-6)$ e portanto

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2e^t\left(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-3)\right) + \cos t\left(\mathcal{U}(t-3) - \mathcal{U}(t-6)\right) + 2t\,\mathcal{U}(t-6) \\ &= t^2e^t\,\mathcal{U}(t) + (\cos t - t^2e^t)\,\mathcal{U}(t-3) + (2t - \cos t)\,\mathcal{U}(t-6). \end{aligned}$$

2.7.5 Propriedade da Transformada de Laplace e Sua Inversa - Segundo Teorema da Translação

Lema 2.7.6 (Segundo Teorema da Translação)**.**

(a) Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e a for um número real qualquer, então,

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s) \quad ou \quad \mathcal{L}\{f(t)\,\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}.$$

(b) Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ então

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a).$$

Demonstração.

(a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^a e^{-st} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\,\mathrm{d}t + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u)\,\mathrm{d}u, \quad \text{(pela mudança } u = t-a) \\
&= e^{-as}\int_0^\infty e^{-su} f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= e^{-as}F(s).
\end{aligned}$$

(b) Seguir diretamente de (a).

■

Exemplo 2.7.13. *Calcule a Transformada de Laplace das seguintes funções*

$$(a)\ f(t) = \operatorname{sen} t\,\mathcal{U}(t-\pi) \qquad (b)\ f(t) = \begin{cases} \cos(t-2\pi/3), & se\ t > 2\pi/3 \\ 0, & se\ t < 2\pi/3 \end{cases}$$

$$(c)\ f(t) = \begin{cases} 2, & se\ 0 \le t < 2 \\ -1, & se\ 2 \le t < 3 \\ 0, & se\ t \ge 3 \end{cases} \qquad (d)\ f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t < 5 \\ -1, & t > 5 \end{cases}.$$

Solução:

(a) $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\,\mathcal{U}(t-\pi)\} = e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t+\pi)\} = e^{-\pi s}\mathcal{L}\{-\cos t\} = e^{-\pi s}\cdot\dfrac{-s}{s^2+1} = -\dfrac{s}{s^2+1}e^{\pi s}.$

(b) Escrevendo $f(t)$ em termos de funções degrau unitário temos que

$$f(t) = \cos(t-2\pi/3)\,\mathcal{U}(t-2\pi/3).$$

Portanto

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\cos(t-2\pi/3)\,\mathcal{U}(t-2\pi/3)\} = e^{-\frac{2\pi s}{3}}\mathcal{L}\{\cos t\} = e^{-\frac{2\pi s}{3}}\frac{s}{s^2+1}.$$

(c) Escrevendo $f(t)$ em termos de funções degrau unitário temos que

$$f(t) = 2\Big(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)\Big) - 1\Big(\mathcal{U}(t-2) - \mathcal{U}(t-3)\Big) = 2\mathcal{U}(t) - 3\mathcal{U}(t-2) + \mathcal{U}(t-3).$$

Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{2\mathcal{U}(t)\} - \mathcal{L}\{3\mathcal{U}(t-2)\} + \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-3)\} \\ &= 2\cdot\frac{1}{s} - 3\cdot\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}.\end{aligned}$$

(d) Escrevendo $f(t)$ em termos de funções degrau unitário temos que

$$f(t) = e^{-t}\Big(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-5)\Big) - 1U(t-5) = e^{-t}\,\mathcal{U}(t) - (e^{-t}+1)\,\mathcal{U}(t-5).$$

Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{e^{-t}\,\mathcal{U}(t)\} - \mathcal{L}\{(e^{-t}+1)\,\mathcal{U}(t-5)\} \\ &= \mathcal{L}\{e^{-t}\} - e^{-5s}\mathcal{L}\{e^{-(t+5)}+1\} \\ &= \frac{1}{s+1} - e^{-5s}\Big[\mathcal{L}\{e^{-5}\cdot e^{-t}\} + \mathcal{L}\{1\}\Big] \\ &= \frac{1}{s+1} - e^{-5s}\left[\frac{e^{-5}}{s+1} + \frac{1}{s}\right] \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-5s-5}}{s+1} - \frac{e^{-5s}}{s}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.7.14. *Calcule*

$$(a)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s-4}\right\} \qquad (b)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right\} \qquad (c)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+9}\right\} \qquad (d)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s-5)^2+16}\right\}.$$

Solução:

$$(a)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s-4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}F(s)\right\}, \quad \text{onde } F(s) = \frac{1}{s-4} \Rightarrow f(t) = e^{4t}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s-4}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\}\\ &= f(t-2)\,\mathcal{U}(t-2)\\ &= e^{4(t-2)}\,\mathcal{U}(t-2).\end{aligned}$$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s/2}F(s)\right\}$, onde $F(s) = \dfrac{s}{s^2+3^2} \Rightarrow f(t) = \cos(3t)$.

Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+3^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s/2}F(s)\}\\ &= f(t-\pi/2)\,\mathcal{U}(t-\pi/2)\\ &= \cos 3(t-\pi/2)\,\mathcal{U}(t-\pi/2)\\ &= -\operatorname{sen}(3t)\,\mathcal{U}(t-\pi/2).\end{aligned}$$

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2\pi s/3}F(s)\right\}$, onde $F(s) = \dfrac{s}{s+3^2} \Rightarrow f(t) = \cos(3t)$.

Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s/3}}{s^2+3^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2\pi s/3}F(s)\}\\ &= f(t-2\pi s/3)\,\mathcal{U}(t-2\pi s/3)\\ &= \cos 3(t-2\pi s/3)\,\mathcal{U}(t-2\pi s/3)\\ &= \cos(3t)\,\mathcal{U}(t-2\pi s/3).\end{aligned}$$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{(s-5)^2+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s}G(s)\right\}$. onde $G(s) = \dfrac{1}{(s-5)^2+4^2}$.

Seja $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4^2}$ então $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \dfrac{\operatorname{sen}(4t)}{4}$.

Agora

$$G(s) = \frac{1}{(s-5)^2+4^2} = F(s-5).$$

Portanto,

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^2+4^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-5)\right\} = e^{5t}f(t) = \frac{1}{4}e^{5t}\ \text{sen}\ (4t)$$

(pelo 1º teorema da translação).

Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s-5)^2+16}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s}G(s)\right\} \\ &= g(t-3)\,\mathcal{U}(t-3) \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{U}(t-3)\,e^{5(t-3)}\ \text{sen}\ 4(t-3).\end{aligned}$$

2.7.6 Derivada da Transformada de Laplace

Lema 2.7.7. *Se* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *então*

$$F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}.$$

Mais geral,

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}(F(s)).$$

Exemplo 2.7.15. *Determine a transformada de Laplace de* $t^2\ \text{sen}\ (5t)$.

Solução: Temos que

$$\mathcal{L}\{\ \text{sen}\ (5t)\} = F(s) = \frac{5}{s^2+25},$$

logo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2 \text{ sen } (5t)\} &= (-1)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{5}{s^2+25}\right] \\ &= 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{-2s}{(s^2+25)}\right] \\ &= \frac{5(6s^2-50)}{(s^2+25)^3}.\end{aligned}$$

2.7.7 Resolução de Equações diferenciais pela Transformada de Laplace

2.7.7.1 Transformada de Laplace para Derivadas de uma função

Lema 2.7.8. *Seja $y(t)$ uma função $n-$ vezes derivável e satisfazem as hipóteses do Teorema 2.7.1, então*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}\right\}(t) = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0)\cdots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0),$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Portanto,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}(t) = sY(s) - y(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right\}(t) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0).$$

Demonstração. Como $F(s) := \mathcal{L}\{y(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}y(t)\,\mathrm{d}t$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}y'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[e^{-st}y(t)\right]\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}y(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{integração por partes} \\ &= 0 - y(0) + sY(s) \\ &= sY(s) - y(0)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''(t)\} &= \mathcal{L}\{g'(t)\} \quad \text{onde } g(t) = y'(t) \\
&= sG(s) - g(0) \\
&= s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \\
&= s\mathcal{L}\{y'(t)\} - y'(0) \\
&= s\{sY(s) - y(0)\} - y'(0) \\
&= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0).
\end{aligned}$$

