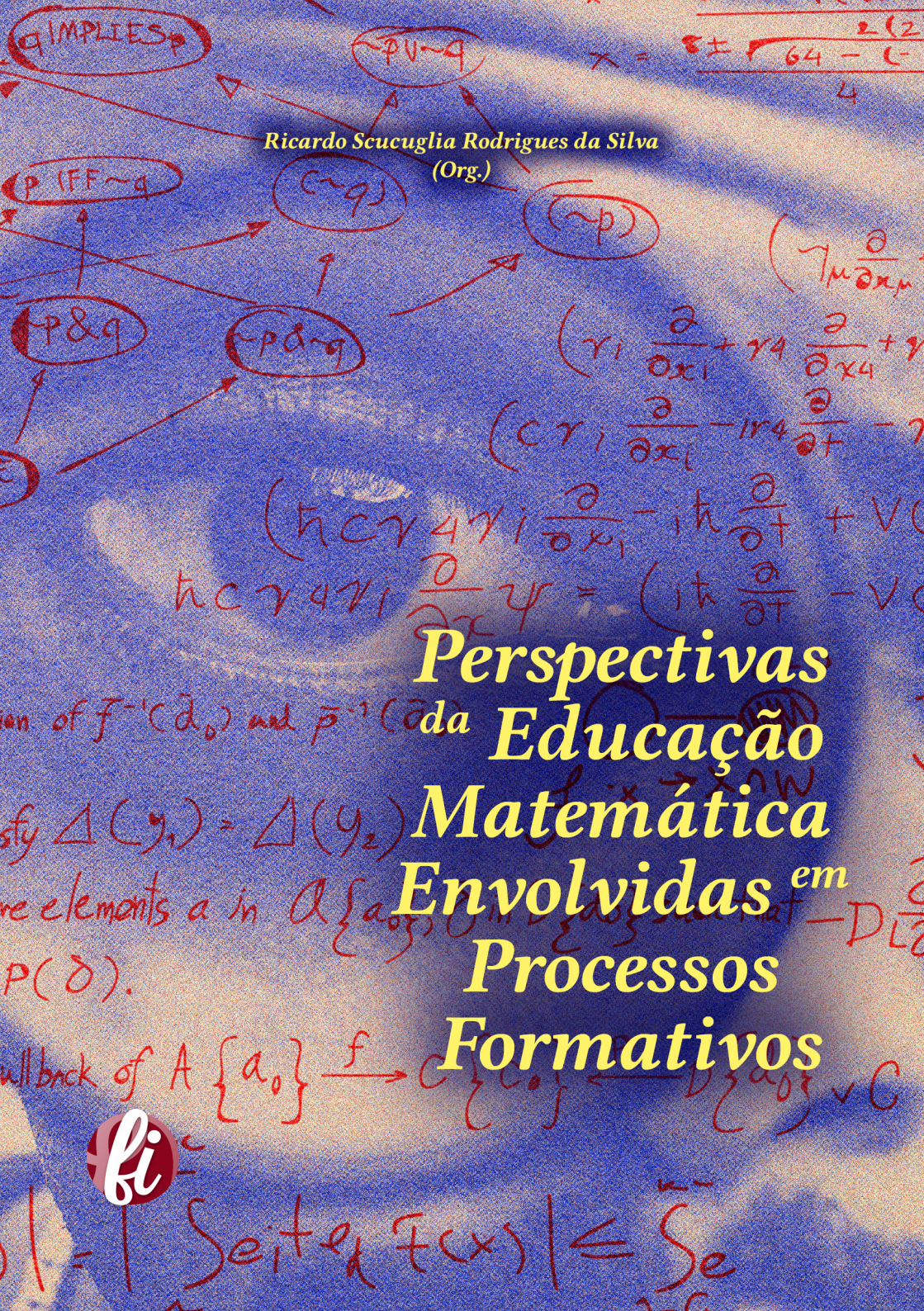


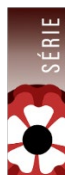


Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva
(Org.)

Perspectivas da Educação Matemática Envolvidas em Processos Formativos



**PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
ENVOLVIDAS EM PROCESSOS FORMATIVOS**



Processos Formativos

DIRETORES DA SÉRIE

Prof. Dr. Ana Paula Leivar Brancaleoni
(Unesp/FCAV)

Prof. Dr. Jackson Gois
(Unesp/IBILCE)

Prof. Dr. Humberto Perinelli Neto
(Unesp/IBILCE)

Prof. Dr. Ricardo Scucuglia
(Unesp/IBILCE)

COMITÊ EDITORIAL CIENTÍFICO

Prof. Dr. Adriano Vargas Freitas
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Prof. Dr. Alejandro Pimiento Betancur
Universidad de Antioquia (Colômbia)

Alexandre Maia do Bomfim
Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ)

Prof. Dr. Alexandre Pacheco
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)

Profa. Dra. Ana Cláudia Ribeiro de Souza
Instituto Federal do Amazonas (IFAM)

Prof.ª Dr.ª Ana Clédina Rodrigues Gomes
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA)

Prof.ª Dr.ª Ana Lúcia Braz Dias
Central Michigan University (CMU/EUA)

Prof.ª Dr.ª Ana Maria de Andrade Caldeira
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)

Prof. Dr. Armando Traldi Júnior
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP)

Prof. Dr. Daniel Fernando Johnson Mardones
Universidad de Chile (UCHile)

Prof.ª Dr.ª Deise Aparecida Peralta
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)

Prof. Dr. Eder Pires de Camargo
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)

Prof. Dr. Elenilton Vieira Godoy
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Prof. Dr. Elison Paim
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof. Dr. Fernando Seffner
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Prof. Dr. George Gadanidis
Western University, Canadá

Prof. Dr. Gilson Bispo de Jesus
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB)

Profa. Dra. Ilane Ferreira Cavalcante
Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN)

Prof. Dr. João Ricardo Viola dos Santos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)

Prof. Dr. José Eustáquio Romão
Universidade Nove de Julho e Instituto Paulo Freire (Uninove e IPF)

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Prof. Dr. José Sávio Bicho de Oliveira
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA)

Prof. Dr. Klinger Teodoro Ciriaco
Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR)

Prof.ª Dr.ª Lucélia Tavares Guimarães
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS)

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)

Prof.ª Dr.ª Márcia Regina da Silva
Universidade de São Paulo (USP)

Prof.ª Dr.ª Maria Altina Silva Ramos
Universidade do Minho, Portugal

Prof.ª Dr.ª Maria Elizabeth Bianconcini de Almeida
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)

Prof.ª Dr.ª Olga Maria Pombo Martins
Universidade de Lisboa (Portugal)

Prof. Dr. Paulo Gabriel Franco dos Santos
Universidade de Brasília (UnB)

Prof. Dr. Ricardo Cantoral
Centro de Investigación e Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav, México)

Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paziani
Universidade do Oeste do Paraná (UNIOESTE)

Prof. Dr. Sidinei Cruz Sobrinho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense (IFSUL/Passo Fundo)

Prof. Dr. Vlademir Marim
Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Prof. Dr. Wagner Barbosa de Lima Palanch
Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL)

PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ENVOLVIDAS EM PROCESSOS FORMATIVOS

Organizador

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva



Diagramação: Marcelo Alves

Capa: Gabrielle do Carmo



A Editora Fi segue orientação da política de distribuição e compartilhamento da Creative Commons Atribuição-Compartilhual 4.0 Internacional https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pt_BR



O padrão ortográfico e o sistema de citações e referências bibliográficas são prerrogativas de cada autor. Da mesma forma, o conteúdo de cada capítulo é de inteira e exclusiva responsabilidade de seu respectivo autor.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P467 Perspectivas da educação matemática envolvidas em processos formativos [recurso eletrônico] / Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva (org.). – Cachoeirinha : Fi, 2024.

249p.

Inclui texto em inglês.

ISBN 978-65-5272-083-2

DOI 10.22350/9786552720832

Disponível em: <http://www.editorafi.org>

1. Educação – Matemática – Formação. I. Silva, Ricardo Scucuglia Rodrigues da.

CDU 37.02:51

SUMÁRIO

Prefácio	7
<i>Aldo Lopes</i>	
Apresentação	11
<i>Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva</i>	
1	13
Práticas inclusivas em aulas de matemática: algumas contribuições da educação matemática crítica	
<i>Amanda Queiroz Moura</i>	
2	35
A construção dos números reais na licenciatura em matemática: perspectivas para a formação do professor ante a BNCC	
<i>Giovana Aparecida Bertolucci</i>	
<i>Inocência Fernandes Balieiro Filho</i>	
3	59
A resolução de problemas em disciplinas de conhecimento específico na licenciatura em matemática: possibilidades e desafios	
<i>Douglas Matheus Gavioli Dias</i>	
<i>Inocência Fernandes Balieiro Filho</i>	
4	77
Aspectos de filosofia da matemática e de filosofia da educação matemática – Parte 1	
<i>Ricardo Mendes Grande</i>	
<i>Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva</i>	
5	103
Aspectos de filosofia da matemática e de filosofia da educação matemática – Parte 2	
<i>Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva</i>	
<i>Ricardo Mendes Grande</i>	
6	121
O uso do tema-3 para o rastreamento de dificuldades matemáticas em escolares dos anos iniciais do ensino fundamental	
<i>Michele Mara Pires Ramos Betti</i>	
<i>Maewa Martina Gomes da Silva e Souza</i>	
<i>Paulo Sérgio Teixeira do Prado</i>	

7

141

A visão da matemática e do matemático: um olhar a partir das percepções dos alunos do ensino médio

Vanessa Oechsler

Adriana Kuehn

Nathália Dolberth

Felipe Wanderherz

8

167

Vídeos digitais com inteligência artificial como prática matemática disruptiva e de valorização das culturas e tradições dos povos originários

Daise Lago P. Souto

José Fernandes T. Cunha

9

189

A produção de vídeos inserida em processos formativos: a consolidação de um caminho que resultou na formação do grupo de pesquisa tediem

Marcelo Batista de Souza

Edileusa do Socorro Valente Belo

José Ivanildo de Lima

10

215

Thirty Seconds to Mars in Mathematics Education

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

Monize Bianca Prieto

Sobre os autores

243

PREFÁCIO

Aldo Lopes

Para Paulo Freire, educar é um ato de amor, coragem e transformação:

É preciso que saibamos que, sem certas qualidades ou virtudes como amorosidade, respeito aos outros, tolerância, humildade, gosto pela alegria, gosto pela vida, abertura ao novo, disponibilidade à mudança, persistência na luta, recusa aos fatalismos, identificação com a esperança, abertura à justiça, não é possível a prática pedagógica (Freire, 2002, p. 45).

Essa visão, fundamentada em valores essenciais, guia a reflexão apresentada neste livro sobre como práticas pedagógicas transformadoras podem impactar a educação. Inspirado por esse chamado à transformação, este livro explora uma educação que acolhe a diversidade, inova por meio da tecnologia e reimagina metodologias, no contexto da educação matemática. Cada capítulo propõe uma visão renovada para transformar práticas e abrir novos horizontes no ensino.

Como Paulo Freire bem colocou, se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela, tampouco a sociedade muda. Ele nos alerta sobre o papel crítico do educador nesse processo:

A educação nem é uma força imbatível a serviço da transformação da sociedade, porque assim eu queira, nem tampouco é a perpetuação do “status quo” porque o dominante o decreta. O educador e a educadora críticos não podem pensar que, a partir do curso que coordenam ou do seminário que lideram, podem transformar o país. Mas podem demonstrar que é possível mudar. (Freire, 2002, p. 79).

É nesse espírito de inquietação crítica que os capítulos a seguir se debruçam sobre práticas que demonstram ser possível transformar o

ensino. A formação educacional é um campo dinâmico, constantemente desafiado por mudanças sociais, culturais e tecnológicas. Neste contexto de transformações, este livro reflete sobre temas como inclusão, tecnologia e metodologias inovadoras, propondo soluções para uma sociedade diversa e em constante evolução.

Composto por dez capítulos, este livro apresenta um panorama rico e diverso sobre o ensino da Matemática, aliando inovação e criticidade que refletem as tendências contemporâneas da área. Sob a lente da educação matemática crítica, a **inclusão educacional** se revela como um princípio essencial. Práticas pedagógicas inclusivas e adaptativas são não apenas uma questão de justiça social, mas também ferramentas para transformar a sala de aula em um espaço de crescimento mútuo e valorização da diversidade.

Ferramentas como a **inteligência artificial** e o uso de **vídeos** pedagógicos têm ampliado as possibilidades de personalização e engajamento no ensino. Estas tecnologias desafiam educadores a reimaginar práticas, integrando criatividade e inovação para promover aprendizagens mais significativas.

A **filosofia da matemática e da educação matemática**, ao questionar pressupostos epistemológicos e pedagógicos, convida os educadores a repensar suas práticas. Ensinar matemática, portanto, vai além da transmissão de conteúdos: é um ato de mediação que conecta o saber abstrato às vivências concretas dos estudantes, transformando o ensino em um diálogo significativo com o mundo.

Explorar a criatividade no ensino da Matemática significa **transcender o convencional**. Seja ao conectar conteúdos matemáticos à arte, à música ou à cultura, como no caso do uso de saberes indígenas ou da banda Thirty Seconds to Mars, este livro propõe inspirar

educadores e alunos a encontrar beleza e significado no raciocínio matemático.

Cada capítulo é uma peça de um quebra-cabeça maior: o de uma educação matemática mais humana, inclusiva e conectada às demandas do século XXI. Que esta jornada de descobertas inspire práticas pedagógicas transformadoras e amplie os horizontes do ensino.

Boa leitura!

Referências

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra (Coleção Leitura, 25ª edição), 2002.

APRESENTAÇÃO

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

Este livro, "Perspectivas da Educação Matemática envolvidas em Processos Formativos", tem sua gênese associada a intenção em sistematizar pesquisas desenvolvidas por docentes da linha Educação Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino e Processos Formativos da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), envolvendo também pesquisadores externos ao Programa. O livro reúne reflexões, pesquisas e experiências práticas que exploram o ensino de Matemática sob múltiplas óticas. Ele se propõe a dialogar com questões contemporâneas, abrangendo desde os fundamentos filosóficos da Matemática até práticas inovadoras com tecnologias digitais, sempre com um olhar atento à formação docente, a questões sobre aprendizagem e ao impacto na sala de aula.

Organizado em dez capítulos, o livro reflete a diversidade de abordagens na Educação Matemática. Cada capítulo é assinado por autores que trazem contribuições originais em temas como inclusão, resolução de problemas, formação docente, e o uso de vídeos e tecnologias digitais. Esses textos dialogam entre si, compondo um mosaico que evidencia a riqueza e a complexidade da área.

Dentre os destaques, encontramos discussões sobre práticas inclusivas fundamentadas na Educação Matemática Crítica, mostrando como princípios de equidade podem transformar a sala de aula em um espaço mais democrático. Também há reflexões sobre os números reais na formação docente, ressaltando a importância de uma abordagem alinhada às demandas práticas da educação básica. A interseção entre

Matemática e artes, bem como a valorização das culturas e tradições indígenas por meio de práticas digitais, são temas que conferem ao livro uma dimensão interdisciplinar e culturalmente sensível. Esses capítulos reforçam o potencial transformador da Educação Matemática quando pensada em diálogo com diferentes contextos sociais.

Outro aspecto central é a utilização de vídeos digitais e inteligência artificial como ferramentas de ensino, propondo caminhos disruptivos e colaborativos para a formação docente. Esses capítulos conectam teorias de ensino à prática, sugerindo metodologias que podem ser aplicadas em diversas realidades educacionais. O livro também se debruça sobre questões filosóficas, divididas em dois capítulos, que discutem as bases do pensamento matemático e sua relação com a educação. Essas reflexões ajudam a contextualizar as práticas educativas dentro de um quadro epistemológico mais amplo, essencial para a formação de professores críticos e reflexivos.

Com esta obra, buscamos contribuir para o fortalecimento da pesquisa e da prática em Educação Matemática, oferecendo um referencial que dialoga com as demandas do ensino contemporâneo. É uma leitura indispensável para professores, pesquisadores e estudantes interessados em compreender e inovar nessa área. Desejamos que as reflexões e propostas apresentadas aqui inspirem novas práticas e pesquisas, contribuindo para a construção de uma Educação Matemática mais inclusiva, criativa e transformadora.

Registramos agradecimento especial ao Programa de Pós-graduação em Ensino e Processos Formativos da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), pelo apoio/financiamento editorial da presente obra.

1

PRÁTICAS INCLUSIVAS EM AULAS DE MATEMÁTICA: ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA

Amanda Queiroz Moura

Introdução

A Educação Inclusiva tem sido um tema de destaque no campo educacional nas últimas décadas em muitos países ao redor do mundo. Baseada em conceitos relacionados aos direitos humanos, a educação inclusiva avança com um ideal de equidade. Tal perspectiva pressupõe uma educação pensada para cada um, ou seja, uma educação que valorize as competências de cada aluno e que atenda plenamente às suas necessidades educacionais, e que seja organizada para que todos possam aprender.

Esta perspectiva dirige-se a todos os estudantes e beneficia principalmente aqueles que foram historicamente excluídos e/ou marginalizados da sociedade, bem como todas as pessoas que não têm as mesmas oportunidades educativas que a maioria da população. Devido à exclusão histórica sofrida pelo grupo de pessoas com deficiência durante um longo período e à luta pelo acesso e pela democratização da educação, grande parte das preocupações com a educação inclusiva está relacionada à escolarização desses alunos.

Para Kollosche et al (2019), a principal motivação para tais preocupações estabeleceu um conjunto de declarações internacionais relacionadas à inclusão na educação, que estabeleceram bases legais e contribuíram para a conscientização das pessoas envolvidas neste campo. Por exemplo, a Declaração de Salamanca sobre Necessidades

Educativas Especiais (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura, 1994) e a Convenção sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência (Nações Unidas, 2006), que foram adotadas por vários países.

Assim, a maior parte das produções envolvendo esses temas no contexto da Educação Matemática tem apresentado preocupações relacionadas aos alunos com deficiência ou necessidades especiais de aprendizagem (Kollosche et al, 2019). No entanto, as discussões relacionadas com a aprendizagem da matemática por parte de outros grupos de estudantes também têm sido relacionadas com noções de inclusão e diversidade (Bishop, Tan, & Barkatsas, 2015).

Kollosche et al (2019) veem a inclusão como um compromisso ético na busca por formas de conviver e aprender juntos e lidar de forma produtiva com as diferenças e a diversidade, de modo a não esconder ou excluir pessoas nos ambientes de ensino. Os autores reconhecem o quão desafiador pode ser um processo de inclusão nas aulas de matemática, uma vez que ainda não está claro quais recursos e esforços podem ser desenvolvidos ou realizados em prol da inclusão.

Por outro lado, Askew (2015) afirma que a forma como o conceito de diversidade tem sido compreendido tem impactado nas diferentes formas de reagir às diferenças que os alunos trazem para as aulas de matemática. Para o autor, o discurso nos ambientes educacionais tem enquadrado a diversidade como um obstáculo ao ensino e à aprendizagem da matemática, muitas vezes reduzindo essa experiência a práticas individuais, que acabam por excluir os alunos dos processos de aprendizagem em sala de aula.

Askew (2015) argumenta ainda que ver a diversidade como um “problema” individual do aluno é uma forma de celebrar o currículo de matemática, ou seja, não há espaço para questionamentos sobre o

currículo e a forma como a matemática é ensinada. Assim, os alunos são direcionados a se envolver de forma mais eficiente com um currículo pré-determinado. Esta abordagem tradicional da educação nunca questiona as intenções do currículo e procura sempre levar grupos de alunos a resultados únicos, transformando a diversidade e a inclusão num problema para a educação.

Por mais que ainda existam incertezas relacionadas às práticas que favorecem a diversidade e a inclusão nas aulas de matemática, fica claro que a forma como tais conceitos têm sido compreendidos tem afetado muitas vezes negativamente as experiências de aprendizagem de alunos pertencentes a grupos minoritários. Isto nos leva a uma importante relação a ser considerada entre a inclusão e as concepções sobre tal fenômeno.

Segundo Skovsmose (2009), a realidade em que vivemos é constituída através de perspectivas, conceitos e ideias, e o nosso mundo da vida é constituído através de discursos. Isso não implica, porém, que apenas uma mudança de discurso mudaria algumas situações. Por exemplo, não podemos fazer com que uma pessoa com deficiência se torne não-deficiente mudando o nosso discurso, mas é possível mudar a perspectiva sobre a deficiência e sobre as pessoas com deficiência mudando o discurso.

Outro ponto importante destacado por Skovsmose (2009) são as preocupações (ou a falta delas) que surgem das mudanças no discurso. Nesse sentido, o autor enfatiza a importância dos conceitos relacionados à aprendizagem e defende que uma perspectiva de aprendizagem pode ser estabelecida por meio de uma rede de conceitos.

Com base nesta ideia, este texto apresenta alguns conceitos relacionados com a Educação Matemática Crítica na perspectiva de Ole Skovsmose, visando estabelecer uma perspectiva de aprendizagem que

sustente práticas inclusivas a serem concebidas e implementadas no campo da Educação Matemática. Ou seja, procuramos refletir através de algumas preocupações, sobre como alguns conceitos desenvolvidos por Ole Skovsmose, ou inspirados na perspectiva da Matemática Crítica de Ole Skovsmose, têm contribuído para uma compreensão da Educação Inclusiva, que abraça as diferenças e a diversidade sem ser influenciada por estereótipos e /ou discursos dominantes.

A seguir, apresento os conceitos de deficiencialismo, microexclusões, *foreground*, significado, cenários para investigação inclusivos e diálogo. Por fim, discuto como tais conceitos podem contribuir para práticas inclusivas nas aulas de matemática.

Deficiencialismo

Um aspecto da educação matemática crítica é o cuidado de não assumir nada sobre a capacidade do outro (Skovsmose, 2016). Especificamente, no que diz respeito às questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem de pessoas com deficiência, a educação matemática crítica apresenta o conceito de deficiencialismo.

O deficiencialismo refere-se às maneiras pelas quais a deficiência foi construída através de padrões de normalidade. Esse conceito foi desenvolvido por Marcone (2015), inspirado na literatura anticolonial e nas teorias pós-coloniais, que discutem as formas como se estabeleceram as relações entre os países ocidentais e suas colônias orientais. O autor entende o conceito de deficiência como algo inventado por um grupo que se considera normal e coloca o grupo de pessoas com deficiência como distinto deles. Assim, embora apoiado em discursos politicamente corretos, a ideia de dicotomia decorrente desse entendimento causa tensões.

Dessa forma, o deficiencialismo fornece opiniões sobre o que as pessoas com deficiência são ou não capazes de fazer. Esta é uma concepção frequentemente identificada nas práticas de ensino de matemática voltadas para alunos com deficiência, por exemplo, de que um aluno cego não é capaz de aprender álgebra abstrata ou de que um aluno surdo não é capaz de expressar seu raciocínio matemático. Enfrentar a deficiência requer uma mudança na compreensão da deficiência.

Para Marcone (2019, p. 49), a deficiência está relacionada a “uma construção do normal para compreender ou afastar a ameaça que o anormal representa” e sua definição tem poucas ligações com a pessoa com deficiência. “As representações das deficiências baseiam-se numa rede de tradições, estereótipos, convenções e códigos de compreensão legitimados por instituições, como a Organização Mundial da Saúde (OMS), que monopolizam esta rede” (p. 49).

Estas estruturas transmitem a crença de que as definições de deficiência estão intrinsecamente relacionadas com o indivíduo e utilizam características relacionadas com a experiência da deficiência para dominar e oprimir as pessoas com deficiência. Ao conjunto de discursos e narrativas que definem quem pode ou não realizar determinadas tarefas, Marcone (2019) chama de deficiencialismo.

“Desafiar o deficiencialismo é crucial para a educação matemática crítica” (Skovsmose, 2016, p. 5). O autor enfatiza que só assim é possível alterar concepções e discursos pré-definidos sobre a capacidade de aprendizagem de determinados grupos de alunos. Assim, a deficiência é uma das principais preocupações da Educação Matemática Crítica no que diz respeito às práticas inclusivas. A mudança nas concepções e discursos sobre a deficiência abre espaço para que diferentes perspectivas e formas de vivenciar a aprendizagem estejam presentes nas aulas de matemática.

Microexclusões

A ampliação das discussões voltadas ao direito à educação para todos os alunos, bem como a criação de políticas educacionais que garantam o acesso e a permanência dos alunos com deficiência nos espaços escolares, tem suscitado preocupações sobre uma educação verdadeiramente inclusiva.

Mesmo que haja avanços no que diz respeito à educação dos alunos com deficiência, bem como na compreensão da deficiência, existem fatores dentro do contexto escolar que têm sido obstáculos para que os alunos com deficiência sejam verdadeiramente incluídos neste espaço. Um destes obstáculos diz respeito aos processos de exclusão, nem sempre explícitos e fáceis de identificar, que Faustino et al (2019) designam por microexclusões.

As microexclusões ocorrem por meio de práticas sutis, conscientes ou não, que tendem a isolar uma pessoa em determinado ambiente organizado com a intenção de ser inclusivo, mostrando-se como um obstáculo ao seu desenvolvimento como um todo, em particular à aprendizagem dos alunos que vivenciam deles, que podem desenvolver sentimentos de inferioridade em relação aos demais alunos.

O prefixo micro refere-se ao contexto em que ocorrem as microexclusões, que podem ser de pequenos grupos ou mesmo individualmente. Embora possa dar a falsa impressão de pequenas ações, mesmo que aconteça por meio de um ato inconsciente de quem as realiza, a nebulosidade e a sutileza das ações realizadas podem tornar as microexclusões brutais e severas. Ainda sobre as microexclusões, Faustino et al (2018) afirmam que:

são praticadas em contextos considerados inclusivos, muitas vezes ligados a questões não apenas ligadas à discriminação e ao preconceito, mas a

práticas que levam ao isolamento, à marginalização e colaboram para desumanizar os alunos 'incluídos' em tais ambientes (p. 909).

Faustino et al (2019), ao discutir casos de microexclusão que podem ocorrer em contextos inclusivos, identificaram oito tipos diferentes disso: por ignorar, por normalizar, por dar atenção especial, por bloquear, por rotular, por desqualificar, por estigmatizar, e institucionalizar. Estas não são as únicas formas pelas quais as microexclusões podem acontecer, mas pensar nelas ajuda-nos a promover estratégias que minimizem tais atos.

Moura (2020) discute as Microexclusões no contexto das investigações nas aulas de matemática, nas quais estão juntos alunos surdos e ouvintes. Os tipos de microexclusões mais percebidos foram: por ignorar, quando as perspectivas ou condições dos alunos não foram levadas em consideração durante a tarefa, por exemplo, quando não explicaram em Língua Brasileira de Sinais (Libras) para que os surdos pudessem compreender; pela desqualificação, quando apenas as habilidades dos alunos surdos eram postas em dúvida para a execução de determinada tarefa; pela estigmatização, quando os ouvintes responsabilizavam os surdos por ações consideradas erradas e, pela atenção especial, em que o esforço para a participação dos surdos nos processos de ensino e aprendizagem, acabou ignorando a presença dos ouvintes.

Essas microexclusões representaram um obstáculo à inclusão dos estudantes surdos. Ignorar as perspectivas dos participantes foi uma ação que comprometeu diretamente a almejada coletividade e colaboração durante o desenvolvimento das tarefas, não permitindo que novas ideias fossem exploradas ou construídas. A desqualificação ou estigmatização dos estudantes surdos foram ações que operaram contra a construção da equidade neste ambiente de aprendizagem.

Ao observar aulas de matemática com a presença de estudantes autistas, Ferro (2021) também identificou a presença de microexclusões. Uma das principais observações da pesquisadora diz respeito à forma como a sala de aula era organizada, em que os estudantes não autistas se sentavam em duplas e os estudantes autistas sozinhos ou acompanhados por um agente educacional. Essa situação foi caracterizada por ela como microexclusão por dar atenção especial.

Nesse contexto, Ferro (2021) também identificou que são frequentes as ações de microexclusões por bloqueio e por ignorar, uma vez que, em diversas situações, os estudantes autistas foram impedidos de participar de determinadas atividades com a turma ou ignorados durante o desenvolvimento de determinadas tarefas. A autora destaca que as ações de microexclusão são influenciadas por resquícios de discursos normalizadores, que ainda permeiam os espaços escolares.

Vale ressaltar que as ações que geram microexclusões não acontecem apenas nos ambientes escolares. Contudo, estar atento a tais ações nos ambientes de ensino e aprendizagem de matemática, especialmente aqueles que foram concebidos para serem inclusivos, é uma das preocupações da educação matemática crítica, visando práticas efetivamente inclusivas.

Foreground

As preocupações sobre as razões que contribuem para a aprendizagem dos estudantes são frequentemente discutidas a partir de diferentes perspectivas de investigação. A perspectiva da educação matemática crítica também está incluída neste grupo. Do ponto de vista social, um dos conceitos que têm contribuído para a compreensão dos motivos do aluno no que diz respeito à sua aprendizagem é o conceito

de *Foreground*, desenvolvido por Skovsmose (1994, 2007, 2014, 2018). Para o autor, *Foreground* está relacionado às oportunidades que situações culturais, políticas, econômicas e sociais podem proporcionar a uma pessoa. Em outras palavras, *Foreground* refere-se às perspectivas futuras de uma pessoa e como as oportunidades são percebidas por ela em uma determinada situação.

O *Foreground* representa expectativas, aspirações, conquistas e esperanças. Para Roncato (2021), tal conceito não se trata de alcançar determinado lugar ou posição no futuro, mas está relacionado ao reconhecimento de que é possível (ou não) alcançar determinados lugares ou posições do que está por vir.

Algumas relações entre *background* e *foreground* contribuem para explorar outros aspectos do conceito de *foreground* (Skovsmose, 2011). As experiências vividas não podem ser ignoradas quando se pensa nas oportunidades futuras de uma pessoa. Nesse sentido, a formação de uma pessoa pode contribuir para a construção do seu *foreground*, porém, não é fator determinante para isso.

As experiências e sentimentos que constituem o *background* estão no passado e não há possibilidade de mudança. Contudo, as possibilidades relacionadas ao futuro são amplas e podem ser interpretadas de diversas maneiras. É precisamente por esta razão que, embora influencie as perspectivas futuras, o contexto não é uma característica crucial para tais perspectivas.

Por outro lado, existe a possibilidade de que o *foreground* de determinados grupos de estudantes seja arruinado. Skovsmose (2009) ressalta que isso acontece quando não existem oportunidades realistas ou atraentes, mas isso não significa que elas não existam. O autor afirma que há espaço para esperança num *foreground* arruinado, que reflete

tanto as condições de vida dos estudantes como os conflitos e contradições que vivenciam.

Entende-se que *foregrounds* arruinados podem ser um desafio para a aprendizagem do aluno, pois esses alunos, pela falta de perspectivas relacionadas ao seu futuro, têm pouco ou nenhum motivo para aprender ou se engajar nas atividades propostas em sala de aula. Discursos normalizadores, microexclusões e exclusões de natureza econômica, social e cultural contribuem para a ruína de novos *foregrounds*. Contudo, Biotto Filho (2015) apresenta possibilidades de reelaboração de *foregrounds*.