■

2.7.7.2 Resolução de equações diferenciais ordinárias de coeficientes constantes

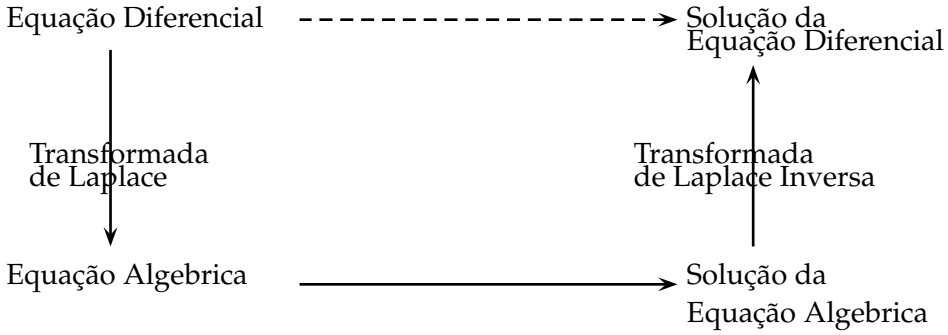
O problema de valor inicial da equação diferencial linear de ordem n :

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_n y = g(t)$$

com

$$\begin{cases}
y(t_0) = y_0 \\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) = y_0' \\
\quad\vdots \\
\dfrac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}(t_0) = y_0^{(n-1)}
\end{cases}.$$

pode ser resolvida através da transformada de Laplace como indicado no diagrama abaixo.



Exemplo 2.7.16. *Use a transformada de Laplace para encontrar* $y(t)$:

(a) $y' + 4y = e^{-4t}$, $y(0) = 2$,

(b) $y' - y = 1 + te^t, \;\; y(0) = 0,$

(c) $y'' + 2y' + y = 0, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 1,$

(d) $y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t}, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$

Solução:

(a) $y' + 4y = e^{-4t}, \;\; y(0) = 2.$

Tomando a transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{e^{-4t}\} \\ \Rightarrow sY(s) - y(0) + 4Y(s) &= \frac{1}{s+4} \\ \Rightarrow sY(s) - 2 + 4Y(s) &= \frac{1}{s+4} \\ \Rightarrow (s+4)Y(s) &= \frac{1}{s+4} + 2 \quad \text{Equação Algébrica} \end{aligned}$$

Resolvendo a equação algébrica por $Y(s)$ temos que

$$Y(s) = \frac{1}{(s+4)^2} + \frac{2}{s+4}$$

Tomando a Transformada de Inversa de Laplace, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \\ \Rightarrow y(t) &= te^{-4t} + 2e^{-4t}. \end{aligned}$$

(b) $y' - y = 1 + te^t, \;\; y(0) = 0.$

Tomando a transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{te^t\} \\ \Rightarrow sY(s) - y(0) - Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2} \\ \Rightarrow sY(s) - Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2} \\ \Rightarrow (s-1)Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2} \end{aligned}$$

Resolvendo a equação algébrica por $Y(s)$ temos que

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^3} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^3}$$

Tomando a Transformada de Inversa de Laplace, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} \\ \Rightarrow y(t) &= e^t - 1 + \frac{1}{2}t^2e^t. \end{aligned}$$

(c) $y'' + 2y' + y = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1.$

Tomando a transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} &= 0 \\ \Rightarrow s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\{sY(s) - y(0)\} + Y(s) &= 0 \\ \Rightarrow s^2Y(s) - s - 1 + 2sY(s) - 2 + Y(s) &= 0 \\ \Rightarrow (s^2 + 2s + 1)Y(s) &= s + 3 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação algébrica por $Y(s)$ temos que

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+1} = \frac{s+3}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

Tomando a Transformada de Inversa de Laplace, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} \\ \Rightarrow y(t) &= e^{-t} + 2te^{-t}. \end{aligned}$$

(d) $y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t}, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0.$

Tomando a transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{t^3e^{2t}\} \\
\Rightarrow s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4\{sY(s) - y(0)\} + 4Y(s) &= \frac{6}{(s-2)^4} \\
\Rightarrow s^2Y(s) - 4sY(s) + 4Y(s) &= \frac{6}{(s-2)^4} \\
\Rightarrow (s^2 - 4s + 4)Y(s) &= \frac{6}{(s-2)^4}
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação algébrica por $Y(s)$ temos que

$$Y(s) = \frac{6}{(s^2 - 4s + 4)(s-2)^4} = \frac{6}{(s-2)^6}$$

Tomando a Transformada de Inversa de Laplace, temos que

$$\begin{aligned}
y(t) &= 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^6}\right\} \\
\Rightarrow y(t) &= \frac{6}{5!}t^5e^{2t}.
\end{aligned}$$