Roncato (2021), ao investigar o significado na Educação Matemática atribuído aos estudos de pessoas com deficiência que frequentam o ensino superior, identificou como o *foreground* pode influenciar o engajamento desses alunos nas aulas de matemática e até mesmo a reelaboração de suas expectativas em relação ao futuro.

Nesse sentido, destaca-se aqui a importância de refletir sobre os *foreground* dos estudantes, especialmente dos estudantes com deficiência ou pertencem a outros grupos historicamente marginalizados. As práticas inclusivas nas aulas de matemática devem abranger a preocupação de como os estudantes percebem suas oportunidades futuras, bem como espaços para que ampliem suas expectativas em relação ao futuro, que muitas vezes tem sido limitado por uma visão limitante que os tem impedido de projetar perspectivas.

Significado e Intencionalidade

A noção de significado está inclusa dentre as preocupações que têm contribuído para a compreensão da educação matemática crítica no que diz respeito à aprendizagem dos alunos. Nessa perspectiva, o

significado está relacionado à ação e pode ser analisado em termos de atividade, intencionalidade e *foreground*. De acordo com Skovsmose (2009),

O significado da atividade em sala de aula é primeiramente construído pelos alunos. Esta construção dependerá da situação do aluno e dependerá principalmente da sua intencionalidade. A construção de significado acontece em termos do que os alunos podem ver como suas possibilidades. (p. 105)

O significado de uma atividade pode incluir perspectivas, experiências, motivos e esperanças, de modo a contribuir para o conhecimento do aluno. Nesse sentido, Skovsmose (2009) enfatiza que compreender o significado de uma atividade nas aulas de matemática requer mais atenção do que a produção de conhecimento a respeito de um conceito matemático.

A intencionalidade é entendida como uma concepção sociopolítica estruturada. Para Skovsmose (2018) as intenções podem ser formadas tanto por fatores econômicos, religiosos e culturais, quanto por erros, conclusões precipitadas e diferentes tipos de ideologias. Assim, as informações fornecidas a um aluno sobre o seu futuro podem ter implicações na sua intencionalidade. “Quando prestamos especial atenção ao rumo que a intencionalidade toma, chegamos à noção de *foreground*. Uma ação pode ser direcionada para possibilidades e o horizonte de possibilidades constitui um *foreground*” (Skovsmose, 2018, p.768).

Para o autor, possibilidades podem ser vislumbradas a partir do significado que os alunos atribuem às experiências nas aulas de matemática. Quando os alunos não conseguem relacionar as suas experiências de aprendizagem matemática com o seu futuro, os significados atribuídos à atividade matemática não são concretizados.

Assim, Skovsmose (2018) entende que é possível uma interpretação do significado em termos de *foregrounds*, que relacione as atividades dos alunos nas aulas de matemática com suas perspectivas futuras.

O autor destaca ainda que faz sentido falar em *foregrounds* no plural, uma vez que a pessoa faz interpretações e as altera à medida que compreende novas oportunidades e possibilidades, ou reconhece novos desafios relacionados a perspectivas futuras. Dessa forma, discute como as formações sociopolíticas relacionadas aos *foregrounds* podem estruturar experiências de significado.

Outro ponto importante a considerar é a complexidade da noção de significado, uma vez que antecipar os significados de uma atividade nas aulas de matemática não é uma tarefa simples. Diferentes estudantes atribuem significados diferentes à sua aprendizagem matemática. Explorar esta diversidade de significados é também uma das preocupações da educação matemática crítica.

Por fim, Skovsmose (2009) enfatiza que a construção de significados pode ser obstruída, tornando-se um obstáculo à aprendizagem. O autor acrescenta ainda que a tradição da matemática escolar não costuma trazer significado aos alunos. Assim, muitos alunos não veem sentido em estar nessas turmas, principalmente alunos pertencentes a grupos historicamente marginalizados. Tais estudantes são frequentemente submetidos a um ensino de matemática baseado numa cultura dominante e repleto de estereótipos que não condizem com as suas experiências vividas.

As práticas inclusivas também devem considerar as formas como os estudantes compreenderam as suas experiências matemáticas e quais os significados que lhes foram atribuídos. Apoiar todos os estudantes a vislumbrarem possibilidades e estabelecerem sentido para

suas atividades nas aulas de matemática é uma forma de incluí-los nos espaços escolares.

Cenários para Investigação Inclusivos

Um dos conceitos mais conhecidos da Educação Matemática Crítica é a noção de Cenários para Investigação, que vem sendo discutida e ampliada há mais de 20 anos. Inicialmente, este conceito foi pensado como forma de criar espaços de aprendizagem que privilegiassem formas de interação que rompessem com abordagens de ensino baseadas em técnicas necessárias à resolução de exercícios em que não existem espaços de justificação ou questionamento (Skovsmose, 2000).

Para o autor, a investigação sugere formas de aprender como uma ação em que a participação dos estudantes em tarefas num cenário para investigação nunca deve soar como uma ordem, mas sim como um convite. A partir do momento em que os estudantes aceitam o convite e assumem o controle do processo de exploração, o cenário de investigação torna-se um ambiente de aprendizagem em que os próprios aprendizes são responsáveis pelo processo. Neste novo ambiente, o principal padrão de interação entre os estudantes é o diálogo, aqui entendido como uma conversa voltada para a aprendizagem (Alrø e Skovsmose, 2004).

Com o objetivo de valorizar os encontros entre os diferentes e enfatizar o potencial dos Cenários para Investigação propostos também como referência para a inclusão de pessoas com diferentes habilidades e/ou grupos sociais, Skovsmose (2019) define Cenários para Investigação Inclusivos. Esta proposta inspira-se na perspectiva do Desenho Universal de Aprendizagem, que preconiza o desenvolvimento de estratégias pedagógicas acessíveis a todos os estudantes, e que as

particularidades desses sejam vistas como possibilidades para a criação de novas estratégias de ensino e não como obstáculos à criação das tarefas.

Assumindo o diálogo como principal padrão de interação, as Cenários para Investigação Inclusivos permitem a cooperação entre os estudantes e a construção de equidade. Nesse sentido, Skovsmose (2019) enfatiza três aspectos que remetem a esta proposta: abre espaços para investigação; possibilita um ambiente de aprendizagem acessível para todos os estudantes; favorece a colaboração entre os estudantes.

Tais aspectos são destacados por Moura (2020) ao investigar as interações entre alunos surdos e ouvintes nas aulas de matemática a partir da proposta de Cenários para Investigação. Concordando com Skovsmose (2019), o autor destaca a preocupação em propor tarefas abertas que não incluam listas de exercícios e que permitam diferentes respostas dos estudantes durante o desenvolvimento da atividade. Ou seja, tarefas que convidem os estudantes a realizar investigações.

Na pesquisa de Moura, a viabilidade de um ambiente de aprendizagem acessível a todos os estudantes deveu-se principalmente à garantia de que todos pudessem compreender as tarefas e interagir com os seus pares. Assim, intérpretes de língua de sinais estiveram presentes desde o planejamento até o desenvolvimento das tarefas. Uma vez que o intérprete conhece as limitações e potencialidades da língua de sinais nos mais diversos contextos, a participação deste profissional contribuiu para o engajamento dos estudantes na investigação, especialmente na interação entre surdos e ouvintes, tornando as tarefas acessíveis a todos.

Favorecer a colaboração entre os alunos também é um aspecto destacado pelo autor. Tal favorecimento nas tarefas propostas foi possível principalmente devido à interação dialógica entre os

participantes. Durante o desenvolvimento das tarefas, estudantes ouvintes (que se comunicavam em língua de sinais) incentivaram estudantes surdos a compartilharem suas perspectivas, bem como, demonstraram preocupação com a compreensão dos colegas surdos sobre as discussões realizadas.

Cenários para Investigação Inclusivos permitem que tarefas inspiradas nesta proposta sejam desenvolvidas através de diferentes formatos e com diferentes características. Não existe um método específico a ser seguido, mas os aspectos apresentados acima podem ser entendidos como fatores que contribuem para a composição desses ambientes de aprendizagem.

Skovsmose (2019) também enfatiza o potencial dos Cenários para Investigação Inclusivos em promover encontros entre diferentes pessoas, através de uma relação respeitosa em que se enfatiza a possibilidade de aprender com diferentes pessoas. Vale ressaltar que esta noção é ampla e pode ser desenvolvida em qualquer ambiente de ensino e aprendizagem de matemática que pretenda ser inclusivo.

Carrijo (2023), por exemplo, explorou o potencial das Cenários para Investigação Inclusivos para a aprendizagem da matemática em aulas com alunos imigrantes. Estes estudantes sofrem muitas vezes discriminação e exclusão devido a vários factores relacionados com diferentes origens. Promover práticas que valorizem as diferenças e gerem reflexões sobre a opressão vivida pelos estudantes imigrantes é uma forma de construir equidade entre os estudantes, bem como contribuir para a discussão sobre a educação matemática e a diversidade.

Nesse sentido, entende-se que Cenários para Investigação Inclusivos são cruciais para o desenvolvimento de práticas inclusivas, pois abrem espaços para a criação de novas possibilidades de

aprendizagem de matemática para diferentes alunos. É preocupação da educação matemática crítica construir ambientes de aprendizagem matemática em que todos os alunos se sintam bem-vindos e convidados a participar nas tarefas propostas.

Diálogo

O diálogo é um conceito-chave da Educação Matemática Crítica, reconhecido por favorecer o estabelecimento de um pensamento crítico e reflexivo sobre a matemática e seus aspectos epistemológicos e sociopolíticos. O diálogo também é entendido como um elemento que contribui para a aprendizagem colaborativa, que valoriza o compartilhamento de perspectivas.

Uma das inspirações para esse conceito é a Epistemologia de Paulo Freire, que entende o diálogo como uma exigência existencial para a educação. Nessa perspectiva, a comunicação dialógica é um elemento fundamental para o processo de ensino e aprendizagem, o que contribuiu para a criação de uma relação horizontal entre professores e alunos, compartilhando visões de mundo e reflexões. O diálogo contribui para que as pessoas se humanizem e se reconheçam como sujeitos históricos, inacabados e autônomos.

Alrø e Skovsmose (2004), ao discutirem o conceito de diálogo nas aulas de matemática com abordagem investigativa, concluíram que um dos aspectos essenciais relacionados a esse conceito é a promoção da equidade. Os autores também enfatizam o potencial do diálogo para perceber e lidar com as diferenças por meio de um relacionamento respeitoso.

O respeito pelo outro e pelas suas formas de estar no mundo e com o mundo é uma das formas de praticar a tolerância e promover a

equidade (Moura, 2020). Uma pessoa só compartilha sua visão de mundo ou está aberta a aprender um com o outro, quando existe um relacionamento respeitoso. Ou seja, uma pessoa só desenvolve uma relação dialógica quando acredita que pode aprender com as diferenças do outro.

Desta forma, promover a equidade é uma forma de reconhecer as diferenças e a diversidade. Alrø e Skovsmose (2004) argumentam que “[...] às formas de lidar com a diversidade e a diferença, e o conceito principal é a justiça. A justiça não se refere apenas aos aspectos emocionais, mas também à forma como o conteúdo do diálogo é tratado” (p. 124).

A promoção da equidade também valoriza uma relação horizontal entre os envolvidos, para que as condições de professores e estudantes não sejam um fator que interfira nessa relação. Assim, a força dos argumentos deve estar centrada na sua importância para os objetivos do diálogo, e não no fato de esse argumento advir de uma posição que tem mais ou menos poder numa determinada relação.

Durante a interação dialógica, ao buscar compreender as perspectivas dos estudantes, o professor deixa de ser o único a ter algo a ensinar. A escuta ativa, bem como o deslocamento do professor para compreender as perspectivas dos estudantes, contribuem para a superação da relação vertical entre educador e educandos (Faustino, 2018). Nesse movimento, que visa criar uma relação horizontal durante as aulas, os estudantes se sentem confiantes para compartilhar suas perspectivas, suas visões de mundo, suas diferenças, suas habilidades e formas de se expressar matematicamente. Os professores também podem aprender sobre os estudantes e com os estudantes.

Milani (2015) entende o diálogo como um ato de ir até o outro, demonstrando interesse pelo que o outro diz. Tal atuação é fundamental

para uma relação cooperativa em que as pessoas atuem em nível de equidade, pois permite respeitar as diferenças e a diversidade, através da ação de querer saber o que o outro quer dizer, independentemente de quem seja o outro, as habilidades que possuem ou a posição que ocupam. Nesse sentido, Moura (2020) traz o diálogo como essencial para práticas inclusivas, que considerem o encontro entre diferenças nas aulas de matemática.

As formas como a comunicação acontece nas aulas de matemática são, sem dúvida, uma das grandes preocupações da educação matemática crítica. Tal perspectiva entende o potencial das relações dialógicas como influência positiva na qualidade da aprendizagem de todos os alunos, bem como enfatiza o potencial do diálogo para promover práticas inclusivas.

Considerações Finais

Neste texto, procuramos apresentar algumas das preocupações da educação matemática crítica inspiradas na perspectiva de Ole Skovsmose, que podem contribuir para o desenvolvimento de práticas inclusivas nas aulas de matemática. Embora existam vários documentos internacionais e políticas educacionais a favor da inclusão, considerando as diferenças e a diversidade, o que ainda se verifica nos ambientes escolares é uma educação estereotipada, baseada em discursos dominantes e práticas normalizadoras, sem espaços para diferenças e abertura para exclusões.

A Educação Matemática Crítica tem sido o referencial teórico para diversas investigações sobre educação inclusiva (Marcone, 2015; Moura, 2020; Roncato, 2021). Os resultados têm mostrado que existem obstáculos mesmo em ambientes educacionais planejados para serem

inclusivos, como por exemplo, as microexclusões. Ainda assim, ações práticas relacionadas aos conceitos de Cenários para Investigação Inclusivos e Diálogo, apresentam-se como possibilidades para aulas de matemática que apoiam encontros entre diferenças. Nesse sentido, Skovsmose (2019) sugere que interpretemos a educação inclusiva como um encontro entre diferenças.

Uma educação voltada para as diferenças é uma educação que considera a diversidade e combate as microexclusões que podem surgir durante os processos de aprendizagem. É uma educação que se preocupa em saber como estudantes têm percebido suas perspectivas futuras e os significados que têm sido atribuídos às suas experiências de aprendizagem. Uma educação que possa transformar os *foregrounds* arruinados em novas perspectivas reelaboradas e que contribua para a equidade para além dos limites da sala de aula.

Além disso, uma educação voltada para as diferenças é uma educação que torna um ambiente de aprendizagem acessível a todos os estudantes, que convida à investigação e incentiva a colaboração por meio de uma relação dialógica. É uma educação que prioriza o diálogo, as relações horizontais e a abertura para conhecer o outro e sobre o outro.

Finalmente, uma educação voltada para as diferenças é uma educação que apoia a implementação de práticas inclusivas. Nas aulas de matemática, este parece ser um desafio maior, dada a tradição de ensino da matemática. As preocupações críticas da educação matemática listadas acima são fundamentais para a implementação de práticas inclusivas em ambientes de ensino e aprendizagem de matemática. Tais preocupações são repletas de incertezas, assim como a educação matemática crítica em geral, porém, levar tais preocupações

em consideração é uma forma de abrir possibilidades para diferentes estudantes.

Nota

Uma versão desse capítulo foi publicada no Jornal de Filosofia da Educação Matemática, n. 39, 2022 (Philosophy of Mathematics Education Journal, n. 39, 2022.)

Referências

- ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique**. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2004.
- ASKEW, Mike. Diversity, inclusion and equity in mathematics classrooms: From individual problems to collective possibility. In: BISHOP, Alan; TAN, Hazel; BARKATSAS, Tasos N. (org.). **Diversity in mathematics education: Towards inclusive practices**. Springer International Publishing, 2015, p. 129-145.
- BIOTTO FILHO, Denival. **Quem não sonhou em ser um jogador de futebol?** trabalho com projetos para reelaborar foregrounds. 2015. 234 p. Tese - (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015.
- BISHOP, Alan; TAN, Hazel; BARKATSAS, Tasos N. (org.). **Diversity in mathematics education: Towards inclusive practices**. Springer International Publishing, 2015
- CARRIJO, Manuella Heloisa de Souza. "Get out of my country!": Confronting racism and xenophobia through inclusive mathematics education. 2023. 244p. Tese - (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015.
- FAUSTINO, Ana Carolina. **"Como você chegou a esse resultado?"**: o diálogo nas aulas de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. 2018. 232 p. Tese - (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2018.

- FAUSTINO, Ana Carolina et al. Microexclusion in inclusive mathematics education. In: KOLLOSCH, David et al. (Ed.). **Inclusive mathematics education: State-of-the-art research from Brazil and Germany**. Cham: Springer, 2019, p. 55-70.
- FAUSTINO, Ana Carolina et al. Macroinclusão e microexclusão no contexto educacional. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 12, n. 3, p. 898-911, 2018.
- FERRO, Ana. A colaboração entre professoras para o ensino de matemática em sala de aula com estudante autista. 2021. 188p. Dissertação - (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2021.
- KOLLOSCH, David et al. (Ed.). **Inclusive mathematics education: State-of-the-art research from Brazil and Germany**. Cham: Springer, 2019
- MARCONI, Renato. Who Can Learn Mathematics? In: KOLLOSCH, David et al. (Ed.). **Inclusive mathematics education: State-of-the-art research from Brazil and Germany**. Cham: Springer, 2019, p. 41-53.
- MARCONI, Renato. **Deficiencialismo: a invenção da deficiência pela normalidade**. 2015. 170 p. Tese - (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015.
- MILANI, Raquel. (2015). **O processo de aprendizagem a dialogar por futuros professores de matemática com seus alunos no estágio supervisionado**. 240 p. Tese - (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015.
- MOURA, Amanda Queiroz (2020). **O encontro entre surdos e ouvintes em cenários para investigação**: das incertezas às possibilidades nas aulas de matemática. 216 p Tese - (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2020.
- RONCATO, Célia. (2021). **Significado em educação matemática e estudantes com deficiência**: possibilidades de encontros de conceitos. 231 p. Tese - (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2021.

- SKOVSMOSE, Ole. (2019). Inclusions, meetings and landscapes. In: KOLLOSCH, David et al. (Ed.). **Inclusive mathematics education: State-of-the-art research from Brazil and Germany**. Cham: Springer, 2019, p. 71-84
- SKOVSMOSE, Ole. Interpretações de significado em educação matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 32, n. 62, p. 764-780, 2018.
- SKOVSMOSE, Ole. What could critical mathematics education mean for different groups of students? **For the Learning of Mathematics**, v. 36, n. 1, p. 2-7, 2016.
- SKOVSMOSE, Ole. **Foregrounds: Opaque stories about learning**. Springer, 2014.
- SKOVSMOSE, Ole. **An invitation to critical mathematics education**. Springer Science & Business Media, 2012.
- SKOVSMOSE, Ole. Preocupações de uma educação matemática crítica. In: FAVERO, Maria Helena e Célio da Cunha (Org). **Psicologia do conhecimento: A educação científica e filosófica na construção da cidadania**. Liber Livro, 2009. p. 101-114.
- SKOVSMOSE, Ole. **Educação crítica: incerteza, matemática, responsabilidade**. São Paulo, Cortez, 2007.
- SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.
- SKOVSMOSE, Ole. **Towards a philosophy of critical mathematics education**. Cham: Springer Science & Business Media, 1994.
- NAÇÕES UNIDAS. **Convenção sobre os direitos das pessoas com deficiência**. Nova Iorque, 2006

2

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: PERSPECTIVAS PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR ANTE A BNCC

*Giovana Aparecida Bertolucci
Inocência Fernandes Balieiro Filho*

Introdução

O conhecimento específico trabalhado nos cursos de Licenciatura em Matemática, embora tenha inúmeros elementos em comum com a Matemática Científica, deve ter seu desenvolvimento pautado na Matemática Escolar (Moreira & David, 2007), uma vez que o professor deve conhecer as diferentes representações, explanações diversas e aplicações nas mais variadas situações que envolvem o mundo prático e as outras ciências.

Essa perspectiva não infere que o conhecimento matemático específico trabalhado nas Licenciaturas deva ser abordado de forma rasa ou inferior aquele desenvolvido nos cursos de Bacharelado. Denota, na verdade, o exato oposto: o professor, além de conhecer as definições e demonstrações formais, deve ser capaz de representar e fundamentar sua argumentação de modo que os alunos compreendam e consigam construir as próprias justificativas, a partir da mediação docente, para entender a Matemática como útil e imprescindível na construção e desenvolvimento do mundo.

Consideramos que os conteúdos de Fundamentos de Análise (Análise Real, Análise na Reta, Análise Matemática, Análise dentre outras denominações) nos Cursos de Licenciatura em Matemática, têm a função de consolidar os conhecimentos desenvolvidos ao decorrer da

graduação, especialmente no que se refere ao conjunto dos números reais – conjunto numérico amplamente estudado no decorrer dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, no qual o profissional formado pela Licenciatura em Matemática irá atuar.

No Brasil, o Conselho Nacional da Educação (CNE), junto à Câmara de Educação Superior (CES) estabeleceram as Diretrizes Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, por meio do Parecer CNE/CES 1.302/2001. O documento declara que a Licenciatura deve proporcionar a “formação de professores para a educação básica” (Brasil, 2001, p.1), incluindo as características a serem desenvolvidas pelo profissional que se pretende formar. De acordo com essas orientações, os conteúdos matemáticos devem ser trabalhados por meio das concepções iniciais do licenciandos, com o intuito de que os alunos compreendam e desenvolvam uma aprendizagem significativa para sua prática profissional.

O Parecer CNE/CES 1.302/2001 direciona a formação de bacharéis e licenciados no âmbito de suas formações específicas. Para a Licenciatura, é necessário que sejam trabalhados conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica. O texto do Parecer aponta que devem ser desenvolvidos conhecimentos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise Real, conteúdos de áreas com proximidade à Matemática que fornecem problemas para aplicação de suas teorias e conteúdos da Educação, História e Filosofia das Ciências e da Matemática. (Brasil, 2001, p.6).

Em especial, Fundamentos de Análise é uma disciplina conhecida pela abordagem formal e rigorosa de conceitos relacionados ao conjunto dos números reais que são estudados ao longo da formação na

Licenciatura, como conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, com objetivo de consolidar e formalizar os conhecimentos construídos até então. A função dessa disciplina é evidente quando se trata do curso de Bacharelado em Matemática, sendo propostas outras disciplinas relacionadas, como Topologia, por exemplo, com abordagens ainda mais aprofundadas (Brasil, 2001, p. 5).

No entanto, muito se questiona a finalidade do curso de Análise em Licenciaturas, embora a Diretriz dos cursos exija que devam ser incluídos conteúdos presentes na Educação Básica que pertencem à área de Análise (Brasil, 2001, p. 6), argumentando-se que a disciplina não contribui para a prática docente, não respondendo às questões que surgem no decorrer da profissão por ser estritamente formal e voltada à Matemática Acadêmica.

Fundamentos de Análise e a formação de professores

Reis (2001) concebe os Fundamentos de Análise como fundamental na formação de professores, embora acredite que o trabalho realizado no ensino desta disciplina seja mais direcionado ao desenvolvimento do conhecimento do conteúdo. O autor ressalta que embora esse conhecimento seja importante para formação de professores, não é suficiente, no entanto, sendo necessário trabalhar com a multiplicidade dessas ideias, suas especificidades e as relações pedagógicas e curriculares que estabelecem no Ensino Básico.

O rigor não deve ser transposto, pois de acordo com Reis (2001) é necessário que os conceitos sejam compreensíveis e significativos para os licenciandos, não de modo a menosprezar o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos para o futuro professor, mas para promover uma compreensão ampla e abrangente. Reis (2001) conclui

que o rigor e a intuição devem ser trabalhados concomitantemente no ensino de Fundamentos de Análise, em um trabalho contínuo e efetivo, sendo necessário partir dos conhecimentos iniciais dos licenciandos para então proporcionar um tratamento analítico, aprimorando o conhecimento matemático do futuro professor, incluindo, segundo o autor, o rigor em complementação da intuição, adequando-se a ela.

Moreira, Cury e Vianna (2005) também tiveram a preocupação de entender o papel dos Fundamentos de Análise para a formação e prática do professor de Matemática, uma vez que consideram que a disciplina traz uma introdução do que é imprescindível para o trabalho do matemático, o que nem sempre é suficiente para o trabalho docente nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Os autores entendem que a apresentação lógico-formal-dedutiva fundamentada estritamente nas estruturas dos conceitos matemáticos não responde as questões que surgem no decorrer da prática docente. Argumentam que, quando é realizado um trabalho dessa forma em disciplinas Fundamentos de Análise, a articulação necessária acaba ocorrendo em disciplinas integradoras (remetendo ao ultrapassado modelo “3+1” de formação na Licenciatura em Matemática) ou no decorrer da prática profissional do professor, o que nem sempre se dá de maneira efetiva.

Martines (2012) contribui de forma relevante ao buscar compreender a importância da disciplina Fundamentos de Análise em cursos de Licenciatura ao questionar as consequências de uma abordagem estritamente formal em Análise Real, uma vez que questões importantes como a da construção do conjunto dos números reais e uma reflexão sobre a prática do ensino de Matemática no Ensino Básico não são consideradas. Ressalta ainda que a realização dessa construção, em uma abordagem coerente com a formação de professores, fundamenta

os diversos algoritmos utilizados didaticamente no processo ensino-aprendizagem na escola, além de consolidar o conhecimento do professor sobre os números reais – reflexão ampla que não ocorre quando realizada a clássica abordagem axiomática de que $\mathbb{R}$ é corpo ordenado completo, interessante ao trabalho do matemático profissional.

Martines (2012, p. 68) destaca que não se trata de reduzir os conteúdos, mas “estabelecer vínculos entre a disciplina e as questões da formação do professor”. Ela conclui que, levando em conta a prática docente, é possível propor um trabalho na disciplina cuja abordagem dos conteúdos seja sim formal, porém que privilegie a intuição e a compreensão dos alunos, promovendo ainda discussões sobre os conhecimentos matemáticos desenvolvidos em Análise Real que deverão ser articulados, tendo como foco seu ensino.

Em comum, os autores traçaram conclusões referentes às abordagens propostas na disciplina de Fundamentos de Análise. Depreende-se que uma perspectiva dos conteúdos com excesso de formalismo e rigor não favorece a formação para docência, uma vez que não proporciona compreensão múltipla e abrangente dos conteúdos que serão ensinados na prática docente do futuro professor. Isso dificulta, na verdade, a síntese e a representação necessárias para o ensino dos conteúdos do Ensino Básico, seguindo as ideias de Shulman (1986), prejudicando o conhecimento do conceito e seu aspecto pedagógico, uma vez que dificulta a percepção desses conteúdos como objeto de trabalho da Matemática Escolar.

Uma abordagem coerente, segundo a concepção de Reis (2001), valoriza as intuições dos alunos, ou seja, suas percepções iniciais sobre os conceitos estudados e as ideias que constroem ao longo do ensino. Em conformidade com essa ideia, a Análise Real teria a função de

consolidar e formalizar os conhecimentos desenvolvidos ao longo do curso de Licenciatura em Matemática, identificado por Moreira, Cury e Vianna (2005) e Martines (2012), sem deixar de proporcionar um conhecimento matemático amplo acerca do currículo que fundamenta o trabalho do professor, suprimindo dificuldades apontadas por Bolognezi (2006) e Martines (2012).

Consideramos que a disciplina Fundamentos de Análise tem a importante responsabilidade de promover e concretizar conhecimentos trabalhados anteriormente no curso de Licenciatura em Matemática, com ênfase nos conjuntos numéricos – assunto trabalhado em diversos aspectos em todo Ensino Básico. Não se deve perder de vista, portanto, a percepção dos conceitos estudados como objeto de ensino da futura prática profissional do professor.

Assim, concorda-se com a posição de Moreira, Cury e Vianna (2005) e de Moreira e David (2007), que afirmam que é necessário atentar às diferenças entre Matemática Científica e Matemática Escolar, valorizando a segunda quando se trata de um curso de Licenciatura em Matemática, cujo objetivo primordial é formar profissionais que atuem na Educação Básica. Com efeito, isso se confirma pelas particularidades apontadas nas Diretrizes para os cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática (Parecer CNE/CES 1.302/2001).

É imprescindível reiterar que isso não significa reduzir a formação matemática do futuro professor, como também ressaltam esses autores. O que se propõe como função da disciplina Análise Matemática para Licenciaturas, na verdade, é o contrário: aperfeiçoar o conhecimento matemático do futuro professor, de modo que possa desenvolver uma flexibilidade de pensamento que proporcione uma síntese bem elaborada e fundamentada a respeito, especialmente, do conjunto dos números reais, facilitando, assim, sua reelaboração para o ensino de

acordo com as inúmeras situações-problemas propostas pelos currículos do Ensino Básico com os quais irão trabalhar e pelos múltiplos condicionantes de aprendizagem com os quais irão se deparar durante sua atuação profissional.

Essa perspectiva exige um trabalho docente que proporcione avançar muito além de conceber o conjunto dos números reais como corpo ordenado completo, em uma abordagem puramente axiomática, seguindo um trabalho essencialmente formalista, como destaca Martines (2012).

A Construção dos Números Reais e a Formação de Professores

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) consiste na referência nacional para elaboração dos currículos do Ensino Básico, que busca garantir um conjunto comum de aprendizagens a todos os alunos. Esse documento contém diretrizes curriculares para a Educação Infantil e para o Ensino Fundamental (anos iniciais e finais), trazendo também competências e habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Médio, porém colocadas de forma menos específica em comparação aos outros níveis de ensino.

Em consonância com as ideias de Moreira e David (2007), considera-se essencial que o professor conheça a Matemática trabalhada nos anos iniciais do Ensino Fundamental a fim de atuar nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio de maneira contínua, construindo os conhecimentos matemáticos com os alunos com referência nas concepções iniciais dos educandos sobre eles. Seguindo essa noção de trabalho, reitera-se que o professor adquire condições de conhecer as dificuldades dos alunos sobre o conteúdo, podendo interferir em ideias internalizadas de forma equivocada,

aprofundando o conhecimento matemático de modo que desafie os estudantes, estimulando sua aprendizagem e também o uso da Matemática em seus cotidianos e como forma de interpretação e ação no mundo prático.

Com o intuito de desenvolver habilidades de aprendizagem matemáticas no Ensino Fundamental, a BNCC (Brasil, 2018, p. 268-275) propõe cinco unidades temáticas interrelacionadas para o ensino de Matemática. Essas cinco unidades são: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. A primeira unidade temática, Números, foi definida como ponto central de estudo nesta pesquisa por fundamentar o estudo das demais unidades temáticas, as quais ampliam e aprofundam o pensamento numérico desenvolvido.

No que se refere à unidade temática Números, espera-se que os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental desenvolvam a habilidade de resolver problemas com números naturais e racionais (com representação decimal finita), de modo que compreendam os “significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados” (Brasil, 2018, p. 268). Além disso, espera-se que os estudantes desenvolvam maneiras diversas para a realização de cálculos, de modo que transcendam o uso de algoritmos e calculadoras, recorrendo também a estimativas e cálculo mental.

A BNCC (Brasil, 2018, p. 268-269) também considera essencial que os educandos desse nível de ensino sejam capazes de ler, escrever e ordenar números naturais e racionais a partir da compreensão do sistema de numeração decimal, em especial, do valor posicional dos algarismos. Para aprofundar a noção de número natural, a BNCC propõe atividades de medição com o propósito de que os educandos percebam a necessidade de ampliação desse conjunto numérico, proporcionando

uma introdução ao estudo dos números racionais e suas representações decimal e fracionária.

O documento permite concluir que ao adentrar nos anos finais do Ensino Fundamental, no sexto ano, espera-se que o aluno já tenha internalizado os conteúdos referentes ao conjunto dos números naturais, além de ter uma noção introdutória a respeito dos números racionais. No decorrer do sexto ano, aprofunda-se o trabalho com esses conjuntos numéricos, explorando outras operações, conceitos e algoritmos. No sétimo ano, além de ser ampliado o estudo dos números naturais, é feito um estudo aprofundado dos números inteiros, o que proporciona um estudo mais amplo dos números racionais, que será abordado com ênfase ainda maior no oitavo ano. No nono ano são trabalhados os números irracionais, permitindo agora um estudo mais aprofundado do conjunto dos números reais, que será consolidado ao longo do Ensino Médio.

A partir das considerações acima realizadas sobre a BNCC (Brasil, 2018.), no que se refere à unidade temática Números, é possível inferir que todo o trabalho realizado pelo professor de Matemática envolve as definições e propriedades dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, revelando assim a relevância do estudo do conjunto dos números reais nos cursos de Licenciatura em Matemática.

De fato, é de extrema importância que os cursos de formação de professores de Matemática desenvolvam nos graduandos uma concepção ampla e estrutural a respeito do conjunto dos números reais, de modo que o concebam como objeto de ensino, desenvolvendo a capacidade de justificar, representar e relacionar os números reais, suas propriedades e aplicações, a partir de um processo ensino-aprendizagem significativo para os licenciandos.

Isso reitera a importância de ser realizado um trabalho na disciplina de Fundamentos de Análise que esteja voltado à formação de professores. Afinal, cabe a essa disciplina formalizar os conhecimentos desenvolvidos anteriormente, em especial, no que se refere ao conjunto dos números reais, em uma abordagem coerente, como considerada por Reis (2001) e Martines (2012), que proporcione formação nas três categorias de conhecimento estabelecidas por Shulman (1986) – conhecimento do conceito, conhecimento pedagógico do conceito e conhecimento curricular.

Para compreender melhor as necessidades formativas dos professores de Matemática no que se refere especialmente aos conhecimentos sobre os números reais, foram considerados os estudos realizados por Corbo (2012), Penteado (2004) e Igliori e Silva (1999).

Com o propósito de investigar os conhecimentos necessários aos professores de Matemática para o ensino de conteúdos relacionados ao conjunto dos números reais, com ênfase nos irracionais, Corbo (2012) realizou um estudo com 23 professores dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio de escolas públicas estaduais da cidade de São Paulo. A autora observou que os professores não tinham bem consolidados os conhecimentos das definições, representações e classificação dos números como racionais, irracionais e reais, o que “compromete qualquer abordagem, ainda que introdutória, que pretenda discutir a ampliação dos campos numéricos, em uma classe de alunos da Educação Básica” (2012, p. 155).

Quanto à importância do estudo do conjunto dos números irracionais no Ensino Fundamental, os depoentes consideram ser importante uma introdução a esse trabalho, porém de forma reduzida, sendo suficientes exemplificações ou aproximações racionais para que os alunos pudessem notar as diferenças existentes com o conjunto dos

números racionais, de modo que um estudo mais aprofundado dos números irracionais fosse realizado no Ensino Médio. Isto é, mesmo que se opte por uma abordagem apenas inicial que leve em conta o nível de compreensão dos alunos, é o domínio que o professor tem a respeito desse assunto que permitirá a transformação desse conhecimento em conhecimento a ser ensinado, compreensível aos alunos. (Corbo, 2012, p. 177)

Os comentários da maioria dos professores demonstraram falta de consistência no conhecimento de que não se aplica a noção de sucessor quando se trata do conjunto dos números racionais, além de dúvidas quanto à comparação e representação de elementos desse conjunto e, novamente, quanto à noção de densidade dos racionais em relação ao conjunto dos números reais. Além disso, a autora concluiu que a maioria dos professores não percebeu que os alunos transferiram seus conhecimentos sobre os números naturais (operações e relação de ordem) diretamente para os racionais (operações, relação de ordem, ordem incompleta e densidade).

Portanto, é possível inferir que as noções acerca do conjunto dos números reais que foram inadequadamente concretizadas pelos professores geram reformulações equivocadas a respeito dos conceitos que devem ser ensinados, e isso reduz as possibilidades de uso de diferentes abordagens no ensino, podendo consolidar nos alunos visões equivocadas a respeito de um conteúdo tão importante, que fundamenta o estudo da Matemática no Ensino Básico.

A partir de uma profunda análise desses resultados, a autora concluiu que grande parte dos professores trazia concepções equivocadas acerca de definições, propriedades e representações dos conjuntos numéricos e não dominava conhecimentos geométricos relativos ao conjunto dos números reais. Corbo (2012) deduziu ser

necessária uma intervenção, que foi realizada na próxima fase do estudo, que agisse no sentido de concretizar os conhecimentos dos professores sobre os números reais, para então trabalhar a dimensão pedagógica desse conceito de modo que contribuísse para seu ensino.

Penteado (2004) buscou conhecer as concepções sobre os números reais de professores do Ensino Médio da rede pública do Estado de São Paulo, por meio de intervenção, aplicação e análise de sequência de ensino, centrando-se na ideia de densidade dos números racionais e irracionais no conjunto dos números reais.

Os professores investigados souberam, em sua maioria, classificar números dados em racionais ou irracionais, mesmo que muitos tenham recorrido à representação decimal para isso, questionando se haveria ou não período. Cabe ressaltar uma observação feita sobre o zero, sugerindo que fosse um elemento pertencente à interseção dos conjuntos dos números racionais e irracionais. Também é pertinente destacar que alguns professores classificaram um número racional expresso na forma fracionária como irracional porque, ao representar seu valor decimal por meio de divisão, não tiveram certeza se a parte decimal do número era ou não periódica por conta de sua representação infinita. Quando questionados a respeito de uma justificativa para a classificação indicada, nenhum dos professores soube definir os números racionais de maneira precisa.

Percebeu-se nas respostas de questões que remetiam à propriedade da densidade dos números reais dificuldades relacionadas à representação decimal e fracionária de números racionais, além de revelarem novamente falhas quanto à definição de números racionais e irracionais. Também foram identificadas dúvidas com respeito às noções de limite, na representação de $0,99999\dots$ como 1. Ainda explorando a ideia de densidade em intervalos, muitos professores

revelaram certa noção dessa propriedade dos reais, embora a falta de conhecimento concreto tenha levado a respostas ou justificativas inconsistentes.

A discussão das definições e exemplos pelos próprios grupos de professores possibilitou a formalização de ideias, que guiaram a pesquisadora para a elaboração de uma nova atividade, baseando-se nos resultados apresentados. A autora elaborou afirmações que moviam diretamente os conhecimentos sobre a propriedade de densidade do conjunto dos números reais com a intenção de que os professores classificassem tais assertivas como verdadeiras ou falsas, justificando suas escolhas. Penteado (2004) percebeu grande dificuldade, por parte dos professores, em formalizar raciocínios nas justificativas (quando foram realizadas), além de reiteradas dúvidas em relação às definições e quanto à propriedade de densidade dos números reais. Também foi possível notar dificuldades relacionadas à ampliação de conjuntos e validade de propriedades.

Superadas as dificuldades por meio de discussão entre os grupos de professores, foi proposta uma nova atividade com cálculo de médias entre números racionais e localização dos resultados na reta numérica. Os docentes conseguiram perceber, através da investigação, a densidade dos números racionais no conjunto dos racionais. Já para a compreensão da densidade dos irracionais no conjunto dos números irracionais, foram propostas questões que trabalhavam com a representação decimal desses números, por meio de uma atividade inspirada no processo de diagonal de Cantor. Os professores manifestaram dificuldades na compreensão dos enunciados, na relação de ordem, na localização de números irracionais na reta numérica (incomensurabilidade de segmentos), na escrita matemática e na noção

de infinito, o que se justifica pela falta de familiaridade com um trabalho mais aprofundado e reflexivo com esse conjunto numérico.

É interessante observar a maneira como foi realizada a mediação por Penteado (2004), no sentido de estimular e suscitar discussões construtivas, que colaboraram, ao longo da investigação, para um aprimoramento do conhecimento do conteúdo desses professores. No processo também foram levantadas questões a respeito do ensino, como reformulações úteis para o entendimento, porém matematicamente incorretas e que acabam sendo internalizadas pelos próprios professores. Na verdade, isso possibilitou, em termos gerais, a construção de um caminho para superação de convicções incorretas, possibilitando um trabalho matemático melhor fundamentado, dando condições para que os professores ampliassem seus conhecimentos de forma autônoma.

Igliori e Silva (1999) realizaram um estudo comparativo com 36 alunos ingressantes do curso de Ciências da Computação e 14 alunos concluintes do curso de Licenciatura em Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) para conhecer as concepções sobre números reais dos estudantes de cursos de Ciências Exatas da Instituição. O objetivo dos autores era conhecer quais as concepções iniciais a respeito do conjunto dos números reais dos alunos ingressantes que foram internalizadas de maneira inadequada e quais ideias permaneciam inexatas mesmo após um estudo sistematizado desse conjunto numérico tratado na disciplina Análise Real, no caso dos alunos concluintes, já que os autores consideram que “A complexidade da elaboração do conceito de número real se expressa fortemente quando o aluno toma os primeiros contatos com o campo da Análise” (Igliori & Silva, 1999, p. 2).

A representação decimal infinita de números reais confundiu alunos ingressantes e concluintes quanto à classificação como racional ou irracional. Além disso, os estudantes confundiram números com suas aproximações (dificuldade apresentada principalmente por alunos concluintes), classificando, por exemplo, o número racional 3,1416 como irracional, por tê-lo confundido com o número π . É interessante destacar também que um dos alunos concluintes do curso de Licenciatura em Matemática considerou um intervalo do conjunto dos números reais como finito.

Igliori e Silva (1999) concluíram que, no geral, as dificuldades apresentadas se referiam à diferenciação de números racionais e irracionais, especialmente no tocante à representação decimal desses números, além de dúvidas quanto às ideias de sucessor e antecessor, dificuldades de compreensão da completude e infinitude do conjunto dos números reais, da densidade desse conjunto e de comparação de conjuntos infinitos.

Apesar de considerarem ter havido progresso na compreensão de ideias relacionadas ao conjunto dos números reais quando compararam as respostas dos alunos ingressantes e dos concluintes, os autores afirmaram que, mesmo após um curso introdutório de Análise Real, os graduandos ainda apresentavam ideias equivocadas sobre esse conjunto numérico. Afirmam que a disciplina Análise Real na instituição pesquisada é tratada de maneira tradicional, na qual o conjunto dos números reais é trabalhado de maneira axiomática (Igliori & Silva, 1999, p. 18). Em vista disso, os autores consideram essencial que sejam consideradas as ideias iniciais e transitórias dos alunos acerca dos números reais, além das concepções que persistem mesmo após um estudo mais elaborado desse conjunto numérico, para que haja melhoria no ensino desse conteúdo.

Os resultados obtidos por Iglioni e Silva (1999) permitem concluir que muitos alunos chegam ao Ensino Superior, em cursos de Ciências Exatas, com concepções equivocadas sobre os números reais, que não são superadas e reelaboradas ao decorrer dos cursos, levando-os a concluir a graduação sem terem superado essas dificuldades, carregando essas dúvidas no exercício da profissão e podendo gerar tais dificuldades em outros sujeitos. Isso é confirmado pelas investigações e intervenções realizadas por Corbo (2012) e Penteado (2004), que revelaram que professores de Matemática que já atuam no Ensino Básico podem ainda apresentar dúvidas simples em relação aos números reais, as quais apresentam efeitos diretos no ensino desses conceitos, prejudicando os educandos no sentido de promover a concretização de concepções equivocadas.

Essa situação pode ocasionar um “círculo vicioso”, como concluem Broetto e Santos-Wagner (2019) em seu estudo sobre o ensino de números irracionais: o professor conclui a graduação sem uma formação matemática apropriada e que possibilite um ensino adequado de conhecimentos matemáticos aos alunos e esses alunos chegam à universidade sem noções matemáticas satisfatórias que possibilitem aprofundar seus conhecimentos, o que leva a uma repetição do ciclo.

Segundo a BNCC (Brasil, 2018), os conjuntos numéricos permeiam todo o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, servindo como base para o aprofundamento nos demais eixos temáticos. No entanto, questiona-se: como aprofundar um conceito que não está bem fundamentado e que ainda gera dúvidas? E como lidar com essas dúvidas, se os próprios professores também a cultivam?

Nesse sentido, reitera-se que é imprescindível que o professor conclua o curso de Licenciatura com as três categorias de conhecimento delineadas por Shulman (1986) muito bem desenvolvidas. Como pondera

Martines (2012, p. 17), é complexo afirmar que a Licenciatura em Matemática deva preparar o graduando para todas as questões com as quais o futuro docente irá se deparar. No entanto, os estudos realizados por Corbo (2012) e Penteado (2004) mostram professores que se formaram sem ter convicção acerca dos conhecimentos curriculares com os quais iriam trabalhar.

Percebe-se que os estudos de Corbo (2012), Penteado (2004) e Igliori e Silva (1999) revelaram dificuldades nas definições de números racionais e irracionais, com expansões de conjuntos, com a representação de números reais na reta numérica, relação de ordem no conjunto dos números reais e representações diversas desses números. Além disso, ficou clara a dúvida em relação ao conceito de densidade dos números racionais e irracionais no conjunto dos números reais, além de evidenciada a dificuldade de interpretações diversas, como no entendimento dos enunciados, na reformulação e registro do próprio raciocínio e na interpretação das concepções dos alunos. Isso indica que o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, pautados no conhecimento curricular, não foram bem desenvolvidos na formação inicial desses professores quando se trata dos conjuntos numéricos.

Os resultados encontrados por Corbo (2012) confirmam essa afirmação quando analisadas as possíveis abordagens indicadas pelos docentes investigados, mostrando que eles até tinham certa noção, porém não conseguiam estabelecer objetivos claros com as propostas sugeridas, revelando, além de lacunas na compreensão dos conceitos, dificuldades também de reelaboração pedagógica dos conteúdos a serem ensinados. Corbo (2012) e Penteado (2004) realizaram intervenções interessantes à formação continuada desses professores, que indicaram

êxito quanto à superação de dúvidas e conceitos internalizados erroneamente.

Por isso, é necessário que se discutam as várias representações dos números reais e suas propriedades tendo em vista os diversos significados dessas ideias e suas relações com outros conceitos matemáticos além da relação com o mundo prático no curso de Licenciatura em Matemática. Ademais, é necessária uma profunda compreensão dos conceitos de modo que possam ser reelaborados como objetos de ensino, e é imprescindível que esse trabalho seja realizado na formação inicial do professor. Segundo Cunha (2014), ocorre muitas vezes que:

As dificuldades de ensino dos professores são relacionadas normalmente às de aprendizagem dos alunos. Elas são tratadas isoladamente, por cada professor, do seu jeito, conforme aparecem, apresentadas pelos alunos, ou conforme a necessidade sentida pelo professor em meio a uma aula que faz uso de um conhecimento correlato aos números naturais. (Cunha, 2014, p. 100)

Assim, reitera-se que este trabalho considera que as dificuldades não devem seguir com os licenciandos após estarem formados e atuando como docentes. Essas dúvidas devem ser trabalhadas de maneira ampla e estrutural já no curso de Licenciatura em Matemática, especialmente na disciplina de Fundamentos de Análise, considerando seu papel de consolidar e formalizar os conhecimentos dos licenciandos no que se refere, sobretudo, aos números reais. Ainda, insiste-se também na necessidade de considerar a prática docente, incluindo, segundo Reis (2001), o rigor de acordo com as intuições (iniciais e transitórias) dos licenciandos, formalizando os conceitos de modo que propicie a compreensão dos vários significados das operações e propriedades, de maneira multifacetada, segundo Martines (2012).

Nesse sentido, considera-se essencial que seja realizada a construção dos números reais na disciplina Fundamentos de Análise, de modo que suscite a compreensão dos sistemas numéricos e dos conceitos relacionados a eles. Assim, não basta que seja realizada uma abordagem puramente formal, de modo que as ideias sejam trabalhadas de forma generalizada – essa abordagem é interessante ao Bacharel, uma vez que importa a caracterização, e não a natureza dos elementos. A construção dos números reais deve auxiliar o futuro professor na compreensão das operações utilizadas como algoritmos no Ensino Básico, conhecendo seus significados a fim de utilizá-los na resolução de problemas e sabendo justificar sua validade, além de ajudar a entender as ideias de densidade dos números reais, comensurabilidade e incomensurabilidade, por exemplo, de modo que consigam explorar essas noções em sua futura prática profissional.

Portanto, a construção do conjunto dos números reais na disciplina Análise Real poderia ser um caminho para contornar os resultados obtidos pelas pesquisas de Corbo (2012) e Penteado (2004), uma vez que trabalharia, na formação inicial, conceitos relevantes à prática docente, considerando o eixo temático Números, evitando que dúvidas como as encontradas permaneçam ao longo da graduação, assim como percebido na investigação de Iglioni e Silva (1999), sobretudo quando tais conteúdos forem ensinados no Ensino Básico.

Reflexão

Diante da revisão realizada, entendemos que a disciplina de Fundamentos de Análise teria o papel de consolidar e formalizar conhecimentos desenvolvidos ao longo do curso de Licenciatura em Matemática, identificado por Moreira, Cury e Vianna (2005) e Martines

(2012). Consideramos que a construção do conjunto dos números reais e a abordagem utilizada pode ter impacto positivo na formação do professor de Matemática e, por consequência, nas dificuldades apresentadas pelos alunos da educação básica, em razão da falta de articulação entre o ensino dos números reais nesses níveis, conforme apontado por Broetto e Santos-Wagner (2019) e Durand-Guerrier (2016).

A construção do conjunto dos números reais na disciplina de Fundamentos da Análise nos cursos de Licenciatura em Matemática tem o potencial de promover a compreensão do licenciando (Durand-Guerrier, 2016), de modo que ele consiga fundamentar o ensino dos números reais em sua futura prática docente, com a finalidade de construir com os alunos uma aprendizagem significativa, em que os educandos possam compreender a Matemática e utilizá-la, adequadamente, na interpretação dos diversos contextos e na resolução dos problemas que deles decorrem, sendo capazes de interferir positivamente na construção da sociedade, rompendo com a ideia que há muito persiste de que a Matemática é difícil e apresenta pouca utilidade.

A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) propõe como uma das unidades temáticas o estudo dos Números, que fundamenta o estudo das outras unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. A unidade temática Números promove, ao longo de todo Ensino Fundamental e Ensino Médio, o estudo dos números reais, de modo que os alunos sejam capazes de resolver problemas, compreendendo os significados de operações e procedimentos de cálculos, por exemplo, utilizando a Matemática como instrumento de reflexão e atuação em contextos econômicos, culturais e sócio-políticos. Em vista disso, é essencial que a formação inicial do professor de Matemática contemple o conjunto dos números reais de

forma estrutural e abrangente, de modo que o licenciando o conceba como objeto de ensino significativo para seus futuros alunos.

Porém, estudos como os que foram realizados por Corbo (2012), Penteado (2004) e Iglioni e Silva (1999) revelam necessidades formativas, quanto ao conjunto dos números reais, de professores de Matemática que já atuam no Ensino, além de ingressantes de cursos de exatas e formandos de Licenciatura em Matemática. Ocorre que muitos alunos chegam ao Ensino Superior com dificuldades relativas a esse conjunto numérico, que muitas vezes não são superadas nesses cursos. Esses alunos então concluem suas graduações e vão exercer suas profissões ainda com dúvidas, que podem gerar as mesmas dificuldades em outras pessoas – como no caso do licenciando que se forma sem uma concepção ampla, estrutural e multifacetada dos números reais. Isso gera um “círculo vicioso”, segundo Broetto e Santos-Wagner (2019), que só pode ser rompido com um trabalho abrangente com esse conjunto numérico desde a formação inicial dos professores de Matemática.

Assim, é fundamental que o licenciando conclua a graduação conhecendo as diversas representações, significados e operações com os números reais, sendo capaz de aplicar seus conhecimentos acerca desse conjunto na resolução de problemas. A construção do conjunto dos números reais, portanto, se mostra necessária à formação do professor de Matemática, uma vez que, quando realizada em abordagens coerentes, esclarece a definição de cada um dos conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e irracionais), operações, representações e aplicações, além de possibilitar a compreensão de vários procedimentos que são tratados como algoritmos na Matemática Escolar.

Nessa perspectiva, consideramos essencial que a construção dos números reais seja realizada na disciplina Fundamentos de Análise por meio de uma abordagem que auxilie o futuro professor a explorar

noções relacionadas aos números reais, como de comensurabilidade, incomensurabilidade e densidade, por exemplo, conhecendo a lógica dos algoritmos envolvidos e sabendo como justificar essas ideias para os alunos. É necessário salientar, porém, que a disciplina deve consolidar e formalizar os conhecimentos tendo em vista que serão objetos de ensino do futuro professor, devendo fundamentar o trabalho da Matemática Escolar, de maneira rigorosa que valorize a compreensão dos licenciandos, segundo Reis (2001), de modo que prepare o futuro docente para ensinar Matemática na Educação Básica.

Referências

- BOLOGNEZI, R. A. L. **A disciplina de Análise Matemática na formação de professores de Matemática para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação). Curitiba: PUC, 2006.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versao_final_site.pdf> Acesso em: 8 abr. 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parecer CNE/CES nº 1302/2001 – Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Brasília: 2001. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>> Acesso em: 8 jul. 2019.
- BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. **O ensino de números irracionais na Educação Básica: um círculo vicioso está em curso?** Bolema, v. 33, n. 64, p. 728-747, ago. 2019.
- CORBO, O. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: UNIBAN, 2012.
- CUNHA, C. L. **O ensino dos números reais na formação do professor de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação). Presidente Prudente, SP: UNOESTE, 2014.

DURAND-GUERRIER, V. Conceptualization of the Continuum, an Educational Challenge for Undergraduate Students. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**, v. 2, n. 3, p. 338–361, 4 ago. 2016.

IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. A. **Conhecimento de concepções prévias dos estudantes sobre números reais: um suporte para a melhoria do ensino-aprendizagem**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 21. 1998. Anais... Caxambu, MG, 1999.

MARTINES, P. T. **O papel da disciplina de Análise segundo professores e coordenadores**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: UNESP, 2012.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. **Por que análise real na licenciatura?**. Zetetiké, v. 13, n. 23, p. 11-42, 2005.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2007.

PENTEADO, C. B. **Concepções do professor do Ensino Médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC, 2004.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: UNICAMP, 2001.

SHULMAN, L. S. **Those who understand: knowledge growth in teaching**. Educational Researcher, v.15, n. 2, p. 4-14, fev. 1986.

3

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM DISCIPLINAS DE CONHECIMENTO ESPECÍFICO NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES E DESAFIOS

*Douglas Matheus Gavioli Dias
Inocência Fernandes Balieiro Filho*

De acordo com a Resolução institui as Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Graduação em Matemática (Brasil, 2003), os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo central a formação de professores para a Educação Básica e os conteúdos de conhecimento específicos desempenham um papel central na formação do professor de Matemática, pois são considerados essenciais para que o professor desenvolva um conhecimento especializado que lhe permita enfrentar as questões práticas da profissão. Assim, esse conhecimento não deve ser visto como um nicho isolado, mas sim como algo que está presente de forma natural em diversos momentos do currículo de formação, incluindo disciplinas como Geometria e Álgebra, além de práticas de ensino e investigação em sala de aula (Moreira & Ferreira, 2013).

Ainda assim, nas disciplinas de conteúdo específico, parece haver uma predominância do uso de uma abordagem tradicional de ensino, em que os docentes responsáveis costumam formalizar conceitos e demonstrar proposições matemáticas, usando listas de exercícios para a fixação de conceitos, com poucos problemas que demandem reflexões em sua resolução. Além disso, a maioria das avaliações se fundamenta em exercícios em que os alunos, em sua resolução, devem apenas aplicar as ideias e conceitos já trabalhados em sala de aula.

Entretanto, considerando o papel do conhecimento matemático nos Cursos de Licenciatura, a abordagem de ensino adotada em sala de aula deve promover a articulação entre os saberes específicos e a docência escolar em Matemática, por meio de uma formação matemática ampliada e diversificada, que não se restrinja à dimensão técnico-formal, mas que estimule a exploração e a investigação em relação à Matemática Pura e Aplicada, incluindo estudos de natureza histórica, filosófica, epistemológica e didático-pedagógica (Moreira & Ferreira, 2013).

Nesse contexto, consideramos a Resolução de Problemas como uma abordagem de ensino que pode promover práticas que relacionem os saberes específicos à atividade de docência em Matemática na Educação Básica. Dessa forma, apontamos neste texto as possibilidades e limitações do uso da Resolução de Problemas nas disciplinas de conhecimento específico nos cursos de Licenciatura em Matemática, levando em conta a ênfase dada a essa abordagem nos currículos de Matemática de âmbito estadual e nacional.

Numa busca por teses e dissertações que abordam a Resolução de Problemas no Ensino de Matemática na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações foram localizados, até 2020, 397 trabalhos sobre aquele tema. Dentre os trabalhos encontrados, apenas uma tese, de 2017, aborda o uso da Resolução de Problemas em disciplina específica do Curso de Licenciatura em Matemática: “Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de Matemática”, de Nilton César Ferreira, que utilizou a metodologia de Resolução de Problemas proposta por Onuchic (2012) para o ensino de Álgebra Abstrata. No trabalho, o autor realizou 16 encontros com

duração de 2 aulas, para trabalhar com os alunos problemas sobre Operações Binárias, Grupos (Grupos Finitos, Tábua de Operações e Ordem de Grupos), Grupos $\mathbb{Z}_n$, Subgrupos, Grupos não-abelianos, Classes de Equivalência e Relação de Equivalência, Anel, Domínio de Integridade e Corpos. O trabalho desenvolvido também tratou da ligação desses conceitos com conteúdos da Educação Básica, levando os alunos a perceberem essas estruturas nos conteúdos do Ensino Básico.

A partir de 2021, são encontrados mais trabalhos, como uma dissertação que trata do uso da Resolução de Problemas para o ensino de Anéis de Polinômios (Dias, 2021) e um artigo sobre o uso da Resolução de Problemas para o ensino de conceitos estatísticos (Correia Silva & dos Santos Junior, 2021).

As discussões sobre as potencialidades do uso da Resolução de Problemas para o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática estão mais presentes no currículo do ensino básico, mas, segundo Onuchic (2012), todo o currículo deveria ser fundamentado na Resolução de Problemas. Ademais, observamos que as pesquisas que apresentam propostas de uso de Resolução de Problemas em cursos de Licenciatura em Matemática são mais frequentes em conteúdo da Educação Básica e, conforme Rodrigues, Silva e Ferreira (2016), no interior de disciplinas de Prática de Ensino e Estágio Supervisionado e Laboratório de Matemática.

Em nosso cotidiano nos deparamos com situações em que precisamos resolver problemas que envolvem a Matemática. Desse modo, o conhecimento matemático é importante para a sociedade e para os indivíduos nela inseridos. É possível notar que o conhecimento matemático que se apresenta no cotidiano, para todos nós, frequentemente, aparece em forma de problemas e não como a Matemática é apresentada na escola. Em nossas vidas, nem sempre

temos alguém que nos descreva todo o conhecimento acerca de financiamentos, prazos e soma antes de nos depararmos, por exemplo, com uma oferta de um empréstimo ou de um parcelamento de uma compra. O que ocorre é que esse tipo de situação aparece sem nos planejarmos e, para isso, o conhecimento matemático é essencial para lidar com elas.

A Resolução de Problemas representa uma alternativa ao ensino tradicional de Matemática. Nesse sentido, conforme Rossetto e Balieiro (2021), a priorização de metodologias que se embasam na fixação de regras e fórmulas pode dificultar a compreensão do conceito, já que a formalização é apresentada antes do entendimento do conteúdo. Em virtude dessas dificuldades, é necessário um novo olhar sobre as práticas e metodologias de ensino de Matemática no ensino básico. Quando buscamos alternativas para as metodologias de ensino, várias possibilidades surgem. Dentre elas, uma que muito tem se destacado em artigos de revistas especializadas e trabalhos de congressos de Educação Matemática é a Resolução de Problemas. Além disso, nos currículos tem sido enfatizado o uso da Resolução de Problemas no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, o que torna necessário, ao professor de Matemática, conhecer essa abordagem de ensino.

Numa revisão histórica sobre o tema, o primeiro trabalho sobre a Resolução de Problemas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática é atribuído a Thorndike, que em 1921 lançou o livro “*Os novos métodos da Aritmética*”. No livro, o autor enfatiza que a aritmética deveria ser ensinada para auxiliar a vida e indicava que os problemas deveriam ser propostos de modo que tivessem aplicação na vida real. (Morais, Onuchic & Leal Júnior, 2017).

Em seu livro, Thorndike apresenta uma técnica para a resolução de problemas que consistia nas seguintes etapas: 1) Sabe-se como resolver

o problema prossiga e resolva-o; 2) Se não consegue visualizar uma forma de resolução, considere a questão os dados e faça questionamentos ao problema: Qual é a pergunta feita? Como utilizar os dados? O que fazer com os números e o que significam? 3) Fazer um planejamento de como irá proceder na resolução; 4) Analisar a resposta, verificando se está de acordo com o solicitado no problema (Moraes, Onuchic & Leal Júnior, 20172017).

O próximo trabalho que se destaca é o do matemático húngaro George Pólya (1887 – 1985) que, em 1945, publicou o livro “*How to solve it*”, em que tratava sobre problemas matemáticos e estratégias de resolução desses problemas. Nesse livro, Pólya trouxe quatro passos importantes para se resolver qualquer problema matemático. São eles:

1) Ler e compreender o problema: esta fase é importante, pois se o problema não for bem compreendido, o leitor encontrará grandes dificuldades para a sua resolução; 2) Elaborar um plano para a resolução: esta é a parte em que o leitor passará mais tempo, pois nem sempre um problema apresenta um caminho óbvio para a resolução; 3) Executar o plano; 4) Refletir sobre o trabalho realizado: nesta etapa, o leitor confere tudo o que foi feito anteriormente, a fim de encontrar possíveis equívocos em sua resolução.

Conforme Andrade e Onuchic (2017), as pesquisas sobre a Resolução de Problemas, antes da década de 1960, enfatizaram como obter um bom desempenho na obtenção da solução de problemas, não havendo preocupação com o processo. Nessa perspectiva, defendia-se que o aluno deveria resolver uma grande quantidade de problemas do mesmo tipo, para desenvolver sua capacidade em resolução de problemas.