2.7.8 Tabela da Transformada de Laplace de Algumas Funções e suas propriedades

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$t^n\ (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^a\ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$f(t)u(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$
$\delta(t-a)$	e^{-sa}
$f(t)\delta(t-a)$	$e^{-as}f(a)$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$	$sY(s) - y(0)$
$\frac{\mathrm{d}^2y}{dt^2}$	$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$

2.7.9 Exercícios

1. Calcule a Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$, sendo:

   (a) $f(t) = 2e^{-3t} - 5\,\text{sen}\,(8t) + 7t^3$. Resp: $F(s) = \dfrac{2}{s+3} - \dfrac{40}{s^2+64} + \dfrac{42}{s^4}$

   (b) $f(t) = 2e^{-6t}\cos(4t) + 4e^{-5t}\,\text{sen}\,(3t)$. Resp: $F(s) = \dfrac{2s+12}{(s+6)^2+16} + \dfrac{12}{(s+5)^2+9}$

   (c) $f(t) = 4t^2e^{5t} + 6\cos(4t) - 10$. Resp: $F(s) = \dfrac{8}{(s-5)^3} - \dfrac{6s}{s^2+16} - \dfrac{10}{s}$

   (d) $f(t) = 5e^{6t} + 4\cos(6t) - 2t^4$. Resp: $F(s) = \dfrac{5}{s-6} - \dfrac{4s}{s^2+36} - \dfrac{48}{s^5}$

   (e) $f(t) = 3t^5e^{-6t} - 4\,\text{sen}\,(8t) + 9$. Resp: $F(s) = \dfrac{360}{(s+6)^6} - \dfrac{32}{s^2+64} + \dfrac{9}{s}$

2. Escreva cada uma das funções em termos de funções degrau unitário. Ache a transformada de Laplace da função dada.

   (a) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 3 \\ -2, & t \ge 3 \end{cases}$ Resp: $f(t) = 2 - 4\mathcal{U}(t-3)$, $F(s) = \dfrac{2}{s} - \dfrac{4e^{-3s}}{s}$

   (b) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ 0, & 4 \le t < 5 \\ 1, & t \ge 5 \end{cases}$ Resp: $f(t) = 1 - \mathcal{U}(t-4) + \mathcal{U}(t-5)$, $F(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-4s}}{s} + \dfrac{e^{-5s}}{s}$

   (c) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t^2, & t \ge 1 \end{cases}$ Resp: $f(t) = t^2 \cdot \mathcal{U}(t-1)$, $F(s) = \dfrac{2e^{-s}}{s^3} + \dfrac{2e^{-s}}{s^2} + \dfrac{e^{-s}}{s}$

   (d) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3\pi/2 \\ \text{sen}\,t, & t \ge 3\pi/2 \end{cases}$ Resp: $f(t) = \text{sen}\,t \cdot \mathcal{U}(t - \dfrac{3\pi}{2})$, $F(s) = \dfrac{-se^{-3\pi s/2}}{s^2+1}$

   (e) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$ Resp: $f(t) = t - t \cdot \mathcal{U}(t-2)$, $F(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-2s}}{s^2} - \dfrac{2e^{-2s}}{s}$

   (f) $f(t) = \begin{cases} \text{sen}\,t, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$ Resp: $f(t) = \text{sen}\,t - \text{sen}\,t \cdot \mathcal{U}(t-2\pi)$, $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

3. Calcule a inversa da Transformada de Laplace $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, , sendo:

   (a) $F(s) = \dfrac{6}{s^3} - \dfrac{8}{s^2+9} + \dfrac{2}{s-5}$. Resp: $f(t) = 3t^2 - \dfrac{8}{3}\,\text{sen}\,(3t) + 2e^{5t}$

   (b) $F(s) = \dfrac{3}{s} + \dfrac{4s}{s^2+81} + \dfrac{5}{(s+6)^3}$. Resp: $f(t) = 3 + 4\cos(9t) + \dfrac{5}{2}t^2e^{-6t}$