A partir do final dos anos de 1950, no Brasil e no mundo, começaram a ocorrer diversas discussões sobre a necessidade de uma renovação do ensino da Matemática, nos diferentes níveis de ensino. Esses debates, que envolveram professores de Matemática e pesquisadores da área de Educação produziram o Movimento da

Matemática Moderna (Alves & Silveira, 2016). Esse movimento, que tomou grandes proporções ao redor do mundo, acabou ofuscando as pesquisas acerca da Resolução de Problemas.

Porém, em 1980, houve outro marco para a área de Resolução de Problemas. O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1980) publicou um manifesto chamado *Na agenda for action*, em que defendia que “a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar para os anos 80”, ou seja, que a Matemática na escola deveria se balizar na resolução de problemas de forma geral. Nesse documento havia recomendações de que a resolução de problemas deveria levar em consideração a aplicação da Matemática na vida real, servindo às mais diversas ciências, e por diversas vezes, passando pelos limites da matemática escolar (NTCM, 1980). Esse marco é importante, pois inspirou a publicação de diversas teses e dissertações acerca do tema no mundo todo. É exatamente nessa época que começam as pesquisas em Resolução de Problemas no Brasil, que mais à frente ganhariam força por meio dos grupos de estudos que foram criados.

O NTCM ainda lançou novos documentos para a maior reforma na matemática escolar da época, foram eles: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, 1989; *Professional Standards for Teaching Mathematics*, 1991; *Assessment Standards for School Mathematics*, 1995.

Assim, a partir da década de 1980, quando o NTCM lançou o *Na agenda for action*, pesquisas acerca da Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática via Resolução de Problemas começaram a aparecer com maior frequência no Brasil. Assim, a partir desse momento, teses de doutoramento e dissertações de mestrado apresentaram os resultados das pesquisas desenvolvidas sobre o tema no país.

No final da década de 1990, foram elaborados no Brasil os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática). Esse documento, organizado pelo Ministério da Educação (MEC) com o intuito de nortear o ensino de Matemática no Brasil, sofreu forte influência das ideias veiculadas pelos *Standards*. No documento é patente a importância dada a Resolução de Problemas e a habilidade de resolver problemas para o futuro dos estudantes, à aplicação na vida, no mercado de trabalho e em outros aspectos científicos e sociais atribuídos à Matemática. De acordo com Onuchic (2012), “Especificamente no que se refere à Matemática, os PCN indicam a resolução de problemas como ponto de partida das atividades matemáticas e discutem caminhos para se fazer matemática na sala de aula” (Onuchic, 2012, p. 12).

Nos Estados Unidos, muitos professores e pesquisadores da época do “*Na agenda for action*” fizeram críticas acerca do documento publicado como, por exemplo, o fato de não especificar diretrizes norteadoras para a aplicação da Resolução de Problemas necessárias para que professores do ensino básico da época pudessem utilizá-las de forma compreensível em seu dia a dia. Como consequência, em 2000, o NCTM publicou um novo documento para o ensino de Matemática, denominado *Principles and Standards for School Mathematics*, que levantou novos pontos para a Resolução de Problemas e novos aspectos abordados, que listamos abaixo:

- (Os alunos) Construam novos conhecimentos matemáticos por intermédio do seu trabalho com problemas;
- Desenvolvam vontade para formular, representar, abstrair e generalizar em situações dentro e fora da Matemática;
- Apliquem uma grande variedade de estratégias para resolver problemas e adaptem as estratégias a novas situações;

- Monitorizem e reflitam sobre o seu pensamento matemático na Resolução de Problemas.

Neste documento, o NCTM também destacou abordagens e apresentou diretrizes para que os docentes pudessem aplicar a metodologia de Resolução de Problemas em sala de aula (Van de Walle, 2007).

No Brasil, atualmente, as pesquisas que tratam da Resolução de Problemas no ensino de Matemática são desenvolvidas e publicadas com certa regularidade. Todavia, ainda existem caminhos a serem desbravados dentro da Resolução de Problemas, bem como áreas que foram pouco exploradas e que têm potencialidades de desenvolvimento. Dentre tais áreas, está o trabalho com a Resolução de Problemas nas disciplinas de conhecimento específico em cursos de Licenciatura em Matemática.

A Resolução de Problemas na Educação Matemática

Para entender a Resolução de Problemas precisamos começar pela questão: O que é um problema?

Kilpatrick (1981) afirma que “o uso impreciso e indiscriminado de determinados termos permite que numerosos pecados sejam cometidos em seu nome”.¹ (Kilpatrick, 1981, p. 2). Por isso, compreender o que é um problema nos leva ao uso preciso da Resolução de Problemas, quando combinado com outros fatores.

Para Serrazina (2017), entender o que é um problema é essencial para que o professor possa elaborar atividades de Resolução de

¹ The imprecise and indiscriminate use of these terms allows numerous sins to be committed in their name.

Problemas. O entendimento preciso leva ao uso correto. Assim, o que é um problema?

O termo problema é definido no dicionário online Michaelis como “tema em qualquer área do conhecimento, cuja solução ou resposta requer considerável pesquisa, esforço e reflexão”. Para além das definições dos dicionários, pesquisadores discutem o que deveria ser tratado como problema. No NCTM temos:

Um problema genuíno é uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel (NCTM, 1991, p. 11).

Um aluno ou um grupo de estudantes que esteja lidando com um problema, não se sentirá motivado a continuar a resolver esse problema ou concluirá a atividade muito mais rápida, se para ele(s) o problema não for desafiador. O caso contrário também ocorre. Se o problema for de grau muito elevado para o grupo em questão, ele não se sentirá motivado a continuar, ou até mesmo terá a sensação de que não é capaz de aprender determinado conteúdo ou de fazer Matemática, o que os professores procuram evitar no ensino de Matemática.

Na perspectiva de Serrazina (2017, p. 60), um problema deve:

- (i) ser desafiante e interessante de um ponto de vista matemático;
- (ii) ser adequado, permitindo relacionar o conhecimento e as capacidades dos alunos já tem para de modo que o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno possam ser adaptadas e aplicadas para completar tarefas;
- (iii) ser problemático a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está completamente visível (SERRAZINA, 2017, p. 60).

Se, por acaso, o problema escolhido ou elaborado for, de certa forma, desinteressante, os estudantes não se sentirão motivados e intrigados por ele e, em consequência, muitas vezes, não chegarão a uma

resposta satisfatória. Isso também ocorre se o problema não abarcar conhecimentos prévios dos estudantes, o que pode levar os alunos a achar que não podem terminá-lo ou que não são capazes. O fato de o problema proposto ser intrigante e sem um caminho pré-definido para sua solução, pode promover de forma intencional a reflexão, o desenvolvimento de estratégias de resolução e a apreensão, não somente de conhecimento, mas de habilidades.

Adotamos a perspectiva de Serrazina (2017) sobre a caracterização de um problema para a discussão do uso da Resolução de Problemas com os alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

A Resolução de Problemas no ensino superior: algumas possibilidades

A Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino difundida no âmbito das políticas públicas educacionais. Vemos referências a ela em praticamente todos os documentos curriculares brasileiros (Andretta & Allevato, 2019).

Entretanto, de acordo com Rossetto (2018), uma das dificuldades para implementar a Resolução de Problemas em sala de aula é a falta de subsídios e materiais de apoio ao professor. No Estado de São Paulo, por exemplo, conforme a autora, o material oferecido pelo governo não oferece subsídios suficientes para uma realização satisfatória da Resolução de Problemas.

Assim, uma formação inicial que contemple discussões sobre a metodologia de Resolução de Problemas pode contribuir para que o futuro professor possa adotar metodologias diferenciadas em sua prática, uma vez que promova debates e reflexões sobre como formular (adaptar), aplicar e avaliar os problemas. Além disso, seria adequado que os futuros docentes tivessem a oportunidade de vivenciar experiências

com o uso da Resolução de Problemas em suas aulas, o que, certamente, contribuiria para que fossem compreendidos as potencialidades e obstáculos para o uso dessa metodologia.

Além do que, em concordância com Ferreira, Silva e Martins (2017), o uso da Resolução de Problemas em disciplinas de conhecimento específico nos cursos de Licenciatura em Matemática tem como potencialidade a possibilidade de promover para os futuros professores a compreensão das interfaces entre os conteúdos das disciplinas de conhecimento específico da Licenciatura em Matemática com os conteúdos de Matemática do ensino básico, promovendo uma reflexão sobre o papel das disciplinas de conhecimento específico para a atuação docente no ensino Básico.

Há diversas formas de se trabalhar com a Resolução de Problemas na formação inicial ou continuada de professores de Matemática. De fato, Fiorentini (2012) estabelece algumas abordagens da Resolução de Problema que são utilizadas em cursos de formação de professores:

1. Ensinar *para* a Resolução de Problemas: essa perspectiva é considerada a abordagem mais tradicional da Resolução de Problemas e a mais utilizada em cursos de formação de professores. Nessa abordagem, inicialmente se ensinam os conteúdos matemáticos e, só depois, é desenvolvido o trabalho com os problemas, como forma de aplicação e reforço dos conteúdos estudados. Em geral, são usados problemas fechados e que, em sua resolução, são utilizados conceitos e procedimentos anteriormente aprendidos.

2. Ensinar *sobre* Resolução de Problemas: Nessa perspectiva, o foco é a teoria sobre a Resolução de Problemas. Para isso, a ênfase do trabalho é o estudo de autores que discutem essa metodologia e os processos heurísticos para, depois, ser possível aplicá-la em suas aulas. Em geral, essa abordagem é desenvolvida em disciplinas específicas sobre

Resolução de Problemas na formação inicial ou em cursos de formação continuada. Em ambos os casos, o professor-aluno aprende a teoria e, em seguida, aplica o que aprendeu, resolvendo problemas.

3. *Aprender sobre* Resolução de Problemas: é uma variação da abordagem descrita acima, mas enfatiza a necessidade de que o professor assuma um papel central na construção de um conhecimento sobre Resolução de Problemas. Nessa abordagem o professor formador propõe o estudo de bibliografias ou recursos para o desenvolvimento das atividades. O resultado desse estudo culmina com a apresentação de seminários ou atividades reflexivas sobre as ações desenvolvidas.

4. Essa abordagem propõe que o professor/aluno vivencie práticas por meio da resolução de problemas, sem necessariamente teoriza-las ou problematiza-las.

Essa abordagem, contrariamente às anteriores, nega a importância de uma teoria sobre resolução de problemas. Supõe que o professor ou futuro professor, ao vivenciar uma prática diferenciada de RP ou IM, se apropria também de uma forma de ensinar e aprender matemática via RP. Esta abordagem, do mesmo modo que as duas primeiras, não promove problematização nem metacognição, a partir da reflexão e análise sistemática dessas práticas com/através RP ou IM. (Fiorentini, 2012, p. 70).

5. Esta abordagem é uma variação da anterior, porém com o intuito de problematizar e teorizar as experiências vividas em práticas de uso da resolução de problemas. As práticas referem-se ao ensino de disciplinas de formação matemática e também as disciplinas de natureza didático-pedagógicas. Seguramente, Fiorentini afirma que: “essa problematização ocorre mediante reflexões e análises contínuas e sistemáticas sobre o processo de vir a ser professor” (Fiorentini 2012, p. 70).

6. Esta abordagem, que tem forte impacto no desenvolvimento profissional do professor, “é a investigação sobre a própria prática de

ensinar/aprender matemática em um ambiente exploratório-investigativo ou de resolução de problemas. Essa abordagem tem sido utilizada por nós nos estágios supervisionados e na formação continuada de professores.” (Fiorentini, 2012, p. 70).

Reflexões

As potencialidades do uso da Resolução de Problemas são apontadas por diversos estudiosos e pesquisadores na área da Educação Matemática (Kilpatrick, 1987; Schoenfeld, 2007; Van de Walle, 2007; Singer, Ellerton & Cai, 2016. Onuchic & Allevato, 2011; Morais, Onuchic & Leal Júnior, 2017; Rosseto, 2018). Um ponto comum desses autores é apontar que o principal potencial do uso da Resolução de Problemas é promover o ensino de Matemática de uma forma mais acessível e, ao mesmo tempo, de um modo mais reflexivo para os estudantes.

Podemos apontar como potencialidades do uso da Resolução de Problemas na Licenciatura em Matemática (Ferreira, 2017, Correia Silva & Santos Júnior, 2021; Dias, 2021): proporcionar uma experiência com trabalhos em grupo que favorece as trocas de ideias entre os integrantes, levando-os a encontrar a melhor estratégia para resolver a situação-problema proposta, contribuindo para a construção do conhecimento matemático; contribuir significativamente para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, permitindo a construção do conhecimento por meio da participação ativa dos acadêmicos; desenvolver o pensamento e raciocínio matemático, com vistas ao alcance do letramento matemático; despertar o uso de diferentes formas de ensinar na futura atuação docente.

Porém, a Resolução de Problemas é ainda pouco utilizada na Licenciatura em Matemática, geralmente sendo trabalhada apenas em disciplinas de cunho didático-pedagógico, como práticas de ensino e estágio supervisionado. Ferreira (2017) ressalta que é necessário haver um maior empenho maior dos professores que atuam nas Licenciaturas para que possam aprender sobre novas metodologias de ensino capazes de articular teoria e prática. Para isso, é preciso uma mudança na prática desses professores e é papel das instituições promoverem políticas que incentivem esse processo. Aqui, ressaltamos a iniciativa da UNESP, que por meio da Escola de Formação dos Docentes da UNESP tem promovido atividades de formação pedagógica.

O paradigma da abordagem tradicional de ensino está enraizado nas concepções não somente dos professores, mas também dos alunos; entretanto acreditamos que o uso da Resolução de Problemas possibilita uma reflexão sobre as potencialidades do uso de diferentes metodologias de ensino.

Referências

- ALVES, A. M. M.; SILVEIRA, D. N. Uma leitura sobre as origens do Movimento da Moderna (MMM) no Brasil. **Tópicos Educacionais**, Recife, n. 2, p.16-17, jul./dez. 2016.
- ANDRADE, C. P. ONUCHIC, L. R. Perspectiva para a Resolução de Problemas no GTERP. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. P. 433-465.
- ANDREATTA, C.; ALLEVATO, N. S. G. Um cenário das pesquisas envolvendo Resolução de Problemas em edições do CIEM A scenario of research involving Problem Solving in issues of CIEM. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 21, n. 1, 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. Resolução CNE/CES nº 3/2003 – **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática**, Bacharelado e Licenciatura.

Brasília: 2003. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/ces032003.pdf>> Acesso em: 23 jul. 2024.

CORREIA SILVA, G.; DOS SANTOS JUNIOR, G. Ensino de Estatística na licenciatura em Matemática por meio da metodologia da resolução de problema. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 10, n. 21, p. 503–521, 2021. DOI: 10.33871/22385800.2021.10.21.503-521. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/6278>. Acesso em: 2 ago. 2024.

DIAS, D. M. G. **O uso da resolução de problemas no ensino de anéis de polinômios em um curso de licenciatura em Matemática**. 2021. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos Formativos) – Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira – SP. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/157138>>. Acesso em: 03 ago. 2024.

FERREIRA, N. C. **Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e suas contribuições para a Formação Inicial de Professores de Matemática**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências, e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2017.

FERREIRA, N. C.; SILVA, L. E.; MARTINS, E.R. A Resolução de Problemas no Ensino Superior. In: ONUCHIC I. R. et al. (Org.). **Perspectivas para a Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. P. 189-219.

FIORENTINI, D. Formação de Professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender Matemática. Conferência Interamericana de Educação Matemática, CIBEM. **Anais...** 13., Recife, 2012.

KILPATRICK, J. One point of view; Stop the bandwagon, I want off. **Arithmetic Teacher**, Reston, Va, 28(8), p. 2, Abril. 1981.

KILPATRICK, J. Problem formulating: Where do good problems come from. **Cognitive science and mathematics education**, p. 123-147, 1987.

LEAL JUNIOR, L. C.; ONUCHIC, L. R. Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sóciointeracionista. **Bolema**, v.29, n. 53, Rio Claro: 2015. P. 955-978.

MICHAELIS **moderno dicionário da língua portuguesa**. São Paulo: Melhoramentos. Disponível em:<<http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php>>.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C. Resolução de Problemas, uma matemática para ensinar? In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. V.1, cap. 13, p. 397-432.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. O lugar da matemática na licenciatura em matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 27, p. 981-1005, 1 dez. 2013.

NCTM. **Agenda for Action**: recommendations for school mathematics for the 1980s. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics. 1980.

NCTM. **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar**. (Tradução portuguesa do original em inglês de 1989). Lisboa: APM & IIE.1991.

NCTM. **Principles and Norms for School Mathematics**. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics. 2000.

ONUCHIC, L. R. A Resolução de Problemas na Educação Matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, 2012.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, v. 25, n 41, Rio Claro: 2011. P. 73-98.

RODRIGUES, M. U.; SILVA, L. D; FERREIRA, N. C. Clássicos da Educação Matemática nos Cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil. In: D'AMBROSIO, B. S.; MIARKA, R. (Org(s)). **Clássico da Educação Matemática Brasileira**: múltiplos olhares. Campinas – SP: Mercado de Letras. 2016. 301 – 346.

ROSSETTO, D. Z. **A Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio: o currículo do Estado de São Paulo e a visão dos professores**. 2018. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos

Formativos) – Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira – SP. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/157138>>. Acesso em: 19 mar. 2021.

ROSSETTO, D. Z.; BALIEIRO FILHO, I. F. A resolução de problemas no currículo de Matemática do estado de São Paulo e no caderno do aluno. **Revista Práxis Educacional**, v. 17, n. 45, p. 428-450, abr./jun. 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/praxisedu.v17i45.7060>. Acesso em: 02 ago. 2024.

SCHOENFELD, A. H. Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. **ZDM**, v. 39, n. 5-6, p. 537-551, 2007.

SERRAZINA, L. Resolução de problemas e formação de professores: um olhar sobre a situação de Portugal. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. P. 55-83.

SINGER, F. M; ELLERTON, N. F.; CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: from research to effective practice**. New York: Springer, 2016.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2007.

4

ASPECTOS DE FILOSOFIA DA MATEMÁTICA E DE FILOSOFIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – PARTE 1

Ricardo Mendes Grande

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

Logicismo, intuicionismo e formalismo¹ foram as três escolas mais importantes do começo do século XX no que diz respeito aos fundamentos da matemática. A escola intuicionista teve Brouwer e, posteriormente, Heyting como os seus principais expoentes; o formalismo foi, em grande medida, impulsionado pelo grande matemático David Hilbert. Quanto ao logicismo, embora Dedekind² mereça menção no que concerne às suas raízes históricas, foi em Frege que tal corrente filosófica ganhou a sua relevância e ímpeto iniciais.

1.1. O Logicismo

A princípio, o logicismo foi elaborado visando estabelecer a tese de que a aritmética seria redutível à lógica, tendo sido apresentado por Frege³ nos dois volumes de seu *Grundgesetze der Arithmetik* de 1893 e 1903, respectivamente. Não obstante, em Julho de 1902, Bertrand Russell (1967, p. 124) escreveu uma carta a Frege em que exibiu a possibilidade de derivação de um paradoxo no sistema lógico do pensador alemão. Ruiria assim o sistema de Frege, apesar de suas tentativas para contornar o problema; restaria a tese, agora nas mãos de Russell.

Como bem relata Nidditch (1963, p. 103), existe a visão difundida de que o trabalho de Frege passou completamente despercebido da

¹ Recomendamos (Da Silva, 2007) e (Da Costa, 2008) para uma introdução ao tema.

² Para uma análise da importância de Dedekind, sugerimos (Reck, 2013).

³ Recomendamos a obra "Os fundamentos da aritmética" (Frege, 1974) em que as teses centrais do logicismo fregeano são apresentadas de maneira não técnica.

comunidade de lógicos e matemáticos - até o momento em que Russell chamou a sua atenção para ele. É verdade que foi Russell quem deu ao trabalho de Frege a devida e merecida atenção, todavia, não é correto afirmar que o seu trabalho era completamente desconhecido. Não obstante, em sua *Introdução à filosofia matemática*, Russell (1981, p. 31) reforça a tese de que ele foi o *primeiro*⁴ a ler o trabalho do filósofo e lógico alemão:

Essas definições bem como a teoria generalizada da indução são de Frege e foram publicadas no remoto ano de 1879 em seu *Begriffsschrift*. A despeito do grande valor desse trabalho, fui, creio, a primeira pessoa que o leu – mais de vinte anos após a sua publicação.

Russell foi um pensador de grande honestidade intelectual e, possivelmente, estava apenas querendo enfatizar que Frege não recebeu a atenção adequada. Evidentemente, ele não foi o primeiro⁵ a ter lido – ou mencionado o *Begriffsschrift*, visto Peano (Nidditch, 1963) tê-lo citado em mais de uma ocasião desde 1891, além de ter elaborado uma análise do *Grundgesetze* em 1895 (Idem, p. 109). Podemos também conjecturar que Russell teve conhecimento do trabalho de Frege no congresso de Paris de 1900 através de Peano e de seus seguidores. Ele diz que se dirigiu ao matemático italiano e disse: “ ‘Quero ler todos os seus trabalhos. Você tem cópias deles?’”. Ele tinha e, imediatamente, eu os li todos” (idem, p. 109). Confiando neste relato, somos obrigados a concluir que Russell esbarrou em várias referências a Frege na obra de Peano.

Parte do debate ligado às raízes do logicismo é centrado em discussões filosóficas internas como aquelas entre empiristas (e.g., J. S.

⁴ Também em seu *History of Western Philosophy*, Russell dirá que o trabalho de Frege permanecera desconhecido até que dirigiu a sua atenção para ele em 1903: *In spite of the epoch-making nature of his discoveries, he remained wholly without recognition until I drew attention to him in 1903.* (Russell, 2002, p. 784)

⁵ Russell reconhecerá, posteriormente, a Nidditch (1963, p. 109) que “I know, quite definitely, that it was through Peano that I first became aware of Frege's existence”.

Mill), idealistas (e.g., Kant) e, finalmente, logicistas como Frege. O conceito de verdade analítica exercerá um papel relevante nesses debates. Para Frege, uma proposição analítica deveria envolver apenas leis gerais da lógica e definições e, nesse sentido, a aritmética seria um corpo de verdades analíticas⁶. Portanto, dizer que a aritmética é redutível à lógica seria sinônimo de dizer que era analítica. Frege criou uma linguagem artificial, uma escrita conceitual na qual o raciocínio sobre os conceitos da aritmética pudesse ser representado. Criou também a lógica moderna, tendo apresentado a sua primeira axiomática no *Begriffsschrift* em 1879. Ora, se naquela linguagem artificial, Frege definisse os elementos (termos, conceitos e noções gerais) da aritmética e demonstrasse todas as suas verdades, teria reduzido a aritmética à sua lógica⁷. Por exemplo, o conceito de número natural deverá ser definido explicitamente. Números são atributos de conceitos, não de coisas; por exemplo, dizer que o número 3 é o número de um conceito quer dizer que três objetos caem sob ele. O número zero será dado por o “número que convém ao conceito ‘diferente de si próprio’ ” – Frege (1974, p. 264). Já o número 1 será “o número que convém ao conceito ‘igual a 0’ ” (idem, ibidem). Outra maneira intuitiva e simples de ver isso (em notação moderna) é a seguinte⁸: seja $2_m(f)$ uma expressão que signifique que “pelo menos dois termos caem sob o conceito f ”, i.e.,

⁶ Lembremo-nos de que uma verdade seria analítica para Kant sempre que a ideia denotada pelo sujeito contivesse a ideia denotada pelo predicado. As verdades que não satisfizessem a essa relação seriam chamadas de *sintéticas*. Esta última classe se divide em *sintéticas a-priori* e *sintéticas a-posteriori*. As verdades matemáticas pertenceriam à primeira destas duas últimas, enquanto que aquelas das ciências empíricas, à segunda.

⁷ A lógica de Frege é essencialmente o que chamamos de lógica de segunda ordem hoje.

⁸ Retiramos este exemplo de (Carnap, 1983, p. 42). Carnap, a título de ilustração, foi um grande defensor do logicismo e da *natureza analítica* da matemática, apesar de o seu conceito de analiticidade diferir do de Frege. Mais precisamente, uma sentença analítica para Carnap seria aquela cujo significado do sujeito de uma proposição contivesse o de seu predicado. Note que, em Kant, falávamos em *representações* ou *ideias*, não em significado. Atualmente, os neologicistas procuram evitar a distinção analítico-sintético após as críticas contundentes de Quine.

$$2_m(f) =_{df} \exists x \exists y ((x \neq y) \cdot f(x) \cdot f(y))$$

Definimos, então, o número dois⁹ do seguinte modo:

$$2(f) =_{df} 2_m(f) \cdot \sim 3_m(f)$$

A definição de número dada por Frege permite demonstrar o princípio de Hume que nos diz quando dois conceitos têm o mesmo número. “Quando dois números são combinados de tal modo que um tenha sempre uma unidade correspondente a cada unidade do outro, pronunciemo-los iguais” (idem, ibidem). Note que, enunciado deste modo, o princípio de Hume não é claro o suficiente para as pretensões de Frege. O mais adequado é dizer que *dois conceitos possuem o mesmo número se, e somente se existe uma relação biunívoca entre os objetos a que se aplicam*. Através deste princípio¹⁰ é possível desenvolver a lógica de Frege e, finalmente, obter como resultado final a redução da aritmética à lógica – ver também (Da Silva, 2007, pp. 132-133). Como dissemos anteriormente, Russell escreveu uma carta para Frege em que exibiu um paradoxo¹¹, o qual viria a ser chamado de *Paradoxo de Russell*. E no exato momento em que Frege recebera a carta de Russell, o segundo volume do seu *Grundgesetze* se encontrava no prelo! Frege tentou consertar as bases de sua construção lógica, mas as suas tentativas foram em vão. Com a queda do edifício do programa de Frege, Russell tomou para si a

⁹ Equivalentemente, utilizando outra linguagem, Russell dirá que o número dois é o número da classe dos pares. O número de uma classe é a classe de todas as classes similares a ela. E assim, um número natural arbitrário será qualquer coisa que seja o número de uma classe- ver (Russell, 1981, cap. 2). Na linguagem fregeana, diríamos que o número de um conceito *C* é a extensão do conceito *equinúmero a C*.

¹⁰ De fundamental importância ao sistema de Frege para a demonstração do *Princípio de Hume* será a *Lei Básica V* - que dirá que as extensões de dois conceitos são idênticas se, e somente se, elas se aplicam aos mesmos objetos (Da Silva, 2007, p. 132). Para uma reconstrução do *Grundgesetze*, ver (Cadet & Panza, 2015).

¹¹ Uma exposição didática do paradoxo de Russell pode ser encontrada em (Da Silva, 2007, p. 133).

tarefa de mostrar que não apenas a aritmética era redutível à lógica, mas toda a matemática – ou ao menos, as suas partes *mais relevantes*.

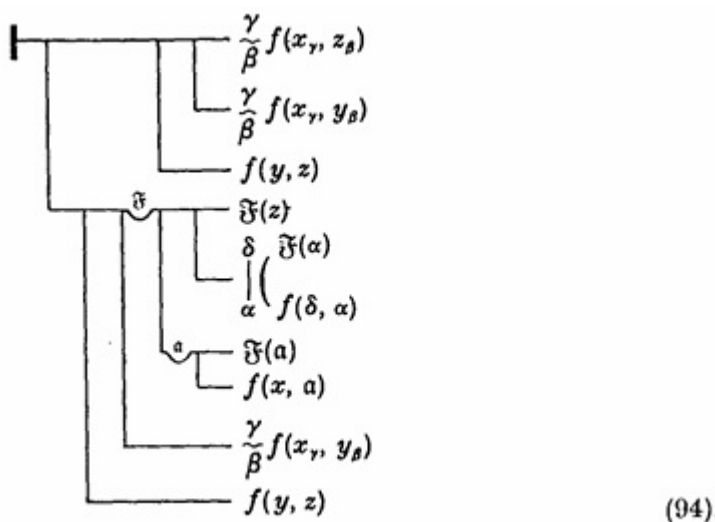
Bertrand Russell obteve o seu famigerado paradoxo observando que o sistema de Frege permitia a construção de antinomias através de *definições impredicativas*, i.e., aquelas violam que o *princípio do círculo vicioso* – PCV, o qual diz que *tudo aquilo que envolve menção a toda uma coleção não pode ser membro desta coleção* (Whitehead & Russell, 1973, p. 37)¹². A abordagem de Russell difere da de Frege em vários aspectos, em especial, na busca por um aparato lógico que impedisse a construção de sentenças contraditórias. Tal aparato – do qual falaremos adiante – é conhecido por *Teoria dos Tipos Lógicos*. O sistema de Russell incorporará vários axiomas, dentre eles, alguns cujos estatutos lógicos serão dignos de dúvida, e.g., os axiomas do infinito, multiplicativo e o da redutibilidade.

Conforme dissemos, a primeira axiomatização da lógica clássica foi apresentada no *Begriffsschrift* em 1879, embora, Frege tenha enunciado os axiomas na medida em que deles necessitava, e.g., a comutatividade da conjunção é o axioma dado pela proposição oitava, enquanto que a contraposição é a proposição vigésima oitava. Russell, por sua vez, será mais preciso neste ponto e já no início dos *Principia* (Part I – Section – A 1*) serão expostos os seus cinco¹³ axiomas proposicionais, além da regra de inferência (*Modus Ponens*). É bastante nítida a preocupação de Russell em elaborar um sistema preciso e claro, a partir do qual possa atingir o

¹² A primeira edição do primeiro volume dos *Principia Mathematica* é de 1910. Estamos utilizando a versão *Principia Mathematica* to *56. Ver também (Russell, 1908, I pp. 222-227) para uma discussão detalhada de alguns paradoxos famosos.

¹³ Retomaremos esta discussão mais adiante. No todo, Russell utilizará dez proposições primitivas, sendo cinco delas os axiomas proposicionais propriamente ditos. Nem todos os axiomas são, evidentemente, apresentados no início dos *Principia*. Eis o caso dos axiomas da redutibilidade, infinito e da multiplicidade que apenas serão necessários *a-posteriori*.

seu objetivo. Quanto à notação, ao contrário de Frege que utilizou um conjunto de símbolos bidimensionais para expressar as suas proposições primitivas (seis para o caso proposicional), Russell elaborará uma notação unidimensional inspirada no *Formulário* de Peano. A ideografia de Frege foi criada para ser mais geral de modo que os seus símbolos fossem diferentes dos da aritmética para evitar qualquer confusão; e além disso, suficientes para libertar a lógica da sua subordinação às linguagens naturais. Frege foi bastante original e preciso ao separar um juízo de seu conteúdo por uma simbologia clara, não obstante, impraticável para um tratado denso de lógica – sem dúvida, algo em que os editores concordariam conosco. A título de ilustração, retiramos o seguinte diagrama¹⁴ da proposição 94 do *Begriffsschrift*:



¹⁴ Recomendamos (Macbeth, 2012) para uma análise filosófica do raciocínio simbólico e diagramático em Frege.

Quanto ao sistema notacional dos *Principia Mathematica*, os seus autores serão mais econômicos em termos de espaço de impressão. A título de ilustração, os axiomas do cálculo proposicional dos *Principia* serão as proposições primitivas 1.2*-1.6*, as quais se escreverão, respectivamente, da seguinte maneira (Whitehead & Russell, 1973, pp. 95-97):

$$\begin{aligned} &\vdash: p \vee p. \supset. p \\ &\vdash: q. \supset. p \vee q \\ &\vdash: .p \vee q \supset. q \vee p \\ &\vdash: .p \vee (q \vee r) \supset. q \vee (p \vee r) \\ &\vdash: .q. \supset. r. \supset. p \vee q. \supset. p \vee r \end{aligned}$$

Além destas cinco proposições, serão enunciadas outras cinco, entre elas¹⁵ as proposições primitivas 1.1* e 1.11* que dizem, respectivamente, que *qualquer coisa implicada por uma proposição verdadeira é verdadeira* e que *ψx poderá ser afirmada sempre que ϕx e $\phi x \supset \psi x$ puderem ser ambas simultaneamente afirmadas* - sendo livres todas as ocorrências da variável x . Russell utilizará a expressão *variável real* em vez de *variável livre*. Aqui cabe uma breve discussão sobre os três princípios ditos tradicionais ou fundamentais da lógica clássica, i.e., os princípios da identidade, terceiro excluído e não contradição, que não figuram na lista de proposições elementares. Ora, eles são demonstráveis¹⁶ a partir dos cinco axiomas acima e da proposição 1.1*. É importante notar que Russell tinha claro em sua mente a diferença

¹⁵ As três proposições primitivas restantes não são axiomas, mas regras de formação de proposições. Note que as proposições 1.1* e 1.11* permitem, respectivamente, deduzir uma proposição e uma função proposicional nova. Quanto ao cálculo funcional, Russell utilizará mais seis proposições primitivas, sendo duas delas os axiomas propriamente ditos. As outras quatro serão constituídas de duas regras de inferência e duas regras postuladas pela teoria dos tipos.

¹⁶ Recomendamos o livro de Raymond Wilder (1965, Chap. IX. 2.2-3.6) para uma introdução ao cálculo proposicional dos *Principia*. Uma regra que Russell não enuncia explicitamente é a *regra da substituição*, embora a utilize em suas demonstrações.

entre axiomas e regras como fica explícito ao notar a diferença entre a proposição 1.1* e a proposição “Se p é verdadeira e se $p \rightarrow q$, então, q é verdadeira”. Ele nos diz que:

Nós não podemos expressar o princípio simbolicamente, em parte, porque qualquer simbolismo no qual p é uma variável apenas nos fornece a hipótese de que p é verdadeira, não o *fato* de que é verdadeira (Whitehead & Russell, 1973, p. 94)¹⁷.

Foi no ano de 1908 – dois anos antes da publicação dos *Principia* – que Russell elaborou a sua *Teoria dos Tipos* em seu famoso artigo *Mathematical logic as based on the theory of types* (Russell, 1908), da qual falaremos resumidamente agora.

1.2 Teoria dos tipos lógicos

A teoria dos tipos pode ser levada à sala de aula no contexto da discussão referente à fundamentação da matemática. Muitas vezes, os alunos são apresentados à teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel e acabam não refletindo sobre a possibilidade de se utilizar outra axiomática (e.g., von Neumann-Bernays-Gödel) – ou quiçá de uma teoria alternativa como a dos tipos.

A primeira versão da teoria dos tipos de Russell é discutida no apêndice – b de *The principles of mathematics* (Russell, 1903) onde encontramos a proibição de que uma função φ possa ser tomada como um de seus argumentos, i.e., serão proibidas expressões da forma $\varphi(\varphi)$ – ou $\varphi(\varphi x)$. Esta abordagem continha as ideias básicas da versão acabada da teoria publicada em 1908, mas era incapaz de resolver todas as antinomias que tanto incomodavam os lógicos do começo do século

¹⁷ O leitor atento pode se questionar o porquê de as citações dos *Principia* conterem o nome de Whitehead antes do de Russell e, ainda assim, de nos dirigirmos diretamente a Russell no texto, não a Whitehead. O motivo é simples: a parte lógica do tratado foi escrita - em sua maior parte - por Russell.

XX. Russell desenvolveu duas versões da Teoria dos Tipos, a Teoria Simples e a Teoria Ramificada. Frank Plumpton Ramsey, ao separar os paradoxos em semânticos e de conjuntos, argumentou que a Teoria Simples dos Tipos bastaria para os propósitos logicistas de Russell; todavia, não discutiremos aqui o trabalho de Ramsey (1950, pp. 1-61).

Dada uma função proposicional φ , é importante notar que não são os seus argumentos que a pressupõem, mas ela que os pressupõe. Nesta direção, um argumento não pode ser definido em termos de uma totalidade que o pressupõe, o que nos levará a proibir expressões do tipo $\varphi(\varphi x)$, conforme dissemos acima. Tal expressão não poderá ser falsa, dado que a sua negação seria verdadeira. Restou a Russell tomá-la como destituída de significado ou, mais precisamente, sintaticamente incorreta. Por trás desse tipo de proibição, estaria o já mencionado Princípio do Círculo Vicioso (PCV). Qualquer definição que viole este princípio é dita *impredicativa*. Por exemplo, *a aluna mais alta da classe* é definida em termos de toda a classe, no caso, de uma quantificação sobre uma totalidade. Neste caso, temos uma definição *inofensiva* e que não gera grandes problemas. Em matemática, definições impredicativas envolvendo, por exemplo, os conceitos de supremo e ínfimo, como no cálculo da raiz quadrada de 2, ocorrem o tempo todo. Russell estaria, então, causando um dano enorme à matemática clássica ao excluir tais definições. Veremos, mais tarde, como Russell lidou com esse problema ao analisarmos o *Axioma da Redutibilidade*. Russell necessitará de uma versão mais sofisticada da teoria chamada de *Teoria dos Tipos Ramificada*. No caso da teoria simples, o que se tem é uma hierarquia imediata de níveis:

Tipo 0 – objetos

Tipo 1 – Classes de objetos

Tipo 2 – Classes de classes de objetos

...

Quanto à teoria ramificada, teremos uma hierarquia de objetos e funções proposicionais. Uma maneira didática de visualizar essa hierarquia é através de um sistema de símbolos dispostos em duas dimensões. Sejam: T_0 o tipo dos objetos; T_1 o tipo das funções proposicionais de ordem 1; funções proposicionais de ordem 2 serão aquelas cujos argumentos poderão ser objetos ou funções proposicionais de ordem 1, sendo os seus tipos, respectivamente, T_{20} e T_{21} ; etc. Desse modo, seguindo recursivamente com a construção, teremos a seguinte árvore infinita:

$$\begin{array}{c} T_{30}T_{31}T_{320}T_{321} \\ T_{20}T_{21} \\ T_1 \\ T_0 \end{array}$$

O quinto nível da árvore conterá oito ramos, os tipos indexados com o numeral quatro à esquerda - T_{40} , T_{41} , T_{420} , T_{421} , T_{430} , T_{431} , T_{4320} , T_{4321} - e a complexidade da árvore aumentará rápido. Vejamos, então, simplificadamente a teoria ramificada dos tipos em um contexto moderno utilizando outro sistema de notação.

Um tipo é¹⁸ definido como o escopo de significância de uma função proposicional dentro do qual a função assume os seus valores (Russell, 1908, p. 236). Será dentro deste escopo que a função será verdadeira ou falsa. A teoria dos tipos ramificada partirá de uma versão mais sofisticada de PVC: “O que quer que contenha uma variável aparente não pode ser um valor possível daquela variável” ou, mais precisamente, “O

¹⁸ Na introdução à segunda edição do primeiro volume dos *Principia* (Whitehead & Russell, 1973, pp. 37-55), a hierarquia de tipos será discutida de modo mais detalhado e preciso do que no artigo de 1908.

que quer que contenha uma variável aparente deve ser de um tipo diferente dos valores possíveis daquela variável; diremos que é a uma variável de um *tipo superior*” (idem, p. 237). Ao nível mais baixo, pertencerão os objetos, i.e., os que não são funções, nem proposições. Lembremo-nos de que uma função proposicional será definida como algo que contenha uma variável x e que venha expressar uma proposição quando algum valor for atribuído a x . Ao próximo¹⁹ nível da hierarquia pertencerão as funções do cálculo de predicados, i.e., aquelas cujos quantificadores variam sobre os indivíduos, por exemplo, $\exists x \forall y \varphi(x, y, z)$. Estas funções serão ditas de *primeira ordem* e, se tomadas como argumentos no domínio de quantificação de alguma outra função Ψ , esta última será dita de *segunda ordem*, e assim por diante, até qualquer ordem arbitrária.

Dito de outro modo numa linguagem moderna²⁰, se $a_1, a_2, \dots, a_m$ são tipos com $m \geq 0$, deve haver um tipo $(a_1, a_2, \dots, a_m)/n$ ao qual pertencerão as variáveis funcionais m -árias de nível $n \geq 1$. Por exemplo, se τ denotar o tipo dos objetos, $(\tau, \tau)/2$ denotará o tipo da variável para uma relação binária de segunda ordem entre objetos (claro, estes de tipo τ). A ordem de um tipo $(a_1, a_2, \dots, a_m)/n$ será dada pelo máximo M das ordens de $a_1, a_2, \dots, a_m$ adicionada a n , i.e., $M + n$. De modo geral, uma variável de tipo $(a_1, a_2, \dots, a_m)/n$ varia sobre funções proposicionais m -árias cujos argumentos são dos tipos $a_1, a_2, \dots, a_m$ e de modo que nenhuma quantificação de nível maior ou igual a n esteja envolvida. Esta é a tradução precisa da última versão do PCV mencionada por Russell - no qual ele entende *variável aparente* por

¹⁹ É importante ter em mente que haverá hierarquias de objetos e, para cada tipo, ordens de funções proposicionais hierarquizadas de acordo com a quantificação sobre as totalidades referentes às ordens inferiores.

²⁰ Para uma apresentação moderna e resumida da teoria dos tipos, recomendamos o artigo de Urquhart (2003, pp. 286-309).

variável ligada (ou quantificada) Além disso, é importante sabermos quando um tipo é diretamente inferior a outro. Neste caso, diremos que $(a_1, a_2, \dots, a_m)/n$ é diretamente inferior a $(b_1, b_2, \dots, b_m)/l$ - se $a_i = b_i$ para cada $i = 1, \dots, m$ - e se $n < l$.

Até aqui, falamos apenas da notação. A análise detalhada da teoria requereria a exposição dos seus axiomas, inúmeras outras definições e regras; tal análise se encontra fora do escopo de nosso artigo. Entretanto, apenas a título de ilustração, haverá uma hierarquia de identidades, uma para cada nível. Mais precisamente, definamos por x^τ as variáveis objetuais e, de modo geral, x^β denotará uma variável sobre os objetos de tipo β ; $x^\beta = x^\gamma$ será uma expressão bem-formada se, e somente se as variáveis x^β e x^γ forem de mesmo tipo. Mesmo esta brevíssima discussão já parece indicar que a teoria ramificada adquirirá uma complexidade grande e será de difícil manuseio - como que se Hércules precisasse de uma hierarquia de facas para cortar as cabeças das hidras - no caso, das antinomias.

Vejamos um exemplo (Urquhart, 2002, p. 300-301) de solução de antinomia utilizando uma notação moderna, no caso, o paradoxo de Epimênides, o qual - a principio - pode ser formulado na linguagem da teoria dos tipos simples. Tome a proposição p dita por Epimênides: *Estou mentindo*. Seja U o conjunto de todas as proposições que poderiam ter sido ditas por Epimênides e que p seja, então, a proposição afirmada pelo ilustre cretense. Podemos formalizar o paradoxo do mentiroso do seguinte modo:

$$U(p) \equiv (p = \forall q(U(q) \rightarrow \sim q))$$

Se denotarmos $\forall q(U(q) \rightarrow \sim q)$ por R , será imediato que $R \equiv \sim R$ - dado que podemos utilizar $\sim R$ e R como proposições ditas por

Epimênides. Não obstante, na teoria ramificada, precisaremos atribuir tipos a todas as variáveis p , q e à função proposicional U . Suponha que a ordem de p seja n . A ordem de U deverá ser superior às ordens de p e de q . A ordem de q deverá ser menor ou igual à de p , visto q também pertencer ao domínio de U . A identidade à direita não poderá ser uma expressão bem-formada, visto que a expressão quantificada deverá ter ordem superior à de p . Deste modo, a teoria dos tipos ramificada bloqueará a antinomia.

Como bem notou Gödel (2006), Russell deixou inúmeros detalhes implícitos na sua apresentação da teoria nos *Principia*, os quais seriam preenchidos posteriormente por Alonzo Church. Além de todas as complicações técnicas da teoria, boa parte da matemática seria descartada por envolver definições impredicativas, como dissermos anteriormente. A construção dos números reais estaria completamente comprometida, visto envolver a definição de supremo que é impredicativa e seria necessário separar os números em ordens. Para esse problema, Russell lançou mão do *Axioma da Redutibilidade*, do qual falaremos agora.

Tome a seguinte expressão²¹ como *mote* para a nossa glosa: *Napoleão tinha todas as qualidades de um grande general*. Aqui Napoleão figura como um objeto do primeiro nível da nossa hierarquia e *todas as qualidades* se referem a um predicado de segunda ordem, visto estar qualificando termos de primeira ordem. Todavia, poderíamos nos perguntar quais são as qualidades de um grande general, e.g., corajoso,

²¹ Exemplo russelliano que tiramos de *Principia* (Whitehead & Russell, 1973, p. 56) e que reaparecerá em “Logic and ontology” (Russell, 1957). Mais precisamente, a expressão *x tem todas as qualidades de primeira ordem que fazem um grande general* será de tipo 1 e ordem 2, pois toma indivíduos como argumentos e quantifica sobre as qualidades de ordem 1. Tal função não será predicativa, visto não ser da ordem imediatamente acima à ordem do argumento. E o axioma da redutibilidade permitirá abaixar a sua ordem.

astuto, inteligente, ativo, prudente, metódico, etc. Estas qualidades pertencem ao nível imediatamente superior ao do objeto *Napoleão* e imediatamente abaixo do nível de *todas as qualidades de um grande general*. Note que será possível reduzir a ordem de um predicado através da enumeração de outros, mais precisamente, pela criação de outro predicado de ordem inferior – ver (Whitehead & Russell, 1973, pp. 56-57). Note também que o número de gerais é finito e também o de suas qualidades; algumas destas os caracterização de modo unívoco, como a data, local, hora do nascimento. De modo geral, teremos que “o axioma da redutibilidade é equivalente à assunção de que “qualquer combinação ou disjunção de predicados é equivalente a um único predicado” (Whitehead & Russell, 1973, pp. 58-59).

O problema, evidentemente, não seria o de lidar com sentenças da linguagem natural, dado que o projeto russelliano era o de reduzir a matemática à lógica. Não obstante, inúmeros teoremas da matemática não seriam passíveis de demonstração sem a teoria ramificada com a introdução de um novo axioma, i.e., o da redutibilidade, cuja ideia geral fica bem exemplificada pelo exemplo anterior. Antes de enunciarmos tal axioma, vejamos outros problemas que Russell teria que contornar.

Para piorar a situação de Russell, sequer é possível provar a existência de infinitos objetos de um tipo arbitrário β . Para contornar este problema, foi introduzido o *Axioma do Infinito* que diz haver infinitos objetos. Ora, números são classes de classes de objetos e, se não há objetos suficientes, não há classes suficientes, logo, não haverá números suficientes²²! E agora, após aceitarmos o axioma do infinito,

²² Em “Introdução à filosofia matemática”, Russell (1981, p. 129) elaborará uma apresentação didática e filosófica do axioma do infinito: “Se n for um número cardinal indutivo qualquer, haverá pelo menos uma classe de indivíduos com n -termos”. O leitor pode aqui se colocar a seguinte questão: suponha haver 0 objeto no mundo. Tome, por exemplo, a classe vazia; tome, agora, a classe cujo único elemento é a classe vazia. Desta segunda classe, obtemos as suas subclasses, no caso, duas classes, 2^1 ; contamos,

esbarramos no problema das definições impredicativas. Tome a definição do conjunto dos números naturais dos *Principia*: “O menor conjunto N contendo 0 de modo que $\forall x(x \in N \supset x + 1 \in N)$ ”. A expressão *o menor conjunto* envolve quantificações sobre totalidades, i.e., sobre a família de todos os conjuntos que satisfazem a propriedade indutiva enunciada. Podemos afirmar, então, que mesmo de posse dos axiomas do infinito, mas sem o da redutibilidade, será impossível demonstrar os axiomas de Peano nos *Principia*.

Suponha, a título de ilustração, que postulamos os axiomas de Peano. Tome o seguinte axioma da análise real: seja S um conjunto não vazio e limitado superiormente de números reais. Então, existe um número real r com a seguinte propriedade: $\forall x(x \in S \supset x < r)$, i.e., S admite uma menor cota superior. A teoria quantificada dos tipos permite definir r , porém, a sua ordem será maior que a de todos os elementos de S , o que significa que haverá números reais de várias ordens e que a teoria ramificada dos tipos não permitirá construir a matemática clássica adequadamente. Ora, na análise real clássica, todos os números reais têm o mesmo estatuto na reta, não há números de ordens superiores. Daí a necessidade do axioma da redutibilidade para *nivelar* todos objetos da teoria.

Na linguagem dos *Principia*, o enunciado do axioma da redutibilidade nos dirá que *dada qualquer função $\varphi\hat{x}$, há uma função predicativa formalmente equivalente a ela* (Whitehead & Russell, 1973, p. 56). Em linguagem moderna, dizemos – primeiramente – que uma

então, com dois objetos. Em seguida, tome as suas subclasses e obtenha 2^2 objetos; seguindo com o procedimento, 2^4 , 2^{16} - i.e. 65536, etc. Parece óbvio que poderemos obter um número natural n maior que qualquer número natural previamente escolhido m . Finalmente, somamos todos eles e obtemos um cardinal infinito. Tal argumento é falacioso, dado que estaremos lidando com classes de classes de classes (...) de classes, i.e., estamos misturando os tipos dos objetos. Lembremo-nos de que números são apenas classes de classes. Tal argumento será analisado, em detalhes, por Russell (idem, pp. 130-133).

função é predicativa se, e somente se é do tipo predicativo, i.e., se seu tipo é $(a_1, a_2, \dots, a_m)/n$ com $n = 1$. O axioma diz que qualquer função proposicional é logicamente equivalente a uma função predicativa. Agora sim, poderemos falar dos números reais da análise real clássica, pois, duas funções proposicionais equivalentes determinarão a mesma classe de objetos. Encerremos esta seção com algumas notas.

1. Os axiomas do infinito e da redutibilidade não podem ser considerados analíticos. No caso do primeiro, não se pode dizer que uma proposição sobre a quantidade de objetos no mundo seja de natureza puramente lógica; já o caso do segundo é apenas um truque cuja justificação por Russell foi pragmática (idem, pp. 59-60);
2. Além dos axiomas do infinito e da redutibilidade, foi necessária a introdução do axioma multiplicativo que *pode ser enunciado, mas não provado, em termos de Lógica e que é conveniente, embora não indispensável (...)* (Russell, 1981, p. 115). Ou seja, temos mais um axioma não lógico;
3. Conforme dissemos anteriormente, Ramsey argumentou que a separação dos paradoxos em conjuntistas e semânticos nos deixa livre para trabalhar apenas com a teoria simples dos tipos. A introdução do axioma da redutibilidade acaba tendo um efeito bastante similar ao de emular uma teoria dos tipos simples. Parece, então, que tal axioma é redundante, caso sigamos a proposta de Ramsey;
4. Alguns paradoxos podem ser construídos na teoria dos tipos ramificada. Vimos, anteriormente no contexto do paradoxo de Epimênides, a seguinte expressão:

$$U \equiv (p = \forall q(U(q) \rightarrow \sim q))$$

Se trocarmos a igualdade presente no lado direito da expressão pela equivalência material, podemos utilizá-la como uma expressão bem-formada para representar uma antinomia como a de Richard. Agora a sua exclusão será *ad-hoc* e sem uma justificação técnica ou sintática. Podemos dizer que o projeto hercúleo de Russell e Whitehead fracassou assim como o de Frege. Não obstante, deixou inúmeras sementes para o desenvolvimento da lógica. E podemos dizer, como o faz Priest (2001, p. XVIII), que a lógica clássica é a lógica de – dentre outros – a de Russell e de Frege.

5. Finalmente, fica a questão: é possível construir a matemática na teoria dos tipos? A resposta simples é: assim como é possível basear a matemática em uma

teoria de conjuntos, é possível fazê-lo em uma teoria de tipos. Entretanto, a redução não é lógica como o queria Russell. Note também que, mesmo o conceito de conjunto esconde uma noção interna de tipo lógico, como bem mostrou Boolos (1971).

Vejamos, agora, algumas questões sobre a importância da lógica para a filosofia da educação matemática.

1.3. Formação do conceito de número

A proposição ‘ $1+1=2$ ’ é uma verdade, uma convenção ou um enunciado tautológico? Piaget (1973, p. 62).

Encontramos uma densa discussão sobre o conceito de número natural e algumas das tentativas de defini-lo nos *Grundlagen* de Frege (1974, II §18-27). Entretanto, podemos dizer, sem sombra de dúvidas, que foi Frege quem elaborou de modo correto, adequado e satisfatório a sua primeira definição em 1884 (idem, IV).

Em sua epistemologia genética, Piaget (1973, p. 62) se perguntará a respeito da gênese das verdades aritméticas. Seriam elas impostas a nós pela experiência empírica (como pensava J. S. Mill)? Seriam frutos da síntese kantiana, ou quiçá de operações puramente lógicas? Lembremos de que, para Leibniz, toda verdade matemática deveria ser do tipo “ $x = x$ ”. Tomemos o caso de “ $1+1=2$ ”. É imediato que: “ $1+1=1+1$ ”. Podemos estender este raciocínio para qualquer enunciado - acerca dos números naturais - que seja do tipo “ $a + b = c$ ”; basta trocar a *quantidade* de a ’s, b ’s e c ’s por suas respectivas unidades correspondentes. Por exemplo, “ $1+2=3$ ” deve ser reescrita por “ $1+(1+1)=1+1+1$ ” e, finalmente, por “ $1+1+1=1+1+1$ ”. Para Poincaré (1905, p. 4), este procedimento é uma verificação, não uma demonstração, sendo que a “verificação difere da prova porque é analítica e não leva a nada”. Para o matemático francês,

toda demonstração é constituída de uma construção, não uma *mera checagem* de instâncias. No caso da adição de números naturais, as demonstrações das proposições citadas devem ser feitas pelo princípio da indução finita, também denominado de *prova por recorrência* (idem, p. 8).

Para os intuicionistas como Heyting – o discípulo mais famoso de Brouwer – o conceito de entidade matemática surge da nossa capacidade de isolar um complexo de sensações e de repetir tal atividade indefinidamente. Neste caso, os números naturais seriam produtos da mente humana e, assim como se dava em Kant, a estrutura do mundo será imposta pelo aparato cognitivo do sujeito que o conhece. Para os intuicionistas, *verdade matemática* é sinônimo de *construção* (claro que através de um conjunto finito de regras que estabeleçam um procedimento efetivo).

Podemos também dizer que a criança constrói o conceito de número pelo processo de abstração – através do conceito de *equinumericidade* – pela comparação de coleções com a mesma quantidade de objetos. Neste caso, o número natural n passa a ser o *número da coleção*, mais precisamente, uma propriedade comum a todas aquelas coleções. Em suma, a gênese do conceito de número é – a nosso ver – um tema importante que pode ser trabalhado pelos estudantes partindo da abordagem dos logicistas e, então, contrastado com a dos intuicionistas, formalistas e com o trabalho de Piaget.

1.4 Fundamentos da matemática e prática matemática

A busca pela fundamentação *rigorosa* das ciências formais e da natureza – na parte final do século XIX – pode ser vista bastante claramente nas primeiras palavras do prefácio de *Was sind und was sollen die Zahlen?*: “Em ciência, nada capaz de prova deveria ser aceito

sem prova (...). Ao falar da aritmética (álgebra, análise) como parte da lógica, quero dizer que considero o conceito de número inteiramente independente das noções ou intuições de espaço e tempo...” (Dedekind, 1996, p. 791). Blanché (1985, p. 305) estava correto ao dizer que, no que concerne a tentativa de se basear a matemática na lógica “O desenvolvimento das matemáticas nos finais do século²³ convidava a esta mudança de perspectiva nas relações da lógica e das matemáticas”. Tal fato também é enfatizado por Reck: “Significantly, logicism revealed itself as in line with, or as the completion of, the rise of ‘pure mathematics’, i.e., the separation of arithmetic, analysis, algebra, etc. from a geometric foundation” – (Reck, 2011, p. 263)²⁴. A aritmetização da análise permitiu que se colocasse a questão do estatuto ontológico da própria aritmética e da sua fundamentação, tendo os paradoxos conjuntistas do início do século XX servido de *mote* para a *glosa* da fundamentação da matemática nos *Principia Mathematica*.

Vimos que Frege elaborou uma ideografia baseada em um conjunto de símbolos bidimensionais e na qual os seus axiomas eram enunciados à medida que eram necessários. Não foram colocadas questões sobre a consistência e independência dos axiomas e, claro, sobre a completude do cálculo. E com o passar dos anos, novos sistemas notacionais foram desenvolvidos, questões referentes à quantidade mínima de axiomas foram discutidas e o problema da completude da lógica de primeira ordem foi colocado, o qual foi resolvido em 1930 por Gödel em sua tese de doutorado. A lógica que Frege criou para fundamentar a aritmética é essencialmente de segunda ordem e, portanto, inevitavelmente incompleta.

²³ Século XIX

²⁴ Esta nota de Reck é bastante precisa e interessante. Lembremo-nos de que Frege permaneceu kantiano com relação à geometria – colocada à parte da análise, álgebra e da aritmética.

Além do teorema da completude de Gödel, teremos os seus dois teoremas da incompletude de 1931 que se referem basicamente ao sistema dado pelos axiomas de Peano formulados numa linguagem de primeira ordem. A prova original de Gödel partiu do sistema lógico dos *Principia Mathematica* e dos axiomas de Peano. Dado que estes últimos são demonstráveis nos *Principia*, a sua utilização teve a finalidade de *economia de pensamento*. Quanto à completude do cálculo proposicional dos *Principia*, Paul Bernays foi o primeiro a demonstrá-la em 1918; Emil Post obteve a sua prova da completude do cálculo proposicional pelo método das tabelas de verdade em sua tese de doutorado em 1921. As tabelas de verdade foram elaboradas também por Wittgenstein e Peirce, embora, já estivessem implícitas nos trabalhos de Frege e Russell. Frege (1967, §5 p. 13) nos diz que – concernente à implicação material: “Se A e B se referem a conteúdos que possam se tornar juízos, há quatro possibilidades: 1. A é afirmada e B é afirmada; 2. A é afirmada e B é negada; 3. A é negada e B é afirmada. 4. A é negada e B é negada”. E assim, o símbolo introduzido para o juízo que expressa a implicação material²⁵ (de A por B)



se referirá ao caso em que qualquer um dos casos acima se der, excluindo-se o terceiro. i.e., aquele em que B é afirmada e A negada. Uma breve reflexão nos levará ao caso em que *afirmada* se referirá à proposição *verdadeira* e, *negada*, à *falsa*.

²⁵ As condições materiais em que uma implicação se dá foram estabelecidas cerca de 300 a.C. pelos filósofos de Mégara, em especial por Filon (Blanché, 1985, p. 101).

Em Peano (Couturat, 1899), encontramos uma linguagem notacional que influenciaria Russell, enquanto que, em Boole, teremos uma lógica matemática em que a matemática é utilizada para resolver problemas da lógica. Já nos logicistas, o que veremos será a tentativa de se construir uma lógica para a matemática, i.e., que a fundamente. Não obstante, esta visão só foi possível em razão da prática matemática do século XIX em que questões de natureza fundacional, como as da aritmetização da análise, se mostraram relevantes.

Em suma, vimos que Frege criou de punho próprio uma ideografia, axiomatizou a lógica clássica e buscou fundamentar a aritmética em noções lógicas. O logicismo surgiu, em grande medida, influenciado pela prática matemática, i.e., por seus avanços durante o século XIX, embora, as suas origens sejam muitas vezes discutidas quase que essencialmente do ponto de vista da filosofia e dos seus debates internos. A redução da matemática à lógica, não obstante, não era uma tese nova por certo, visto que Leibniz já pedira que todas as verdades da razão se reduzissem à proposição idêntica $x = x$. Ainda no contexto do debate filosófico, Kant criara o conceito de verdades *sintéticas a-priori* para justificar a natureza e possibilidade do conhecimento matemático, opondo-se assim ao racionalismo de Leibniz, relegando a ele as proposições analíticas. É mister ter em mente que o desenvolvimento da matemática não deu razão a Kant e abriu espaço para a busca de conceitos mais amplos que fundamentassem aqueles da própria aritmética.

O tema da fundamentação da matemática e a sua relação com o seu desenvolvimento histórico é de grande importância na filosofia da matemática e da educação, podendo servir diretamente para o estudante compreender melhor a prática matemática em cada contexto histórico, i.e., a manifestação do *Espírito do tempo* em cada época específica.

1.5 Conhecimento simbólico

No apêndice – A de seus *Principles of mathematics*, Russell analisara as doutrinas lógicas e aritméticas de Frege e demonstrara determinada insatisfação com a sua notação bidimensional, apesar de considerá-la bastante superior à de Peano do ponto de vista filosófico (Russell, 1903, p. 475). O lógico inglês estava à procura de um sistema de símbolos que o ajudasse naquilo que viria a ser a sua empreitada hercúlea de reduzir a matemática à lógica.

Todavia, três anos antes da publicação dos *Principles*, no congresso de Paris em 1900, Russell teve contato com o trabalho de Peano e de sua escola. O lógico inglês teria ficado impressionado com a precisão e clareza do trabalho do matemático italiano e com a possibilidade de utilizá-lo não só na matemática, mas na filosofia. A lógica, para Russell, não devia se restringir à matemática, mas se estender à reflexão filosófica de modo geral, como fica evidente na lição *A lógica como essência da filosofia*: “Os tópicos discutidos em nossa primeira conferência e os que discutiremos a seguir, na medida em que forem genuinamente filosóficos, reduzir-se-ão a problemas de lógica” (Russell, 1966 p. 24). Um exemplo específico e digno de nota é a utilização da teoria dos números transfinitos de Cantor para analisar o conceito de infinito²⁶ (idem, cap.7).

Embora não defendamos que a filosofia toda seja lógica e, menos ainda, que se reduza à análise da linguagem, acreditamos que o estudante se beneficiará do estudo da aplicação de conceitos lógicos a determinadas áreas da filosofia. Não obstante, será na lógica, na física e na matemática que o conhecimento simbólico apresentará as suas características mais claras e distintas.

²⁶ Ver também (Russell, 1981, Cap. VIII & IX).