(c) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2-4)(s+1)}$ Resp: $f(t) = -\dfrac{1}{3}\cosh(2t) + \dfrac{2}{3}\operatorname{sinh}(2t) + \dfrac{1}{3}e^{-t}$

(d) $F(s) = \dfrac{3s^2+5s-3}{s(s-1)^2}$. Resp: $f(t) = 5te^t + 6e^t - 3$

(e) $F(s) = \dfrac{4}{(s^2+1)(s-3)}$. Resp: $f(t) = -\dfrac{2}{5}\cos t - \dfrac{6}{5}\operatorname{sen} t + \dfrac{2}{5}e^{3t}$

(f) $F(s) = \dfrac{1}{(s-2)^2+9}$. Resp: $f(t) = \dfrac{1}{3}e^{2t}\operatorname{sen}(3t)$

(g) $F(s) = \dfrac{s+4}{(s+4)^2+1}$. Resp: $f(t) = e^{-4t}\cos t$

(h) $F(s) = \dfrac{s-1}{s^2-2s+10}$. Resp: $f(t) = e^t\cos(3t)$

(i) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s+1}$. Resp: $f(t) = e^{-(t-2)}\cdot\mathcal{U}(t-2)$

(j) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}$. Resp: $f(t) = (1-t+e^{t-2})\cdot\mathcal{U}(t-2)$

4. Use a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado.

(a) $y' - 3y = e^{3t}, \quad y(0) = 1$ Resp: $y(t) = 2e^{3t} - e^{2t}$

(b) $y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 6$ Resp: $y(t) = \left(2 + \dfrac{t^4}{12}\right)e^{3t}$

(c) $y'' + 16y = \cos 4t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ Resp: $y(t) = \dfrac{(2+t)\operatorname{sen}(4t)}{8}$

(d) $y' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad$ sendo $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 5, & t \ge 1 \end{cases}$

Resp: $y(t) = [5 - 5e^{-(t-1)}]\cdot\mathcal{U}(t-1)$

(e) $y' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad$ sendo $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & t \ge 1 \end{cases}$

Resp: $y(t) = 1 - e^{-t} - 2\cdot\mathcal{U}(t-1) + 2e^{-(t-1)}\cdot\mathcal{U}(t-1)$

(f) $y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad$ sendo $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

Resp: $y(t) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}e^{-2t} - \dfrac{1}{4}\cdot\mathcal{U}(t-1) - \dfrac{1}{2}(t-1)\cdot\mathcal{U}(t-1) + \dfrac{1}{4}e^{-2(t-1)}\cdot\mathcal{U}(t-1)$

(g) $y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1, \quad$ sendo $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

Resp: $y(t) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\cos(2t) - \left[\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\cos 2(t-1)\right]\cdot\mathcal{U}(t-1) - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$

(h) $y'' + 4y = \operatorname{sen} t\cdot\mathcal{U}(t-2\pi), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

Resp: $y = \cos(2t) - \dfrac{1}{6}\operatorname{sen} 2(t-2\pi)\cdot\mathcal{U}(t-2\pi) + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}(t-2\pi)\cdot\mathcal{U}(t-2\pi)$

(i) $y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \quad$ sendo $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi \\ 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$

Resp: $y = \operatorname{sen} t + [1 - \cos(t - \pi)] \cdot \mathcal{U}(t - \pi) - [1 - \cos(t - 2\pi)] \cdot \mathcal{U}(t - 2\pi)$

Bibliografia

[1] Abunahman, Sérgio A. **Equações diferenciais**, Rio de Janeiro, Livros Técnicos Editora.

[2] Boyce, William E., Diprima, Richard C. **Elementary differential equations and boundary value problems**, New York, John Wiley, (1969).

[3] Ayres, Frank. **. Equações Diferenciais**,. São Paulo, Editora, McGraw-Hill do Brasil (1978)

[4] Braun, M. **Equações Diferenciais e suas aplicações**.

Universidade Federal da Bahia

PROGRAD
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

Instituto de Matemática
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

SEAD
Superintendência de Educação a Distância | UFBA

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

NELT NÚCLEO DE ESTUDOS DE Linguagens & Tecnologias