Quanto aos sistemas notacionais na matemática, Florian Cajori nos brindou com uma das investigações mais espetaculares já desenvolvidas em história da matemática, a qual se encontra condensada nos dois volumes de *A history of mathematical notations* (Cajori, 1993). Ao estudar os sistemas de notação de vários povos da antiguidade, passando pela Idade Média e chegando à modernidade, o historiador elaborou uma *arqueologia do pensamento matemático*. É através dos símbolos que se cristaliza o pensamento matemático e - pelo estudo da sua evolução - podemos ter um vislumbre de como o próprio pensamento matemático se consolida no tempo. O estudo da importância das notações matemáticas é um tópico relevante que pode ser discutido em sala de aula e, inclusive, os estudantes podem ser incentivados a desenvolver os seus sistemas notacionais para a resolução de problemas elementares.

É bastante comum - e razoável - encontrarmos discussões históricas referentes a sistemas notacionais da antiguidade e da modernidade em livros-textos de história da matemática; não obstante, é raro nos depararmos com discussões filosóficas a seu respeito. Neste contexto, Grande²⁷ e Da Silva (Grande & da Silva, 2021, Cap. 3), elaboraram um estudo filosófico do papel das notações na construção do edifício da matemática. Quatro das suas principais funções são: i. precisão e concisão; 2. possibilidade de sua extensão a novos problemas; 3. heurística; 4. explicitação de estruturas. Uma boa notação é o substituto adequado para o cálculo mental e permite ao matemático resolver uma vasta gama de problemas apenas pelo cálculo cego ou simbólico propriamente dito.

²⁷ Ver também, para uma discussão sucinta dos sistemas notacionais (Grande, 2023).

Referências

- BLANCHÉ, R. **A história da lógica de Aristóteles a Bertrand Russell**, Edições 70, Lisboa (1985).
- BOOLOS, G. “The iterative concept of set”. *The Journal of Philosophy*. Vol. 68, Nº 8, pp. 215-231 (1971).
- CAJORI, F. **A history of mathematical notations- two volumes bounds as one**. Dover Publications, Inc. New York (1993).
- CARNAP, R. “The elimination of metaphysics through logical analysis of language”. In Ayer. A.J. (ed.), **Logical positivism**. Westport, Conn.: Greenwood Press. pp. 60-81 (1966).
- CARNAP, R. “The logicist foundations of mathematics” in **Philosophy of mathematics – 2nd Edition**, BENACERRAF, P. & PUTNAM, H. Cambridge University Press, USA (1982).
- CARNAP, R. **Introduction to symbolic logic and its applications**. Dover Publications, Inc. New York (1958).
- CARNAP, R. **Logical syntax of language**. Routledge, Great Britain (2002).
- CADET, M. & PANZA, M. “The logical system of Frege’s Grundgesetze: a rational reconstruction”. *Manuscrito Rev. Int. Fil.*, Vol.38, Nº1, pp. 5–94 (2015).
- COUTURAT, L. “La logique mathématique: de M. Peano”, *Revue de Métaphysique et de Morale*, T. 7, Nº5 (1899).
- DA COSTA, N. C. A. **Introdução aos fundamentos da matemática – 4^a Edição**. Hucitec, São Paulo (2008).
- DA SILVA, J. J. “Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática”. In: M. Bicudo (org.) **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. (1999).
- DEDEKIND, R. “Was sind und was sollen die Zahlen?” in EWALD, W. **From Kant to Hilbert – vol. II**, Clarendon Press, USA (1996).

- FREGE, G. **Os fundamentos da aritmética**. Coleção os Pensadores – Abril Cultural, São Paulo (1974).
- FREGE, G. “Begriffsschrift” In **From Frege to Gödel- a source book in mathematical logic, 1897-1931** . VAN HEIJENOORT, J. (Ed). Cambridge University Press, USA (1967).
- GÖDEL, K. “La lógica matemática de Russell”. Em MOSTERIN, J. **Kurt Gödel – Obras completas**, Alianza Editorial, pp. 313-343, Madrid (2006).
- GÖDEL, K. “Sobre sentencias formalmente indecibles de Principia Mathematica y sistemas afines”. Em MOSTERIN, J. **Kurt Gödel – Obras completas**, Alianza Editorial, pp. 313-343, Madrid (2006).
- GRANDE, R. M. “On symbolization in mathematics”. *Философски алтернативи*. Nº6 pp. 34-50 (2023).
- GRANDE, R. M. & DA SILVA, R. R. S. **O símbolo e a realidade**. Editora Fi, Porto Alegre (2021).
- MACBETCH, D. “Diagrammatic reasoning in Frege's "Begriffsschrift" in **Diagrams in Mathematics: History and Philosophy**. Synthese, Vol. 186, Nº1, pp. 289-314 (2012).
- NIDDITCH, P. “Peano and the recognition of Frege”, *Mind*, New Series, Vol. 72, Nº 285 pp. 103-110 (1963).
- PIAGET, J. **Introduction a la l’épistémologie génétique 1 – La pensée mathématique**, Presses Universitaires de France, Paris (1973).
- POINCARÉ, J. H. **Science and hypothesis**, The Walter Scott Publishing CO. Ltd, USA (1905).
- PRIEST, G. **An introduction to non-classical logic**. Cambridge University Press. United Kingdon (2001).
- RAMSEY, F. P. **The foundations of mathematics and other logical essays** . Routledge & Kegan and Paul Ltd. United Kingdon (1950).
- RECK, E. H. “Frege, Dedekind and the origins of logicism”. In **History and philosophy of logic**, Taylor and Francis Group, Vol. 34, pp. 242-265 (2013).

RUSSELL, B. “Mathematical logic as based on the theory of types”. American Journal of Mathematics, Vol. 30. Nº8, pp. 222-262 (1908).

RUSSEL, B. Letter to Frege. In **From Frege to Gödel- a source book in mathematical logic, 1897-1931**. VAN HEIJENOORT, J. (Ed). Cambridge University Press, USA (1967).

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia matemática – 4ª Edição**, Zahar, Rio de Janeiro (1981).

RUSSELL, B. **History of western philosophy**, Routledge, Great Britain (2002).

RUSSELL, B. “Logic and ontology”, The Journal of Philosophy, Vol. 54, No. 9, pp. 225-230 (1957).

RUSSELL, B. **The principles of mathematics**. W. W. Norton & Company, Inc. Great Britain (1903).

RUSSELL, B. **Nosso conhecimento do mundo exterior**. Companhia editora nacional, São Paulo (1966).

URQUHART, A. “The theory of types”. In **Cambridge companion to Russell**, Cambridge University Press, USA (2003).

WHITEHEAD, A. F & RUSSELL, B. **Principia Mathematica – to *56**, Cambridge University Press, USA (1973).

WILDER, R. L. **Introduction to the foundations of mathematics – 2nd edition**, John Wiley and Sons, Inc. Japan (1965).

5

ASPECTOS DE FILOSOFIA DA MATEMÁTICA E DE FILOSOFIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – PARTE 2

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

Ricardo Mendes Grande

Introdução

A filosofia da matemática tem sido fundamental para a compreensão dos fundamentos, objetivos e limites dessa disciplina ao longo da história. Mais do que uma simples reflexão sobre métodos e conteúdos, a filosofia da matemática investiga as próprias bases ontológicas e epistemológicas do conhecimento matemático. Com a evolução da matemática e a introdução de novas tecnologias, emerge uma necessidade premente de reconsiderar essas fundações filosóficas, especialmente em como elas se relacionam com a prática educacional. A filosofia da educação matemática, por sua vez, surge como um campo que aplica esses conceitos filosóficos à pedagogia, buscando entender como as teorias e metodologias filosóficas podem influenciar e aprimorar o ensino da matemática. Neste cenário, é crucial explorar como essas duas áreas – filosofia da matemática e filosofia da educação matemática – se interconectam e se reforçam mutuamente, especialmente diante dos desafios contemporâneos do ensino e da aprendizagem matemática. Assim como feito na Parte 1, daremos aqui também destaque filosófico ao logicismo.

Filosofia da Educação Matemática

Nesta seção apresentamos perspectivas sobre a Filosofia da Educação Matemática, tecendo reflexões sobre a educação matemática

em sala de aula. As ideias iniciais estão fundamentalmente baseadas em Bicudo (1999), Bicudo (2003) e Bicudo e Garnica (2002). Além disso, as implicações da Filosofia da Educação Matemática para a sala de aula são desenvolvidas considerando-se aspectos sobre a formação de professores.

Bicudo (1999) propõe discutir a Filosofia da Educação Matemática enfatizando um enfoque fenomenológico. Inicialmente, são descritos alguns trabalhos fulcrais das décadas de 1980 e 1990 que oferecerem explicitações acerca do significado de Filosofia da Educação Matemática. Dentre esses trabalhos destacam-se autores como Eric Blaire, Hans Freudenthal, Paul Ernest e Ole Skovsmose. Em particular, o trabalho de Ernest (1991) suscita quatro interessantes conjuntos de problemas e questões pertinentes à Filosofia da Educação Matemática. São eles: (i) Filosofia da Matemática: o que é matemática e como podemos explicar sua natureza? Quais filosofias da Matemática foram desenvolvidas? (ii) Aprendizagem: Que afirmativas filosóficas subjazem à aprendizagem matemática? Que epistemologias e teorias da aprendizagem são assumidas em Educação Matemática? (iii) Objetivos: Quais são os objetivos da Educação Matemática? São válidos? A quem interessam? (iv) Ensino: Que afirmativas filosóficas fundamentam o ensino da matemática?

A Filosofia da Educação Matemática tem como foco de estudo a própria análise reflexiva e crítica dos conhecimentos produzidos em Educação Matemática, tanto ponto de vista da pesquisa como do ensino (Bicudo, 2003). Por um lado, pode-se dizer que a Filosofia da Educação Matemática trabalha multidisciplinarmente tecendo interlocuções envolvendo a Psicologia, a Antropologia, a Matemática, a História, a Sociologia e áreas diversas. Contudo, é bastante preciso reconhecer, com base em Bicudo (2003) e Bicudo e Garnica (2002), que a Filosofia da

Educação Matemática trabalha fundamentalmente com a Filosofia, a Filosofia da Matemática, a Educação e a Filosofia da Educação.

Em particular, de acordo com Bicudo (1999, p. 28), os seguintes temas representam convergências a serem tomadas como foco de análise reflexiva e crítica pela Filosofia da Educação Matemática:

- Concepção de Educação e de Educação Matemática;
- Concepção de realidade e de conhecimento;
- Concepção de realidade dos objetos matemáticos;
- Postura e diretrizes didático-pedagógicas do trabalho do professor de Matemática (Bicudo 1999, p. 28).

Tanto Ernest (1991) quanto Bicudo e Garnica (2002) se dedicam a apresentar uma discussão acerca das tendências da Filosofia da Matemática na conceituação da Filosofia da Educação Matemática. Em um momento inicial, são descritas as tendências Logicista, Intuicionista e Formalista da Matemática, seus principais fundamentos e “representantes”. Encontramos definições muito precisas sobre essas tendências no trabalho de Da Silva (1999), por exemplo. Contudo, Ernest (1991) e Bicudo e Garnica (2002) tecem críticas a essas tendências, devido suas naturezas absolutistas. A alternativa proposta pelos autores a partir da crítica ao absolutismo é então expressa por um movimento que destaca o falibilismo emergente do trabalho de Imre Lakatos. Os falibilistas concebem a Matemática sem a preocupação em sempre encontrar fundamentos seguros e absolutos, reconhecendo e aceitando que os matemáticos e a própria Matemática são falíveis, incluindo provas, teoremas e conceitos. As concepções falibilistas consideram que o conhecimento matemático não pode ser separado do conhecimento empírico e de outras crenças. Desse modo, a Matemática está inserida

na história e na prática humana e não deve ser separada das ciências humanas e sociais e dos estudos culturais.

É também relevante registrar que a Filosofia da Educação Matemática tem um papel muito importante na formação inicial e continuada de professores de Matemática quando refletimos sobre aspectos da educação matemática em sala de aula (disciplina do presente concurso). Os fundamentos iniciais aqui apresentados permitem argumentar que é necessário que o professor de Matemática desenvolva e aprimore uma postura crítico-reflexiva em sua prática docente, seja ela futura ou atual, principalmente com relação aos seguintes eixos:

- (i) Filosofia: Refletir sobre questões centrais da história da Filosofia. Questões de natureza epistemológica, ontológica, axiológica, estética, dentre outras. Deve buscar aprender e refletir acerca do significado de conceitos como o de ciência, conhecimento, realidade, dialética, hermenêutica, lógica, devir, retórica, percepção, espaço-tempo, etc. Deve buscar conhecer personagens da história da Filosofia.
- (ii) Filosofia da Matemática: Refletir sobre questões como: o que é Matemática? O que é conhecimento Matemático? O que é número? Quais são os fundamentos da Matemática? Para que serve a Matemática? Qual a dimensão política da Matemática? Dentre outros.
- (iii) Filosofia da Educação: Refletir sobre questões como: O que é Educação? O que é ensino? O que é aprendizagem? O que é currículo? Quais conteúdos devem ser ensinados? Muitas dessas questões possuem grande interlocução com a Psicologia e a Sociologia.
- (iv) Filosofia da Educação Matemática: reflexões específicas e genuínas emergem no escopo da Educação Matemática (em sala de aula), considerando-se a atividade crítica-reflexiva desenvolvida nos eixos (i), (ii) e (iii). Questões fulcrais são: O que é Educação Matemática? Como ensinar Matemática? Qual a natureza do conhecimento matemático escolar? Quais são as dimensões políticas da Educação Matemática? Dentre outras.

Feitas essas considerações, é importante mencionar que nos trabalhos aqui citados sobre Filosofia da Educação Matemática são apresentadas discussões aprofundadas no campo da Educação Matemática envolvendo correntes filosóficas específicas. Nos casos de Bicudo (1999) e Bicudo (2003), a fenomenologia tem grande destaque. Trata-se de vertente de muito prestígio e de grande projeção na área, ou seja, com muitos conhecimentos produzidos e legitimados por meio de dissertações e teses defendidas. No caso de Bicudo e Garnica (2002), a hermenêutica é uma perspectiva de grande destaque. Contudo, optamos neste texto por apresentar uma breve discussão sobre a temática “estética em Educação Matemática”. Trata-se de tema já abordado, por exemplo, por Paul Ernest.

O uso de tecnologias digitais na educação matemática tem reorganizado a maneira como conceitos complexos são compreendidos e ensinados. Recursos como softwares de geometria dinâmica, sistemas de álgebra computacional e plataformas de visualização de dados permitem aos alunos explorar e manipular objetos matemáticos de maneiras antes impossíveis. Essas tecnologias visam reorganizar compreensões mais profundadas dos conceitos ao oferecerem representações visuais interativas, o que pode ser particularmente útil na construção de intuições sobre problemas abstratos. Na filosofia da educação matemática, essa integração das tecnologias digitais é vista como uma forma de aproximar o aprendizado matemático da experiência concreta dos alunos, tornando a matemática mais acessível.

O conceito de "paradigma informático da matemática", conforme proposto por Lévy (1998), insere-se nesse contexto de transformação no ensino e na prática matemática. Esse paradigma sugere que, com a introdução das tecnologias digitais, a matemática deixa de ser vista

apenas como um campo de verdades abstratas e passa a ser entendida como um domínio em que a experimentação e a simulação desempenham papéis centrais. A informática, ao permitir a manipulação de grandes volumes de dados e a exploração de problemas complexos por meio de algoritmos e simulações, promove uma abordagem mais processual e orientada por procedimentos. Essa transformação epistemológica desloca o foco da matemática de uma prática puramente dedutiva e formal para uma ciência que também valoriza a validação empírica e a modelagem computacional, oferecendo aos alunos e praticantes um novo leque de ferramentas e modos de pensar matematicamente.

Um aspecto central do uso de tecnologias digitais em educação matemática é a noção de provas visuais com o auxílio de computadores (Hanna, 2000). Esses recursos trazem novas demandas epistemológicas ao fazer matemática, pois exigem uma reavaliação dos métodos tradicionais de prova e validação. Com a capacidade de explorar conceitos por meio de representações gráficas e visuais, a matemática se torna um campo mais experimental e exploratório. Softwares de geometria ou de matemática dinâmica, como o GeoGebra, permitem que os alunos construam e manipulem figuras geométricas, observando propriedades e relações emergirem de maneira dinâmica. Isso desafia a visão tradicional da matemática como uma disciplina puramente analítica, promovendo um entendimento mais intuitivo, heurístico e menos mecânico. A filosofia educacional aqui subjacente valoriza a capacidade dos alunos de visualizar e experimentar matematicamente, introduzindo uma nova forma de conhecimento baseada na interação e na visualização.

A relação entre matemática e arte se torna evidente quando consideramos o uso de tecnologias digitais para criar provas visuais

(Engelbrecht & Borba, 2024). Tanto na matemática quanto nas artes, a visualização e a estética desempenham papéis cruciais na comunicação e compreensão de ideias complexas. A criação de figuras geométricas ou de visualizações de dados pode ser vista como um processo artístico, onde a precisão matemática encontra a beleza estética. Além disso, a habilidade de gerar representações visuais atraentes pode despertar o interesse dos alunos e engajá-los de maneiras novas e criativas. Dessa forma, ao integrar arte e matemática através de tecnologias digitais, criamos uma ponte entre essas disciplinas, ressaltando a importância da criatividade e da intuição visual tanto no raciocínio matemático quanto na expressão artística.

Embora existam muitas perspectivas sobre estética na história da Filosofia, de maneira geral, o estético diz respeito ao conhecimento pela sensibilidade, o que muitas vezes remete ao conceito de belo e às artes. A interlocução entre artes e Matemática pode ser vislumbrada de diversas maneiras: a gênese da música em Pitágoras, simetrias e perspectivas em artes visuais e geometria, auto-similaridade em fractais etc. Particularmente na Matemática, o belo muitas vezes se revela pela identificação e generalização de padrões, pela simetria e noção de encaixe, pela recursividade de estruturas ou teorias e pela forma e significado de símbolos ou notações.

De um ponto de vista da educação matemática em sala de aula, considera-se fundamental que a reflexão acerca de elementos estéticos seja pensada não “somente” do ponto de vista matemático, mas principalmente do ponto de vista pedagógico-matemático. Nesse sentido, há pelo menos duas vertentes que podem ser exploradas: (a) fundamentos ou conceitos das artes que podem ser utilizados para ensinar conteúdos matemáticos. Por exemplo, ensinar funções a partir do conceito de escalas musicais; (b) utilizar as artes como metodologia

de ensino de matemática. Por exemplo, ensinar funções trigonométricas por meio de uma música ou de uma peça teatral. Ambas vertentes, mas principalmente a segunda, oferecem meios para que pensemos a sala de aula como um espaço estético e performático. Para além da alegoria, o exercício docente em aula de matemática pode considerar elementos fundamentais como espaço-tempo, corporeidade e audiência. Concomitantemente, atribui-se complexidade intersubjetiva à atividade matemática tanto do ponto de vista didático como pedagógico. Complexidade essa quase paradoxal, pois a forma hegemônica do discurso matemático é fundamentalmente objetiva, enquanto a linguagem artística tende ao sublime ao extrapolar jogos de linguagem essencialmente subjetivos.

Em trabalhos como o de Sinclair (2008), por exemplo, a noção de estética em Educação Matemática é evocada considerando-se do conceito de experiência estética de Dewey (2010). Nessa perspectiva, as artes são consideradas um “terreno fértil” para o oferecimento de experiências estéticas. Mas a presença de linguagens artísticas não garante a emergência plena de uma experiência estética. Além disso, existem tipos de expressões ou linguagem de natureza não-artística que podem fomentar a eminência de experiências estéticas. Parte do desafio nesse cenário é semelhante à complexidade mencionada no parágrafo anterior: se o pensamento matemático é fundamentalmente simbólico e a experiência estética evoca o pensamento sensível, como podemos elaborar de maneira consistente uma noção de experiência matemática estética? Trata-se, em nossa opinião, de uma questão legítima e atual da Filosofia da Educação Matemática, e que oferece meios para que professores e futuros professores de matemática concebam o ambiente escolar como estético, ou seja, como não anestésico, e utilizem novas formas de linguagens como a música, o cinema e o teatro, para ampliar

as possibilidades semióticas e epistemológicas da educação matemática em sala de aula.

Conforme dito acima, o pensamento matemático, pelo menos do ponto de vista da matemática moderna, é essencialmente simbólico, requerendo, então, um aparato conceitual e notacional adequado para a sua expressão. Teceremos agora – mesmo que sucintamente – uma crítica à visão reducionista de matemática e de ciência, o que apenas reforça a necessidade de abordagens abrangentes do ensino dessas disciplinas, em especial, da matemática. Tais reflexões se ligam naturalmente à parte primeira do texto referente à filosofia da matemática.

Reflexões sobre a filosofia da matemática na sala de aula

Durante determinado período do século XX, o positivismo lógico foi – possivelmente – a corrente filosófica de maior aceitação entre os físicos e filósofos da ciência. Como notou Bunge (1973, p. 11),

O físico típico do nosso tempo rejeitou os dogmáticos sistemas gastos – os quais eram inverificáveis, meio falsos e, em grande medida, estéreis de qualquer modo – apenas para adotar acriticamente um conjunto alternativo de princípios filosóficos. Esta filosofia de trazer por casa, extremamente popular na profissão desde o alvor do nosso século, é conhecida por *operacionalismo*. Defende que um símbolo, como uma equação, só tem significado enquanto diz respeito a alguma possível operação humana.

Indo além da citação de Bunge, podemos afirmar que o significado de qualquer sentença declarativa de cunho científico deve ser identificado com a sua verificação. O que importa – como diz Schlick (1975, p. 50) – é que a verificação seja *logicamente possível, independentemente do fato de ser ou não exequível na prática*. Esta é uma das teses centras do positivismo lógico. Houve uma plêiade de

pensadores importantes que sustentaram e desenvolveram as teses do positivismo lógico que, em grande medida, mesclava o empirismo de Mach com o logicismo de Russell. Tal movimento se deu, em grande parte, como reação aos exageros filosóficos das escolas idealistas de Hegel e do britânico Bradley. Todavia, será em Carnap que encontraremos a defesa mais pomposa e articulada do neopositivismo. Parece-nos claro que, na lógica matemática, se tomada como finalidade em si a formalização, ela levará ao nominalismo e convencionalismo¹, dissociando-se, então, da noção de verdade e, *a fortiori*, da de ciência propriamente dita. Frege, por sua vez, era um realista. Para ele, uma fórmula aritmética exprimia um pensamento, i.e., não podia ser entendida como um símbolo vazio a ser preenchido e - da verdade dos axiomas da aritmética seguiria que eles não poderiam se contradizer². No contexto das ciências empíricas, o resultado do reducionismo será o positivismo lógico.

Indo além na formulação das teses do neopositivismo, Rudolf Carnap³ (1966) proporá a eliminação da metafísica através da análise lógica da linguagem. É compreensível que muitos dos termos utilizados por Hegel em sua *Fenomenologia do Espírito* não sejam tão transparentes, claros e livres de ambiguidade quanto uma equação, mas o seu valor reside em outra esfera do conhecimento e da metafísica. Como é sabido,

¹ Carnap (2001, §17) propôs o "Princípio da tolerância na sintaxe" que diz que *não é a nossa tarefa estabelecer proibições, mas chegar a convenções*. A única proibição seria a de contradições.

² Hilbert pensava exatamente o oposto, como deixou claro em uma carta a Frege: "Você escreve 'Eu chamo os axiomas de proposições...Da verdade dos axiomas segue que eles não se contradizem'. Eu achei muito interessante ler esta sentença na sua carta, pois, até onde eu tenho pensando, escrito e ensinado essas coisas, eu tenho dito exatamente o oposto: se os axiomas arbitrariamente dados não se contradizem uns aos outros em todas as suas consequências, então, eles são verdadeiros e as coisas definidas pelos axiomas existem. Este é para mim o critério de verdade e existência" - Hilbert (Suppes, 2002, p. 47).

³ *A fortiori*, para Carnap, é válido que *A lógica da ciência é a sintaxe* (Carnap, 2002, §86).

o positivismo lógico fracassou⁴ em praticamente todas as suas teses e houve uma proliferação de abordagens ditas *semânticas* que, em certa medida, dominam grande parte da filosofia da ciência dos últimos anos. De nossa parte, sustentamos a tese de que não há substituto formal (lógico ou matemático) para a reflexão filosófica. Acreditamos que os exemplos retirados do logicismo podem ilustrar o nosso ponto de vista.

Vimos⁵ que Frege modificou a definição de verdade analítica de Kant para dar origem ao seu trabalho de redução da aritmética à lógica. Após as críticas de Quine, a possibilidade de se separar as proposições em analíticas e sintéticas passou a ser amplamente questionada. Todavia, não importando o contexto atual, foi através da reflexão filosófica que Frege percebeu que era necessário separar o lógico do psicológico, visto que a definição de Kant estava presa ao psicologismo.

Outro ponto a ser destacado é a utilização de axiomas por Frege, Russell e pelos autores da posterioridade. No *Begriffsschrift*, Frege enunciou um axioma à medida que dele necessitava; já Russell enunciou alguns deles no início de sua empreitada lógico-filosófica. A justificação de Russell para o axioma da redutibilidade é de natureza pragmática; e a utilização do axioma do infinito é um recurso para gerar tantos números quanto necessários. E além disso, ele se refere à quantidade de objetos no mundo. Ambos não têm apresentam qualquer natureza lógica ou analítica.

Frege nunca teve em mente a questão da independência dos axiomas. Russell, apenas na segunda edição dos *Principia*, se deu conta

⁴ Para uma discussão detalhada do desenvolvimento do positivismo lógico, recomendamos (Suppe, 1977, pp.6-241)

⁵ Evidentemente, remetemos o leitor à parte primeira do nosso trabalho referente à filosofia da matemática.

de que apenas⁶ um axioma era necessário para o seu cálculo proposicional clássico. Russell utilizou um conjunto de dois conectivos, no caso, a disjunção e a negação como primitivos; Frege partiu da implicação material e da negação. Qual seria o conjunto mais adequado de conectivos? O de Russell? O de Frege? Outro alternativo? Ainda na introdução à segunda edição dos *Principia*, é mencionada a possibilidade de se utilizar um único conectivo (Whitehead & Russell, 1973, p. XVI), também chamado de *conectivo de Sheffer*, representado por uma barra, e.g., $(p|q)$ e que foi descoberto em 1913 (Sheffer, 1913). Dadas duas proposições p e q , $(p|q)$ será verdadeira no caso de, pelo menos, um de seus elementos ser falso; caso contrário, será falsa. Deste modo, $(p|q)$ será materialmente equivalente a $\sim p \vee \sim q$ ou $\sim(p \wedge q)$. A título de ilustração, a negação de p e a conjunção de p e q serão dadas, respectivamente, por $(p|p)$ e $(p|p)|(q|q)$. Visto ser possível definir todos os outros conectivos a partir da negação e da disjunção, fica estabelecido que basta um conectivo para expressar todos os demais.

Embora apenas um conectivo seja necessário para expressar todas as funções de verdade do cálculo proposicional clássico, questões didáticas, estéticas e pragmáticas surgem no contexto do ensino de lógica e de matemática. Um conjunto com um único conectivo tende a atrapalhar a compreensão das demonstrações e a assimilação dos conceitos por parte dos alunos que estiverem tendo um primeiro contato com a lógica clássica. A mesma reflexão se aplica aos axiomas. Conforme dissemos anteriormente, Russell se apercebeu de que bastava um axioma para o desenvolvimento do cálculo proposicional. Tal proposição primitiva recebe o nome de *axioma de Nicod*. A adoção de um

⁶ Note que estamos nos referindo apenas às proposições primitivas 1.2*-1.6*, conforme discutido anteriormente.

único axioma é de interesse puramente teórico, visto a sua complexidade ser uma obstrução à sua utilização em contextos práticos ou didáticos. Apesar desse tipo de entrave, é de enorme importância ter em mente que estamos no nível da reflexão filosófica da metalógica. Ainda concernente às proposições 1.2*-1.6* dos *Principia*, a proposição 1.4* pode ser deduzida das demais; e quanto ao *Begriffsschrift*, apenas três dos seus seis axiomas proposicionais são independentes.

No contexto da pragmática, pode ser mais adequado adotar um conjunto de proposições primitivas em detrimento de outro. Quanto à estética, uma família de símbolos pode facilitar a leitura e a compreensão de demonstrações. A simbologia de Frege é bidimensional e, à primeira vista, pode ser menos adequada para a leitura. A notação de Russell também não é a mais adequada para os iniciantes, visto que o uso de pontos é menos intuitivo que o de parênteses. A notação de Russell passou por inúmeras modificações e melhorias, como por exemplo, a utilização de parênteses no lugar de pontos. Carnap adotará várias dessas melhorias em seu livro-texto de lógica, onde nos diz também que “O uso de símbolos é, claro, a característica mais impressionante da nova lógica” (Carnap, 1958, p. VII).

Além das questões aqui colocadas, inúmeras outras podem ser levadas à sala de aula. Todavia, a influência da prática matemática nas reflexões filosóficas, a origem dos conceitos como o de número natural, a minimalidade, consistência e completude do conjunto de axiomas são questões que se impõem por si próprias. Finalmente, no contexto da ontologia – tópico que ficou de fora do nosso artigo, embora mereça uma investigação detalhada por parte dos estudantes – a existência dos números sempre atraiu os matemáticos desde os tempos mais remotos. Frege entendia os números como objetos lógicos, enquanto que, para Brower, não passavam de construções mentais. Para uma defesa

moderna do platonismo em matemática, recomendamos os ótimos tratados de Oswaldo Chateaubriand (2001 & 2005), nos quais um vasto conjunto de referências pode ser encontrado - e para o estudo da matemática intuicionista, o texto de Posy, *Mathematical intuitionism*.

Conclusões

A filosofia da matemática oferece uma base teórica indispensável para qualquer discussão sobre a educação matemática, especialmente em um contexto no qual a integração de tecnologias digitais e abordagens interdisciplinares está em ascensão. Ao revisitar e aprofundar as questões ontológicas e epistemológicas que fundamentam a matemática, a filosofia da matemática não só esclarece os propósitos e limites do conhecimento matemático, mas também informa e orienta as práticas pedagógicas.

No campo dos processos formativos, particularmente na formação de professores de matemática e de professores que ensinam matemática, essa relação entre filosofia da matemática e educação matemática assume um papel ainda mais crítico. Formar educadores que não apenas dominem os conteúdos matemáticos, mas que também compreendam profundamente os fundamentos filosóficos da disciplina, é essencial para que possam fomentar a aprendizagem de forma mais significativa e contextualizada. Para os professores de matemática, essa formação é crucial para desenvolver uma prática pedagógica que vai além do ensino mecânico de fórmulas e procedimentos, promovendo uma compreensão mais profunda e reflexiva da matemática como um campo de conhecimento.

No entanto, esse desafio é ainda mais pronunciado na formação de pedagogas e pedagogos, responsáveis pelo ensino de matemática nos

anos iniciais do ensino fundamental. A tarefa de explorar conceitos fundamentais da filosofia da matemática nesse nível educativo é complexa, pois exige que os futuros professores desenvolvam uma sensibilidade filosófica que lhes permita integrar conceitos abstratos de maneira acessível e relevante para crianças. Os pedagogos precisam ser capacitados a interpretar e mediar a matemática não apenas como uma série de operações e regras, mas como uma forma de pensamento que está profundamente enraizada em questões sobre a natureza do conhecimento, a verdade e o raciocínio lógico.

Esse é um desafio significativo na formação desses profissionais, pois demanda uma mudança na forma como a matemática é tradicionalmente ensinada e compreendida no âmbito da educação básica. A integração da filosofia da matemática na formação de pedagogos pode contribuir para que esses educadores consigam desenvolver práticas pedagógicas que fomentem o pensamento crítico desde os primeiros anos escolares, cultivando nos alunos uma curiosidade intelectual que perdure ao longo de sua trajetória educacional.

Assim, ao unir as vertentes da filosofia da matemática e da educação matemática nos processos formativos, especialmente na formação de professores, podemos construir uma educação matemática que não só instrui, mas também inspira e engaja os alunos em um entendimento mais profundo e dinâmico da matemática e sua relevância no mundo atual. Essa abordagem formativa é essencial para que os futuros educadores estejam preparados para enfrentar os desafios contemporâneos do ensino de matemática, promovendo uma aprendizagem que valorize tanto o rigor científico quanto a criatividade e a inovação pedagógica

Referências

- BICUDO, M. A. V. “Filosofia da Educação Matemática: um enfoque fenomenológico”. In: M. Bicudo (org.) **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. Editora UNESP. São Paulo., (1999).
- BICUDO, M. A. V. (org) **Filosofia da Educação Matemática: concepções e movimentos**. Plano Editora. Brasília (2003).
- BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da educação matemática**. Autêntica. Belo Horizonte (2002).
- BUNGE, M. **Filosofia da física**. Edições 70, Lisboa (1973).
- CARNAP, R. “The elimination of metaphysics through logical analysis of language”. In Ayer. A.J. (ed.), **Logical positivism**. Westport, Conn.: Greenwood Press. pp. 60-81 (1966).
- CARNAP, R. “The logicist foundations of mathematics” in **Philosophy of mathematics – 2nd Edition**, BENACERRAF, P. & PUTNAM, H. Cambridge University Press, USA (1982).
- CARNAP, R. **Introduction to symbolic logic and its applications**. Dover Publications, Inc. New York (1958).
- CARNAP, R. **Logical syntax of language**. Routledge, Great Britain (2002).
- CHATEAUBRIAND, O. **Logical forms - Part I: truth and description**. Coleção CLE – Vol. 34. Brazil (2001).
- CHATEAUBRIAND, O. **Logical forms - Part II: Logic, language and knowledge**. Coleção CLE – Vol. 42. Brazil (2005).
- DA SILVA, J. J. “Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática”. In: M. Bicudo (org.) **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. (1999).
- DEWEY, J. **Arte como experiência**. São Paulo: Martins Fontes, (2010).
- ENGELBRECHT, J.; BORBA, M. C. Recent developments in using digital technology in mathematics education. **ZDM–Mathematics Education**, v. 56, n. 2, p. 281-292, 2024.

- ERNEST, P. **The philosophy of mathematics education**. London: Routledge. 1991.
- HANNA, G. Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational studies in mathematics**, v. 44, p. 5-23, 2000.
- LÉVY, P. **A Máquina universo: criação, cognição e cultura informática**. Trad. Bruno Charles Magne. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- PIAGET, J. **Introduction a la l'épistémologie génétique 1 – La pensée mathématique**, Presses Universitaires de France, Paris (1973).
- SCHLICK, M. "Positivismo e realismo" Em **Os Pensadores - XLIV**. Editora Abril Cultural, São Paulo (1975).
- SHEFFER, H. M "A set of five independent postulates for boolean algebra, with application to logical constants". Transactions of American Mathematical Society, Vol.14, pp. 481-488 (1913).
- SINCLAIR, N. "Attending to the aesthetic in the mathematics classroom". **For the Learning of Mathematics**, v. 28, p. 29-35, (2008).
- SUPPE, F."The search for philosophi understanding of scientific theories". In SUPPE, F. **The structure of scientific theories – 2nd edition**, Great Britain (1977).
- SUPPES, P. **Representation and invariance of scientific theories**. CSLI Publications, USA (2002).
- WHITEHEAD, A. F & RUSSELL, B. **Principia Mathematica – to *56**, Cambridge University Press, USA (1973).

6

O USO DO TEMA-3 PARA O RASTREAMENTO DE DIFICULDADES MATEMÁTICAS EM ESCOLARES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Michele Mara Pires Ramos Betti

Maewa Martina Gomes da Silva e Souza

Paulo Sérgio Teixeira do Prado

Introdução

A educação matemática é um campo de conhecimento interdisciplinar que se dedica, entre outros aspectos, ao ensino e à aprendizagem da matemática. Ela abrange o desenvolvimento de currículos, métodos pedagógicos e estratégias de avaliação e acompanhamento que visam promover a compreensão e a aplicação dos conceitos matemáticos. Resulta das múltiplas relações entre um conteúdo específico e a *práxis* educativa, considerando um contexto de múltiplas dimensões, sendo elas histórico-epistemológicas, psicocognitivas, histórico-culturais e sociopolíticas (Fiorentini, 1989).

A partir dessas variadas dimensões, diversos fatores podem interferir na aprendizagem matemática. Possivelmente, um dos determinantes desse processo seja a capacidade cognitiva apresentada por cada um, a qual, por sua vez, tal como indicam algumas evidências, parecem possuir determinantes filogenéticos (Araújo, 1999) e socioeconômicos (Silva, Perissinoto, Pinto & Marteleto, 2020). Outro aspecto fortemente relacionado a interferências nesse processo refere-se à visão social sobre o ensino da matemática, que é facilmente deturpado e desvalorizado (D'Ambrózio, 1986), ocultando aos envolvidos nesse sistema a relevância do estudo dessa área.

Dada a importância da matemática na sociedade atual, é fundamental que as crianças em risco de ter dificuldades matemáticas sejam identificadas precocemente. Identificar dificuldades matemáticas em crianças em idade escolar é um aspecto crucial para o desenvolvimento acadêmico e cognitivo desses escolares (Fuchs & Fuchs, 2001).

Nesse sentido, a matemática é uma disciplina fundamental que não apenas envolve habilidades numéricas, mas também estimula o raciocínio lógico, a resolução de problemas e o pensamento crítico (Fidelis et al., 2021). Portanto, reconhecer e abordar dificuldades nessa área desde cedo pode ter um impacto significativo no desempenho geral dos alunos e em sua atitude em relação ao aprendizado ao longo da vida (Aunola et. al, 2004; Fuchs & Fuchs, 2001; Libertus, Feigenson & Halberda, 2011; Spelke, 2023).

Para Bandura (1977, 1986), os indivíduos desenvolvem crenças autorreferenciadas e demonstram atitudes proativas e autorreguladas e essas orientações determinam o comportamento e as ações do indivíduo no ambiente por meio do controle sobre o pensamento e o comportamento, bem como sobre os sentimentos.

Nesse sentido, a identificação precoce das dificuldades matemáticas é essencial, pois, durante a infância, o cérebro está em uma fase altamente receptiva ao aprendizado (Cosenza & Guerra, 2011; Rodrigues, Mello & Fonseca, 2006). Nessa etapa, as crianças estão formando as bases de suas competências matemáticas e qualquer lacuna ou mal-entendido pode se tornar uma barreira significativa para o progresso futuro. Quando essas dificuldades não são detectadas e tratadas adequadamente, elas podem se acumular, resultando em frustrações, baixa autoestima e até mesmo aversão à matemática (Corso & Dornelles, 2010; Fassis, Mendes & Carmo, 2014; Mendes & Carmo, 2014).

Um dos principais benefícios de identificar dificuldades matemáticas cedo é a possibilidade de intervenção oportuna e eficaz. Quando os educadores conseguem diagnosticar problemas específicos, podem implementar estratégias de ensino personalizadas para atender às necessidades individuais dos alunos. Essas intervenções podem incluir atividades lúdicas, jogos educativos, tutoria individual e o uso de tecnologias assistivas, que tornam o aprendizado mais acessível e interessante (Reys & Yang, 1998).

Outro aspecto importante é que a identificação das dificuldades matemáticas permite a criação de um ambiente de aprendizado inclusivo. Quando as necessidades dos alunos são reconhecidas e atendidas, todos têm a oportunidade de aprender e progredir de acordo com suas capacidades. Isso é especialmente relevante em salas de aula heterogêneas, onde o ritmo de aprendizagem varia significativamente entre os alunos. A personalização do ensino ajuda a garantir que nenhum aluno seja deixado para trás e que todos tenham a chance de alcançar seu pleno potencial (Viana & Manrique, 2019).

Além disso, a detecção precoce das dificuldades matemáticas tem implicações a longo prazo. De acordo com Fernandes e Salvi (2017), estudos mostram que crianças que recebem apoio adequado desde cedo tendem a ter melhor desempenho acadêmico em níveis mais avançados de ensino. Elas também desenvolvem habilidades de autoconfiança e resiliência, essenciais para enfrentar desafios acadêmicos e profissionais no futuro. Por outro lado, a falta de intervenção pode resultar em uma trajetória educacional marcada por fracassos e desmotivação, impactando negativamente o futuro escolar e profissional dos indivíduos.

A importância de identificar dificuldades matemáticas também está relacionada ao desenvolvimento de habilidades socioemocionais.

Crianças que enfrentam dificuldades e não recebem suporte adequado podem desenvolver uma relação negativa com a matemática, o que pode se estender para outras áreas do conhecimento. A frustração e a ansiedade relacionadas à matemática são comuns e podem afetar a saúde emocional dos alunos. Para Gonzalez (1995), há uma possível correlação entre o fortalecimento da crença de autoeficácia na aprendizagem matemática e o desempenho escolar nesta disciplina.

Assim, ao reconhecer e tratar essas dificuldades, os educadores ajudam a promover um ambiente de aprendizado positivo e encorajador, onde os alunos se sentem seguros para cometer erros¹ e aprender com eles.

Por fim, a identificação de dificuldades matemáticas deve ser vista como uma responsabilidade compartilhada entre professores, pais e comunidade escolar. A comunicação aberta e a colaboração entre esses atores são fundamentais para criar uma rede de apoio eficaz para os alunos. Pais informados e envolvidos podem reforçar o aprendizado em casa e proporcionar um ambiente que valorize a educação (Polônia & Dessen, 2008). A escola, por sua vez, deve promover uma cultura de apoio e inclusão, na qual as dificuldades são vistas como oportunidades de crescimento e aprendizado, não como falhas.

Para tanto, identificar dificuldades matemáticas em crianças em idade escolar é uma tarefa que requer atenção, dedicação e estratégias adequadas (Fuchs & Fuchs, 2001; ver também: Fuchs & Fuchs, 2007; Fuchs & Vaughn, 2012 e Andrade, Andrade & Capellini, 2014). Ao fazê-lo, garantimos que todos os alunos tenham a oportunidade de desenvolver

¹ A questão do erro no processo de aprendizagem, especificamente no ambiente escolar, é objeto de estudo de inúmeras pesquisas. Trata-se de uma discussão ampla, que não será abordada no estudo em questão, mas recomendamos leituras adicionais para complementar a discussão (Cury, 2007; Esteban, 2013; Giraldo, Roque; 2021).

plenamente suas capacidades matemáticas e de adquirir habilidades essenciais para a vida acadêmica, profissional e pessoal. Tal investimento deve ser feito por meio de instrumentos adequados de coleta de dados, preferencialmente destinados ao rastreamento precoce dessas dificuldades. Este texto tem como escopo analisar a usabilidade do *Test of Early Mathematics Ability* (TEMA 3) (Ginsburg & Baroody, 2003) para o rastreamento das dificuldades matemáticas em escolares dos anos iniciais do Ensino Fundamental².

Método

Trata-se de uma pesquisa de campo, de caráter exploratório, que seguiu rigorosamente os aspectos éticos solicitados pelo Comitê de Ética na Pesquisa, tendo aprovação com o parecer de número 6323735.

Participantes

Participaram da pesquisa 64 alunos, sendo 45 do segundo e 19 do terceiro ano do ensino fundamental, com idade entre 7 e 8 anos, sendo 39 do gênero feminino e 25 do gênero masculino. Os estudantes são de uma cidade do interior de Minas Gerais. A participação dos alunos foi devidamente autorizada pelos pais ou responsáveis, que assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

Instrumento de coleta de dados

O instrumento utilizado nesta pesquisa foi a terceira edição do *Test of Early Mathematics Ability* (TEMA-3), cuja aplicação foi feita de acordo

² Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado da primeira autora, intitulada "A relação entre a formação do sentido de número e as crenças de autoeficácia com estudantes do segundo e terceiro ano do Ensino Fundamental", vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos, da Universidade Estadual Paulista (UNESP), sob orientação do terceiro autor.

com o protocolo contido no respectivo manual do aplicador. O TEMA-3 é um teste normatizado nos Estados Unidos. Ele foi traduzido para uso na pesquisa aqui relatada, porém sem validação para a população brasileira.

Trata-se de um teste não cronometrado que foi desenvolvido para avaliar habilidades matemáticas em crianças de 3 a 8 anos. Ele contém duas formas paralelas (A e B), cada uma com 72 itens, as quais sondam habilidades como escrita de numerais, adição e subtração, relação parte-todo, linha numérica mental, contagem, enumeração, entre outras.

Os itens foram elaborados de acordo com as diferentes faixas etárias, de modo que sua aplicação se inicia a partir do item 1 com crianças de 3 anos, do item 7 com crianças de 4 anos, do item 15 com crianças de 5 anos, do 22 com crianças de 6, do 32 com crianças de 7 e do 43 com crianças de 8.

Trata-se de um teste de estilo “tudo ou nada”, isto é, apesar de cada item exigir várias respostas, a estas é atribuído um ponto quando corretas; e às respostas incorretas é atribuído zero ponto. Ou seja, um único erro basta para que o item não seja pontuado. Os itens a partir dos quais inicia-se a aplicação são chamados “ponto de entrada”.

Uma peculiaridade do TEMA-3 é que, além de o ponto de entrada agilizar sua aplicação, ele estabelece um limite superior (teto) e um limite inferior (base) para o desempenho do examinando. O teto é estabelecido quando a criança responde incorretamente a cinco itens consecutivos. A partir deste momento, o examinador passa a ministrar os itens anteriores ao ponto de entrada, fazendo-o de trás para frente, até que a criança responda corretamente a cinco itens consecutivos. Desta forma, é estabelecido o desempenho basal do examinando. Encontrados o teto e a base, tem-se uma pontuação bruta (soma das respostas corretas), que, combinada com a idade cronológica, permite encontrar-se a idade equivalente a essa pontuação, a série escolar

equivalente, uma classificação da criança em termos de percentis e um escore de habilidades matemáticas, que é a pontuação padrão.

Segundo os autores, os resultados proporcionados pelo TEMA-3 permitem identificar crianças que estão significativamente atrasadas ou adiantadas em relação aos seus pares no desenvolvimento do pensamento matemático; identificar forças e fraquezas em pensamento matemático, de modo a indicar que a criança tenha dificuldade particular com algum conceito matemático específico. Práticas instrucionais apropriadas para crianças individuais podem ser sugeridas, levando-se em consideração as forças e fraquezas em conceitos formais e informais identificadas. O TEMA-3 pode fornecer aos professores e administradores meios para avaliar o progresso dos alunos em programas instrucionais (Ginsburg, Baroody, 2003).

Procedimentos de coleta e análise dos dados

O TEMA-3 foi aplicado de forma individualizada, levando em média 45 minutos para cada aplicação. A aplicação ocorreu entre os meses de outubro e novembro do ano de 2023. Para cada aluno foi respeitado o seu tempo de resposta para cada questão. A aplicação do instrumento foi realizada exclusivamente pela primeira autora. Após a aplicação do TEMA-3, foi feita a somatória da pontuação de cada estudante, que será utilizada para a análise do rastreamento de possíveis dificuldades na área da matemática.

Resultados e discussão

A contagem do TEMA-3, começa com a obtenção da pontuação bruta, que é a soma das respostas corretas fornecidas pela criança durante o teste. Cada acerto conta com um ponto, e essa pontuação

bruta inicial é então convertida em escores padronizados usando-se tabelas normativas específicas do teste.

A partir da pontuação bruta é necessário realizar a conversão da pontuação bruta obtida pela criança em habilidades matemáticas. A conversão do escore bruto para habilidades matemáticas envolve transformar a pontuação bruta obtida pela criança em escores que representam com mais precisão suas habilidades matemáticas em relação a seus pares (Bliss, 2006; Ginsburg & Baroody, 2003).

Essa pontuação é então comparada com as tabelas normativas do TEMA-3, que fornecem uma conversão específica para escores padronizados. Essas tabelas consideram a idade da criança, permitindo que a pontuação seja ajustada para refletir o desempenho esperado na sua faixa etária (Ginsburg & Baroody, 2003).

Com isso, a última etapa de análise do teste é a conversão das habilidades matemáticas para os percentis, que também seguem as tabelas normativas do TEMA-3, que levam em consideração a idade da criança.

Os escores padronizados são utilizados para determinar a posição relativa da criança dentro de uma distribuição normativa. A partir desses escores, são calculados os percentis, que indicam a porcentagem das crianças da mesma faixa etária que obtiveram uma pontuação igual ou inferior a da criança avaliada (Ginsburg & Baroody, 2003).

Por exemplo, se uma criança está no 75º percentil, isso significa que ela superou 75% de seus pares no teste, proporcionando uma visão clara de seu desempenho em comparação com a norma. Esses percentis ajudam a situar o desempenho da criança no contexto mais amplo, facilitando a identificação de áreas de desempenho em suas habilidades matemáticas.

Esgotados os aspectos metodológicos do instrumento, que compõem os resultados do estudo apresentado, analisamos os percentis já convertidos dos estudantes do 2º ano apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Distribuição dos percentis obtidos pelos alunos no TEMA 3 no 2º ano.

GRUPO PERCENTIL	FAIXA PERCENTIL	N DE ALUNOS	PERCENTUAL
Percentis Baixos	0-10	17	38%
Percentis Médios	11-50	21	47%
Percentis Altos	51-100	7	15 %

Fonte: Elaborado pelos autores.

Como pode ser observado na distribuição dos percentis dos alunos do segundo ano do Ensino Fundamental, a grande maioria dos alunos alcançou percentis médios.

O grande destaque do resultado é para o expressivo número de alunos que atingiram percentis mais baixos (17), indicando ter relação com dificuldades significativas em habilidades matemáticas em nível inicial, considerando a faixa etária.

Não podemos deixar de destacar, embora que em menor quantidade, os alunos que atingiram percentis mais altos (acima de 60), estudantes que possuem habilidades matemáticas avançadas para a idade.

O rastreamento precoce especialmente para alunos dessa faixa etária contribui para sanar as dificuldades já apresentadas nessa etapa. Quando os professores têm acesso a informações detalhadas sobre as habilidades matemáticas de seus alunos, podem adaptar suas

estratégias de ensino para atender às necessidades específicas de cada criança. Isso não apenas melhora o desempenho dos alunos que enfrentam dificuldades, mas também beneficia a sala de aula como um todo, promovendo uma cultura de apoio, compreensão e até mesmo de inclusão dependendo do nível de necessidade do colega (Fernandes & Salvi, 2017).

A identificação e o suporte adequados às dificuldades matemáticas no segundo ano dos ciclos iniciais também têm implicações a longo prazo, contribuindo para a formação de indivíduos mais confiantes e competentes em matemática, o que é crucial para o desenvolvimento de habilidades críticas e para o sucesso em muitas áreas da vida.

Sobre o terceiro ano, vejamos a etapa de conversão final, de habilidades matemáticas para percentis, na Tabela 2.

Tabela 2 - Distribuição dos percentis obtidos pelos alunos do 3º ano.

GRUPO PERCENTIL	FAIXA PERCENTIL	N DE ALUNOS	PERCENTUAL
Percentis Baixos	0-10	1	5 %
Percentis Médios	11-50	7	37 %
Percentis Altos	51-100	11	58 %

Fonte: Elaborado pelos autores.

Como pode ser observado, a distribuição dos percentis dos alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental foi bem diferente da apresentada pelo ano anterior, embora não estejamos fazendo nenhum esforço comparativo entre as turmas. Na Tabela 2, localizamos resultados mais proporcionais, onde os percentis foram médios e altos,

indicando que 58% dos estudantes do terceiro ano apresentam habilidades matemáticas melhor desenvolvidas para sua faixa etária.

Uma possível justificativa para os estudantes do terceiro ano terem tido melhor desempenho na aplicação do TEMA-3 que os do segundo ano é que possivelmente eles tenham adquirido a maturidade cognitiva decorrente do ensino continuado.

A progressão de um ano adicional na escolaridade não apenas oportuniza aos alunos um volume maior de experiências, habilidades e competências na área das habilidades matemáticas, mas também lhes proporciona mais tempo para aprender esses conceitos.

A continuidade do ensino, com repetidas oportunidades de aprendizado e vivências, permite que as crianças consolidem suas habilidades e desenvolvam uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos matemáticos.

Esse desenvolvimento cognitivo é essencial para a resolução de problemas mais complexos e para a aplicação de estratégias matemáticas de forma eficaz. Além disso, a aprendizagem significativa no ambiente escolar contribui para uma maior confiança e familiaridade com o formato dos testes, reduzindo a ansiedade e melhorando o desempenho. Portanto, o ensino continuado desempenha um papel crucial na maturação cognitiva dos estudantes, refletindo-se em desempenhos superiores em avaliações como o TEMA-3.

Ademais, não podemos atribuir essa evolução apenas à maturidade cognitiva, outros fatores podem ser considerados, aprendizagens anteriores proporcionadas por uma mediação intencional e significativa, fatores externos provenientes da participação familiar, dentre outros.

Ainda com relação à distribuição dos percentis, tivemos apenas um aluno que apresenta dificuldade extrema nas habilidades matemáticas,

sinalizando a necessidade de atenção do professor responsável, sete estudantes atingiram o percentil dentro da faixa média, ou seja, resultado esperado para a faixa etária e os demais estudantes da turma, que apresentaram percentis altos, pressupondo habilidades matemáticas mais bem desenvolvidas ou estimuladas.

Tais dados demonstram que o TEMA-3 atingiu um de seus objetivos enquanto instrumento de rastreamento de dificuldades matemáticas, identificando que dos 64 alunos participantes do estudo, 43% apresentam dificuldades na área das habilidades matemáticas, sendo que alguns tão logo já considerados dificuldades matemáticas extremas, proporcionando a oportunidade do docente a informação precisa para pensar nas estratégias adequadas para sanar essas dificuldades em tempo hábil e se necessário buscar auxílio da gestão escolar em caso de algum transtorno de aprendizagem.

Sobre o TEMA-3, vale ressaltar que além do rastreamento das dificuldades, o instrumento apresenta diversas outras finalidades, sendo elas: 1) avaliação precisa das habilidades matemáticas iniciais das crianças, ajudando a identificar suas competências; 2) desenvolver uma base sólida para a elaboração de intervenções pedagógicas personalizadas, garantindo que cada aluno receba o suporte necessário para seu desenvolvimento matemático; 3) auxiliar na detecção precoce de possíveis dificuldades de aprendizagem, possibilitando intervenções mais eficazes antes que os problemas se tornem mais pronunciados; 4) fornecer dados comparativos valiosos que permitem aos educadores situar o desempenho das crianças em relação a normas estabelecidas, promovendo uma compreensão mais abrangente do progresso individual e coletivo; 5) apoiar a pesquisa educacional ao oferecer um instrumento padronizado e confiável para estudos sobre

desenvolvimento matemático, bem como eficácia de diferentes abordagens pedagógicas.

Além disso, vale destacar a complexidade do próprio instrumento, como pôde ser observado ao longo da apresentação dos resultados, o TEMA-3 produz cinco tipos de pontuações. A finalidade do teste é revelar a um desempenho único, mas esses dados podem ser analisados tanto isoladamente, quanto podem (e devem) ser adicionados a outros e mais elementos para complementar e enriquecer essa avaliação, assim o professor, pesquisador, terapeuta não tem apenas um olhar, mesmo que tão completo, proveniente de um instrumento validado como o analisado neste estudo, mas consegue lançar olhares que não foram contemplados, como a perspectiva do docente, dos familiares dos alunos e condições externas não mencionadas aqui.

Dessa forma, compreendemos que os resultados do TEMA-3 devem ser interpretados em conjunto com outras informações sobre a criança, incluindo observações em sala de aula e relatos dos pais. Isso proporciona uma compreensão holística do desenvolvimento matemático da criança e permite a criação de intervenções educacionais mais eficazes e adaptadas às suas necessidades específicas.

Até o momento, focamos na discussão dos resultados relacionados à usabilidade do teste, especialmente no que tange ao rastreamento das dificuldades dos alunos em diversas áreas da matemática. Também apresentamos várias formas de aplicação eficaz do teste.

Com o intuito de contribuir para a futura validação do TEMA-3 no Brasil, dedicamos este trecho à análise do seu poder discriminatório, uma propriedade crucial de qualquer instrumento de mensuração. Essa análise é essencial para, a longo prazo, avaliar a consistência interna do teste e sua replicabilidade.

Vale ressaltar que, até o momento, não existem parâmetros populacionais amplamente estabelecidos para o TEMA-3 no Brasil. Nesse sentido, a aplicação e validação de instrumentos como esse dependem da realização de estudos que adaptem o teste à realidade cultural e educacional local.

Estudos como o nosso podem contribuir significativamente para a coleta de dados, que, somados a outros, poderão formar uma amostra representativa da população brasileira. Isso permitirá a realização de análises estatísticas capazes de estabelecer normas locais e avaliar as propriedades psicométricas do teste, como validade, confiabilidade e poder discriminatório assim como novas escalas têm feito (Vieira *et. al.*, 2022).

Portanto, para estabelecer parâmetros populacionais do TEMA-3 no Brasil, seria necessário realizar pesquisas com uma amostra brasileira abrangente, a fim de criar normas que reflitam adequadamente o desempenho dos alunos brasileiros em habilidades matemáticas.

A partir dessas considerações, dos nossos dados calculamos os parâmetros estatísticos dos escores do desempenho matemático do TEMA-3 e apresentamos na Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros estatísticos dos escores do TEMA-3.

	VARIAÇÃO (MIN-MAX)	MD	DISPERSÃO (Q1 - Q3)	DESVIO PADRÃO
SEGUNDO ANO	0 - 120	86	78,25 - 97	24,10
TERCEIRO ANO	80 - 120	105	88,5 - 111,5	7,19

Fonte: Elaborado pelos autores.

Tais dados demonstram que o teste mesmo que sem adaptações culturais, apenas com a tradução, tem apresentado capacidade discriminativa em ambos os anos escolares, cobrindo as diferentes

faixas etárias. Essa sensibilidade é evidenciada em função do desvio padrão maior no segundo ano que apresentou desempenhos inferiores, perante o do terceiro ano que apresentou desempenho superior considerando desvio padrão reduzido.

Além disso, como indicado pelos autores do TEMA-3 foi calculado o teste de normalidade Kolmogorov-Smirnov (KS). O teste compara a distribuição dos dados com a distribuição normal esperada, medindo a maior diferença entre as proporções cumulativas dos dados e as proporções da distribuição normal ideal. Se a diferença encontrada pelo teste for pequena, isso sugere que os dados seguem uma distribuição normal. Se a diferença for grande, isso indica que os dados provavelmente não seguem a distribuição normal.

Nesse sentido, a partir dos dados encontrados ($p = <0,01$) utilizando o teste mencionado, observamos a forma como os dados foram distribuídos. A partir desse resultado, novas discussões podem ser feitas com relação a constituição e usabilidade do instrumento, agora do ponto de vista estatístico, poderíamos precisar usar métodos que não dependem exclusivamente da normalidade dos dados (métodos não paramétricos) ou transformar os dados para aproximar a normalidade, dependendo do objetivo da análise.

Ainda no contexto do TEMA-3, que está relacionado não apenas às habilidades matemáticas, mas também ao público-alvo da Educação Especial, esse resultado pode ter implicações significativas. Por exemplo, se estivermos analisando dados de desempenho acadêmico ou respostas de estudantes com essas características, a falta de normalidade pode sugerir que as variáveis envolvidas têm distribuições atípicas, talvez influenciadas por fatores específicos dessas populações. Isso reforça a necessidade de cuidados adicionais na escolha das

técnicas de análise e na interpretação dos resultados, como por exemplo a troca do teste, discussão que deve ser contemplada em textos futuros.

Considerações finais

A compreensão, a interpretação e a descrição de fenômenos referentes ao processo de ensino e aprendizagem envolvidos na construção do conhecimento matemático e conduzidos pelo desafio do cotidiano escolar nos diversos níveis de ensino têm provocado a necessidade de ressignificação da Educação Matemática tanto na dimensão prática, quanto na teórica.

A abrangência de temas e questões inerentes a este cenário de mudanças impulsiona um movimento educacional voltado para a estruturação de novas perspectivas metodológicas e teóricas, justificadas pela necessidade de se criar condições para que o conhecimento matemático seja acessível a todos.

Nesta direção, este estudo buscou analisar a usabilidade do *Test of Early Mathematics Ability* (TEMA-3), para o rastreamento das dificuldades matemáticas em escolares de duas turmas, sendo uma do segundo e outra do terceiro ano do Ensino Fundamental.

Os resultados não apenas comprovaram a eficácia da usabilidade do TEMA-3, do ponto de vista metodológico, embora com ressalvas, quanto rastreou os alunos com dificuldades na área temática analisada, abrindo precedente para possibilidade de desenvolvimento de estratégias pedagógicas tanto para os alunos que estiveram abaixo dos percentis mas também para os que estiveram acima, afinal de contas podemos estar lidando não apenas com dificuldades mas com os extremos do público-alvo da Educação Especial, como a Deficiência

Intelectual e a Superdotação, onde de um lado precisamos reforçar, estimular e por outro, promover o enriquecimento curricular.

Sobre as ressalvas, quanto ao uso do TEMA-3, como trata-se de um instrumento pouco conhecido em território nacional e de alta complexidade, especialmente na análise, careceriam de maiores aprofundamentos em algumas áreas, sendo: a) estudos sobre o material, em especial na população brasileira; b) tradução e transculturação do material; c) estudos longitudinais, de modo a rastrear e acompanhar os grupos analisados; d) refletir sobre possíveis adaptações para ampliação da faixa etária, de modo a continuar acompanhando o desenvolvimento dos participantes; e) análises estatísticas mais aprofundadas, para acompanhar a sensibilidade de pequenas e grandes amostras.

Referências

- ANDRADE, O. V. C. A.; ANDRADE, P. E.; CAPELLINI, S. A. **Modelo de resposta à intervenção: RTI - como identificar e intervir com crianças de risco para os transtornos de aprendizagem**. Pulso Editorial: São José dos Campos, SP. 2014.
- ARAÚJO, E. A. **Influências das habilidades e das atitudes em relação à Matemática e a escolha profissional**. Tese de Doutorado, UNICAMP/FE, Campinas, SP, 1999.
- AUNOLA, K.; LESKINEN, E. LERKKANEN, M-K; & NURMI, J.E. Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. **Journal of Educational Psychology**, v. **96**, n. 4, p. 699, 2004.
- BANDURA. A. **Self-efficacy**: toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review*, 1977.
- BANDURA, Albert et al. **Social foundations of thought and action: a social cognitive theory**. Englewood Cliffs, NJ, v. 1986, n. 23-28, p. 2, 1986.
- BLISS, S. Test review: Test of Early Mathematics Ability-Third Edition. **Journal of Psychoeducational Assessment**, 24(1), 85-98, 2006.

- CORSO, L.; DORNELES, B. V. **Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na matemática**. Revista Psicopedagogia, São Paulo, 83, 289–309, 2010.
- COSENZA, Ramon M.; GUERRA, LEONOR B. **Neurociência. educação: como o cérebro aprende**. Porto Alegre: Artmed, 2011.
- CURY, Helena Noronha. **Análise de Erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos. Tendências em Educação Matemática**. Belo Horizonte, MG: Autêntica. 2007.
- D'AMBRÓSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação (e) matemática**. São Paulo: Summus Editorial, 1986, 115p.
- ESTEBAN, Maria Teresa. **O que sabe quem erra?** 2ed. Petrópolis, RJ: De Petrus et Alii, 2013
- ERDOĞAN, S.; BARAN, G. Erken Matematik Yeteneği Testi-3 (TEMA-3)'ün 60-72 aylar arasında olan çocuklar için uyarlama çalışması [The study of adaptation Test of Early Mathematics Ability-3 (TEMA-3) for 60 - 72-month-old children]. **Journal of Contemporary Education Academic**, 31(332), 32-38, 2006.
- FASSIS, Daniela; MENDES, Alessandra Campanini; CARMO, João dos Santos. Diferentes graus de ansiedade à matemática e desempenho escolar no ensino fundamental. **Psicologia da Educação**, n. 39, p. 47-62, 2014.
- FERNANDES, R. K.; SALVI, R. F. Estado da arte da educação matemática inclusiva: uma análise a respeito da produção científica. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, v. 18, n. 2, p. 144-154, jul. 2017. DOI: 10.17921/2447-8733.2017v18n2p144-154. Disponível em: < <https://revista.pgsskroton.com/index.php/ensino/article/view/4609>>. Acesso em: 02 jul. 2024.
- FIDELIS, J. M., et al. Relações entre raciocínio quantitativo e resolução de problemas matemáticos: um estudo sobre as estratégias de um grupo de estudantes de 3 e 4 anos do Ensino Fundamental. **Bolema** 35 (71), set a dez, p. 1658-1677, 2021.
- FIORENTINI, D. **Tendências Matemáticas e Metodológicas da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil**. Artigo publicado nos anais do I Encontro Paulista de Educação Matemática, 1989.

FUCHS, Lynn S.; FUCHS, Douglas. A model for implementing responsiveness to intervention. **Teaching Exceptional Children**, v. 39, n. 5, p. 14-20, 2007.

FUCHS, Lynn S.; FUCHS, Douglas. Principles for the prevention and intervention of mathematics difficulties. **Learning Disabilities Research & Practice**, v. 16, n. 2, p. 85-95, 2001.

FUCHS, Lynn S.; VAUGHN, Sharon. Responsiveness-to-intervention: A decade later. **Journal of Learning Disabilities**, v. 45, n. 3, p. 195-203, 2012.

GINSBURG, H. P.; BAROODY, A. J. **Test of Early Mathematics Ability-Third Edition**. Austin, 2003.

GIRALDO, Victor.; ROQUE, Tatiana. Por uma Matemática Problematicada: as Ordens de (Re)Invenção. Perspectivas em Educação Matemática. vol.14, n. 35, p.1-21, 2021.

GONÇALEZ, M. H. C. C. **Atitudes (des)favoráveis com relação à matemática**. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado e Doutorado em Educação, Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 1995.

GRESHAM, F. M. Using Response to Intervention for identification of Specific Learning Disabilities. In: Angeleque Akin-Little; Steven G. Little; Melissa A. Bray, & Thomas J. Kehle. (Orgs.). **Behavioral Interventions in Schools: Evidence-based positive strategies**. American Psychological Association, pp. 205-220. 2012.

LIBERTUS, M. E.; FEIGENSON, L.; HALBERDA, J. Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. **Developmental Science**, v. 14, n. 6, p. 1292-1300, 2011.

MENDES, Alessandra Campanini; CARMO, João dos Santos. Atribuições Dadas à Matemática e Ansiedade ante a Matemática: o relato de alguns estudantes do ensino fundamental. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 28, n. 50, p. 1368-1385, 2014.

POLÔNIA, A. C. e DESSEN, M. A. (2005). **Em Busca de uma Compreensão das Relações entre Família e Escola: Relações Família-Escola**. *Psicologia Escolar e Educacional*, 9 (2), 303-312, 2005.

REYS, R. E., & YANG, D. **Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eighth-grade students in Taiwan.** Journal for Research in Mathematics Education, 1998, v.29, n. 2, p.225–237.

RODRIGUES; M. C. de; MELLO, R. R.; FONSECA, S. C. Dificuldade de aprendizagem em escolares de muito baixo peso ao nascer. **J. Pediatria**, Rio de Janeiro 82 (1), fev., p. 6–14, 2006.

SILVA, M. A.; PERISSINOTO, J.; PINTO, F. C. A. & MARTELETO, M. R. F. Fatores socioeconômicos influenciam a inteligência infantil?. **Neuropsicologia Latinoamericana**, v. 12, n. 1, 2020.

SPELKE, Elizabeth S. **What babies know: Core Knowledge and Composition.** Volume 1. Oxford University Press, 2023.

VIANA, E. A.; MANRIQUE, A. L. A educação matemática na perspectiva inclusiva: investigando as concepções constituídas no Brasil desde a década de 1990. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 11, n. 27, p. 649–666, fev. 2019.

VIEIRA, C. M., OMOTE, S., BALEOTTI, L. R., SOUZA, M. M. G. S. Escala infantil de atitudes sociais em relação à inclusão. **Revista Espaço Pedagógico**, 29, 132–148. Recuperado de <https://seer.upf.br/index.php/rep/article/view/13072>, jul. 2022.

7

A VISÃO DA MATEMÁTICA E DO MATEMÁTICO: UM OLHAR A PARTIR DAS PERCEPÇÕES DOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Vanessa Oechsler

Adriana Kuehn

Nathália Dolberth

Felipe Wanderherz

1 O que investigamos e por que investigamos?

A Matemática é uma disciplina presente desde os primeiros anos escolares, que acompanhará o indivíduo ao longo de sua vida. É impossível que um indivíduo não use a Matemática em sua vida: seja para fazer a compra de um produto (calcular o valor a ser pago, do troco, dos juros), tempo de espera, distância a ser percorrida ou mesmo para escolher uma roupa para utilizar (quais as combinações possíveis com as roupas que tenho no armário?). E, por estar tão presente na vida das pessoas, desde o início da vida escolar até a idade adulta, a Matemática gera sentimentos controversos nos indivíduos. De acordo com Furinghetti (1993, p.34, tradução nossa), a Matemática “pode ser amada ou odiada, compreendida ou mal compreendida, mas todos têm alguma imagem mental dela.”¹

E quais imagens são estas? Autores como Lim e Ernest (1999), Picker e Berry (2000), Scucuglia e Gegerutti (2017), Zamonel *et.al* (2021) e Oechsler e Kuehn (2023) têm investigado a imagem que os estudantes têm da Matemática. Lim e Ernest (1999) investigaram a imagem da Matemática para pessoas acima de 17 anos no Reino Unido. Picker e

¹ it may be loved or hated, understood or misunderstood, but everybody has some mental image of it.

Berry (2000) buscaram identificar a imagem que alunos de 12 e 13 anos dos Estados Unidos, Reino Unido, Finlândia, Suécia e Romênia têm do Matemático. Scucuglia e Gregorutti (2017) investigaram a imagem da Matemática e do Matemático entre alunos de Pedagogia de uma universidade pública do Brasil. Zamonel *et.al* (2021) pesquisaram como alunos do 4º ano do Ensino Fundamental de um município do interior do estado de São Paulo veem a Matemática. Já Oechsler e Kuehn (2023) elaboraram um questionário e o aplicaram a alunos de Ensino Fundamental e Ensino Médio de escolas públicas de Santa Catarina para identificar sua percepção sobre a Matemática.

Observam-se convergências e divergências entre as pesquisas. Todas elas buscavam investigar a imagem da Matemática e/ou do professor de Matemática. Lim e Ernest (1999) e Picker e Berry (2000) realizaram suas pesquisas em países estrangeiros. Scucuglia e Gegerutti (2017), Zamonel *et.al* (2021) e Oechsler e Kuehn (2023) pesquisaram com estudantes brasileiros.

Neste capítulo buscamos avançar nas discussões da visão da Matemática para alunos brasileiros, com enfoque nos alunos do Ensino Médio, ano escolar que não foi investigado com profundidade nas pesquisas brasileiras relatadas anteriormente. Os dados aqui apresentados são resultado do projeto de pesquisa “A visão da matemática e do matemático: um olhar a partir das percepções dos alunos do Ensino Médio” aprovado no edital 01/2023/PROPPI/PIBIC-EM do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC) e financiado pelo CNPq.

E por que investigar esta visão? Há estudos que evidenciam que a visão que os alunos têm da Matemática pode influenciá-los em seu processo de ensino e aprendizagem. Carmo e Simionato (2012) escrevem que um estudante com ansiedade em Matemática não consegue se concentrar nos exercícios, pode ficar agressivo e isso pode prejudicar

seu desempenho em Matemática. E sabemos que muitos alunos têm medo da Matemática. A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico, com base nos dados do PISA de 2012, divulgou que o Brasil é o 3º país, dos 65 que participaram da prova, no qual os alunos têm mais medo da Matemática (OECD, 2012).

Na próxima seção aprofundaremos um pouco mais sobre o que pesquisas têm mostrado sobre qual a visão da Matemática e do matemático pelos os alunos.

2 Visão da Matemática na literatura

Como já pontuado por Furinghetti (1993), todos têm uma imagem da Matemática. E conhecer essa imagem é importante para entendermos o comportamento dos alunos perante a matéria.

E qual a imagem da Matemática e/ou do matemático têm aparecido nas pesquisas realizadas no Brasil e no mundo? Autores como Lim e Ernest (1999), Picker e Berry (2000), Scucuglia e Gregorutti (2017), Zamonel *et.al* (2021) e Oechsler e Kuehn (2023) têm investigado esta imagem.

Lim e Ernest (1999) aplicaram um questionário a pessoas acima de 17 anos no Reino Unido. Neste questionário, os autores investigaram a visão que os respondentes têm da Matemática. Os autores analisaram as respostas e encontraram cinco visões para a Matemática, que podem ser encontradas no Quadro 1.

Quadro 1: Visões da Matemática encontradas na pesquisa de Lim e Ernest (1999)

Visão	Explicação
Absolutista	A Matemática é percebida como um conjunto de verdades absolutas ou como um assunto que sempre tem respostas certas ou erradas.

Enigmática	A Matemática é vista como misteriosa, com conteúdos a serem ainda explorados e de quem a beleza deve ser apreciada.
Utilitária	A Matemática é vista como uma ferramenta para o dia a dia e para o trabalho.
Resolução de problemas	A Matemática está relacionada a um conjunto de problemas a serem resolvidos.
Simbólica	A Matemática é um conjunto de números, símbolos e regras a serem memorizados.

Fonte: OECHSLER; KUEHN, 2023, p.296.

Picker e Berry (2000) buscaram identificar a imagem que alunos de 12 e 13 anos dos Estados Unidos, Reino Unido, Finlândia, Suécia e Romênia têm do Matemático. Os autores solicitaram que estes alunos desenhassem um Matemático no trabalho e, a partir dos desenhos e da explicação dos alunos, os autores chegaram a sete categorias sobre a visão que os alunos têm do Matemático (Quadro 2).

Quadro 2: Visões dos alunos sobre o matemático encontradas na pesquisa de Picker e Berry (2000)

Visão	Explicação
Matemático como coerção	Os alunos veem os matemáticos como pessoas que utilizam de intimidação, violência ou ameaças para fazer seus alunos aprenderem.
Matemático como tolo	Os matemáticos não têm bom senso, senso de moda ou habilidades computacionais.
Matemático extenuado	Os alunos veem os matemáticos como impacientes, tensos e cansados.
Matemático que não sabe ensinar	É o matemático que não consegue controlar uma sala de aula ou que não domina o conteúdo.

Desprezo dos matemáticos	São pessoas muito inteligentes, mas que são frias e arrogantes.
Efeito Einstein	Os estudantes veem os matemáticos com uma referência ao cientista Albert Einstein.
Matemático com poderes especiais	O matemático usa magia ou poções especiais para ensinar e aprender Matemática.

Fonte: OECHSLER; KUEHN, 2023, p.297.

A pesquisa de Picker e Berry (2000) diferencia-se da de Lim e Ernest (1999) por investigar a imagem do Matemático em vez de explorar a imagem da Matemática. Mas se observa, como ponto em comum nas pesquisas,

[...] que a Matemática ou o matemático são vistos como intimidadores (matemático como coerção) e possuidores de verdades absolutas (visão absolutista) e que, por conta de sua simbologia (visão simbólica), parece envolver algo mágico em suas resoluções (matemático com poderes especiais e visão enigmática). Além disso, em ambas as pesquisas se percebe a Matemática como uma ferramenta para resolver problemas por pessoas ou por cientistas (visão resolução de problemas e Efeito Einstein). (Oechsler & Kuehn, 2023, p. 297).

Como pesquisas que investigaram a imagem da Matemática no Brasil, tem-se Scucuglia e Gregorutti (2017), Zamonel *et.al* (2021) e Oechsler e Kuehn (2023). Scucuglia e Gregorutti (2017) investigaram a imagem da Matemática e do Matemático entre alunos de Pedagogia de uma universidade pública do país. Como resultados, os autores encontraram as imagens negativas já percebidas em pesquisas anteriores: ciência triste ou chata, ciência relacionada à dúvida, medo e dor. A imagem dos Matemáticos também continuou negativa como nas pesquisas anteriores: matemático relacionado à imagem de Einstein, um profissional autoritário, doido, lunático e nerd. É uma atividade para homens. As salas de aula são vistas como frias com pessoas tristes e descontentes.

Ainda no Brasil, Zamonel *et. al* (2021) fez um estudo com 25 alunos do quarto ano do Ensino Fundamental com o objetivo de analisar a imagem da Matemática através de desenhos feitos pelos alunos. Os autores analisaram os desenhos produzidos antes e depois da realização de quatro atividades distintas. As atividades desenvolvidas após os primeiros desenhos tiveram como objetivo criar novas percepções dos alunos sobre a Matemática. Na primeira versão dos desenhos, os autores identificaram que 80% dos alunos não representou a presença humana na Matemática, sendo ainda que a maioria dos alunos retratou em seus desenhos aspectos da Matemática relacionados à sala de aula, como a lousa, o caderno, lápis, avaliações, operações e situações-problema, ou seja, colocaram a Matemática dentro do contexto escolar. Os autores apontaram ainda, que a falta de clareza, do grupo, sobre o que é a Matemática pode ser observado na dificuldade apresentada pelas crianças em produzir o desenho proposto. E que a falta de cores em algumas produções pode representar a frieza associada a esta disciplina. Na segunda versão de desenhos elaborados sobre a mesma temática e realizados após a aplicação das atividades, os autores verificaram que a dificuldade dos estudantes em representar o que é a Matemática foi notoriamente menor. No entanto, 72% dos alunos não retrataram figuras humanas, mas 13% dos desenhos exibiram indícios de humanização da Matemática e percebeu-se uma maior presença das cores. Nesta segunda versão, todos os desenhos remeteram a elementos não-escolares, se opondo à primeira versão, na qual todas as produções com figuras humanas apresentavam elementos escolares.

Oechsler e Kuehn (2023) elaboraram um questionário e o aplicaram a alunos de Ensino Fundamental e Ensino Médio de escolas públicas de Santa Catarina. As autoras perceberam, por meio dos seus dados, que 42% dos entrevistados se sentem nervosos e apreensivos antes das aulas

de Matemática. E os alunos indicaram sentimentos que têm ao ouvirem a palavra Matemática. Foram elencados 148 sentimentos diferentes, sendo 58 sentimentos negativos, destacando-se respostas como medo, nervosismo, ansiedade e dificuldade. Mas as autoras também relataram a presença de sentimentos positivos, como felicidade e curiosidade.

Das pesquisas relatadas, percebe-se que existe um estereótipo de que a Matemática é difícil e deixa os alunos apreensivos. Mas, de onde vem a imagem que as pessoas têm da Matemática? Essa imagem advém da motivação dos pais a essa disciplina (Lim & Ernest, 1999), de experiências de aprendizagem que as pessoas têm na escola e no cotidiano (Lim & Ernest, 1999) e de imagens veiculadas na mídia de massa (como, por exemplo, programas de TV, filmes, entre outros) (Furinghetti, 1993). Oechsler e Kuehn (2023) questionaram os alunos da Educação Básica sobre o que influencia a sua visão sobre a Matemática. Como resultado, as autoras perceberam que o professor é quem mais influencia, segundo 74% dos entrevistados, seguido do interesse individual e da família.

Tal fato leva a refletir sobre a importância do professor. Lins (2004) cita o trabalho da professora inglesa Celia Hoyles, em que ela investigou a correlação entre gostar ou não da matéria e gostar ou não do professor.

O resultado a que ela chegou era o de que com relação à Matemática, muito mais do que qualquer outra disciplina, havia uma forte correlação positiva entre gostar do professor e gostar da matéria, isto é, na grande maioria dos casos alunos se colocavam em “gostar do professor e gostar da matéria” ou em “não gostar do professor e não gostar da matéria”. (Lins, 2004, p. 93, grifos do autor).

A partir da pesquisa de Hoyles e das respostas observadas na pesquisa de Oechsler e Kuehn (2023), percebe-se que o professor não tem apenas a função de explicar a Matemática, mas também pode

influenciar na visão que os alunos têm da matéria, e ainda que a relação professor/aluno pode influenciar nesse gosto pela Matemática. O foco desta pesquisa não é explorar a fundo esta relação, mas pode-se citar outras pesquisas que exploram a questão do afeto nas aulas de Matemática (Amado et al., 2016; Gomez-Chacón et al., 2006; Mcleod, 1992) e como isto influencia na visão da Matemática e nos resultados apresentados pelos estudantes.

Para entender um pouco da influência do professor no gostar ou não gostar de Matemática, pelo aluno, o estudo de Becker (2012), traz um panorama da epistemologia do professor de matemática, através de uma pesquisa realizada no Rio Grande do Sul com 34 docentes do terceiro ano do ensino fundamental até professores do doutorado. Todos os entrevistados trabalhavam em escolas públicas, e foram entrevistados também 30 alunos. Em algumas de suas conclusões, ao analisar as respostas dos alunos, ele afirma que:

Os alunos não chegam a propor um ensino alternativo, não esperam uma metodologia sofisticada. Apenas torcem por uma aula mais participativa e, definitivamente, apreciam o professor que se desempenha em ensinar, esteja atento às suas dificuldades e disposto a ajudá-los a superá-las. Apreciam o professor que gosta de fazer o que está fazendo e que mostra que sente prazer em exercer a docência. (Becker, 2012, p. 449)

Já com relação às falas dos professores ele tece as seguintes considerações:

Os docentes exibem, com raras exceções, uma concepção de ciência matemática a-histórica. Segundo eles, as verdades matemáticas são descobertas, não construídas. O matemático é um revelador talentoso de verdades que sempre existiram. O platonismo que domina o ensino da Matemática torna o professor infalível: "quem erra é o aluno. O professor, eventualmente, se engana". Ou, como bem diagnostica um professor "o ensino de Matemática, em nosso país (está) voltado para a própria matemática e não para o aluno." (Becker, 2012, p. 481)

Dentro destas referências observamos que o professor, sua relação com o aluno e sua postura em sala de aula são aspectos que têm grande influência na visão dos alunos em relação à Matemática.

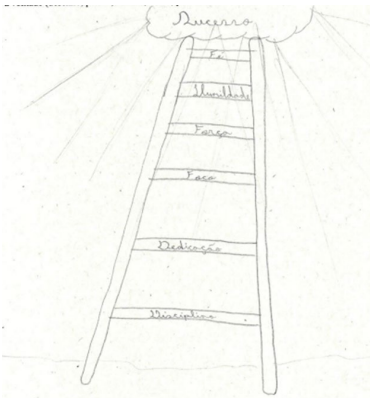
3 Visão da Matemática para os alunos do Ensino Médio

Fez-se uma pesquisa com alunos do primeiro ano dos cursos técnicos integrados (cursos em que o aluno faz o Ensino Médio junto com o curso técnico) em Química e Informática do IFSC Câmpus Gaspar, instituição de trabalho da primeira autora deste capítulo. Inicialmente os alunos elaboraram uma expressão da sua percepção da Matemática e do professor de Matemática. Essa expressão foi realizada, em sala de aula, por meio de desenho ou escrita. Em seguida, os alunos que tiveram a sua participação na pesquisa autorizada pelos pais, foram entrevistados, para explicarem suas expressões e conversarem acerca das suas percepções da Matemática.

De um total de 150 alunos, 36 obtiveram a autorização dos pais e aceitaram participar das entrevistas. Destes alunos, percebeu-se que 38,9% apresentaram uma visão positiva da Matemática e 50% indicaram uma visão negativa. 11,1% expressaram ser indiferentes à matéria, ou seja, 61,1% dos alunos não gostam de Matemática. A seguir, serão apresentadas e discutidas as expressões e percepções dos alunos. Para manter o anonimato, eles foram numerados de 1 a 36.

Ao representar a visão da Matemática, os alunos que expressaram uma visão positiva, mostraram a simbologia da Matemática ou seu aspecto utilitário (Quadro 3), corroborando o que foi visto na pesquisa de Lim e Ernest (1999).

Quadro 3: Representação positiva da Matemática

Visão simbólica	Visão utilitária
 A matemática, na minha cabeça, é como um chefe assim, porque são fórmulas aqui. É como numa receita de você preparar um bolo, é você fazer a fórmula para fazer uma conta. (aluno 3)	 Aqui a escada levando para o sucesso, porque aqui eu vejo a Matemática como a base de tudo. Assim, pra ter sucesso na vida, ela é muito importante pra tudo que vai fazer na vida. É essa a imagem que eu tenho, de algo importante. (aluno 19).

Fonte: dados dos autores (2024)

Os alunos que representaram a Matemática de forma negativa, indicaram que a matéria é confusa e complicada, assemelhando-se ao que Lim e Ernest (1999) falam sobre visão enigmática e outros relataram a dificuldade com a simbologia da Matemática.

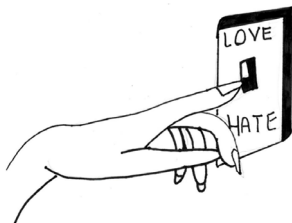
Quadro 4: Representação negativa da Matemática

Visão enigmática	Visão simbólica
 Matemática parece uma caixa misteriosa entregue nas mãos de um mágico. De início você não entende e tem receio do que estava dentro, girando a chave para abri-la ela fica mais assustadora, pois nem sempre consigo distinguir o que vai sair. Essa caixa me causa ansiedade. Tenho medo do que há dentro dela, de não conseguir resolvê-la e compreender ao mesmo tempo que os outros. (aluno 7)	 Eu desenhei porque a Matemática tem letra e eu odeio isso na Matemática, entendeu? Tem certas coisas que a gente vai levar pra vida e tem outras coisas que é inútil. Aí eu só botei porque a Matemática quando diz que ela é difícil, a gente automaticamente pensa nas letras, entendeu? (aluno 22)

Fonte: dados dos autores (2024)

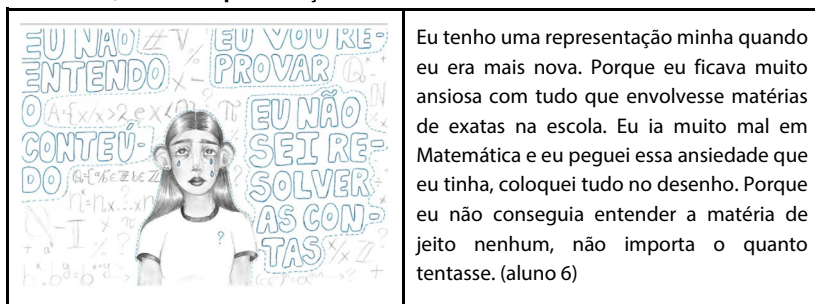
Os alunos que indicaram ter uma visão neutra da Matemática justificaram que, em alguns momentos gostam da matéria (quando a entendem) e, em outros, não gostam (quando sentem mais dificuldade no conteúdo explorado) (Quadro 5).

Quadro 5: Representação neutra da Matemática

 Em alguns momentos eu gosto, em alguns momentos não. (aluno 16)	 No meu ver é como os batimentos do coração: altos e baixos. Altos: quando você entende o conteúdo e sabe fazer. Baixos: quando você não entende o conteúdo e não sabe fazer. Linha: quando você entende mas ainda não sabe fazer. É que é mais ou menos os batimentos de um coração no meu ver, porque são cheios de altos e baixos, são raras as pessoas que conseguem ir numa linha reta. Porque os altos e baixos, os baixos é quando você tá aprendendo, tá com dificuldade, daí tem a linha reta, que é quando você começa a se dar bem e o altos quando você aprende e começa a gostar da Matemática. (aluno 20)
--	--

Fonte: dados dos autores (2024)

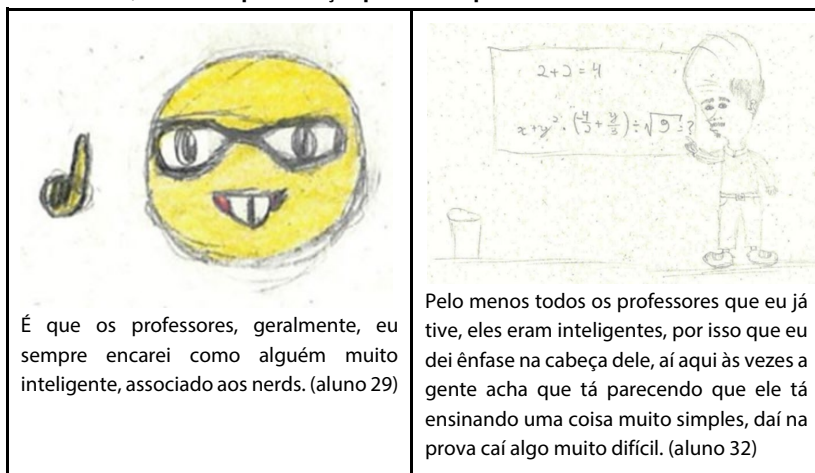
Há alguns pontos interessantes a se destacar nas representações feitas pelos alunos e em suas falas para explicá-las. O primeiro ponto é sobre a simbologia matemática. Na visão positiva, a simbologia aparece como uma regra que auxilia nos cálculos, como uma receita de bolo. Já na visão negativa, a letra aparece associada a um sentimento de ódio ou de medo e ansiedade. Para esses alunos, a simbologia complica os cálculos e os faz ter um sentimento negativo com relação à Matemática. Outro ponto a ser destacado é a questão dos sentimentos que aparecem nas falas dos alunos: receio, ansiedade e medo (aluno 7), ódio (aluno 22). Sobre sentimentos, chama a atenção o desenho do aluno 6 (quadro 6). Ele demonstrou o seu medo da Matemática e, na entrevista, explicou a sua ansiedade durante as aulas de Matemática, corroborando com Carmo e Simionato (2012), ao falar que, quando está ansioso, ele não consegue entender a matéria.

Quadro 6: Representação do medo e da ansiedade em Matemática

Fonte: dados dos autores (2024)

A questão dos sentimentos negativos causados pela Matemática já foi investigada por Oechsler e Kuehn (2023). As autoras também perceberam que os alunos expressam sentimentos negativos em relação à Matemática. E tais sentimentos foram os que apareceram nesta pesquisa. Assim, é comum os alunos associarem a Matemática a sentimentos como medo e ansiedade. E o que será que acarreta essa imagem? Qual a visão que os alunos têm do professor de Matemática? Será que é uma imagem tão negativa quanto à da Matemática? Será que o professor pode causar esses sentimentos negativos no aluno?

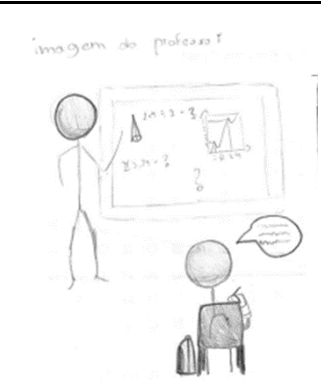
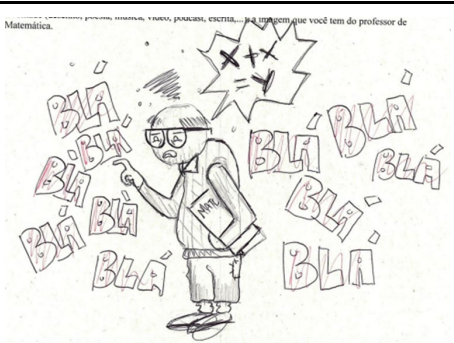
Assim como nas imagens da Matemática, para o professor de Matemática houve representações positivas, negativas e neutras. Alunos que representaram imagens positivas ressaltaram os aspectos de estudos, organização, dedicação e atenção dos professores (Quadro 7). A representação positiva do professor de Matemática foi algo novo, constatado nesta pesquisa pois, ao analisar as respostas oriundas das pesquisas de Picker e Berry (2000) ou mesmo de Scucuglia e Gregorutti (2017), a imagem do professor de Matemática era sempre associada a um aspecto negativo.

Quadro 7: Representação positiva do professor de Matemática

Fonte: dados dos autores (2024)

Na representação negativa dos professores de Matemática, os alunos destacaram o aspecto de ser um “ensinador” de conteúdo, sem se preocupar com a aprendizagem dos alunos, além dos professores serem chatos, rígidos, bravos e não acolhedores (Quadro 8). Tais características são semelhantes às visões do “Matemático como tolo”, “Matemático extenuado” e “Matemático que não sabem ensinar”, vistos na pesquisa de Picker e Berry (2000).

Quadro 8: Representação negativa do professor de Matemática

Matemático que não sabe ensinar	Matemático como tolo e Matemático extenuado
 A imagem do professor que ele ensina, ele explica as matérias, e o conteúdo. Às vezes, é meio difícil entender a explicação, dependendo do tipo de conta e essas coisas mais. (aluno 2)	 Eu não tive um professor assim, mas a minha escola tinha um professor assim e todo mundo dizia que ele era um chato, mas é normal né? A maioria é rígido. Não é que é chato, é rígido. Aí eu levei na brincadeira e fiz né, porque tem que ser um cara meio carequinha com óculos. (aluno 22)

Fonte: dados dos autores (2024)

A primeira imagem do Quadro 8, mostra uma separação entre o professor e o aluno, remetendo ao ensino-bancário onde o professor ensina e o aluno aprende. A descrição do desenho, feita pelo aluno, aponta a dificuldade de aprender. Na segunda imagem o professor é retratado como cansado, com um discurso pronto, que fala sozinho, que não dialoga com o aluno. Já na explicação o aluno acrescenta que o professor é rígido e chato. Estas duas imagens retratam uma grande barreira entre o professor e seus alunos. Esta separação é relatada em outros desenhos e depoimentos. Vejamos o que o aluno 25, diz: "...só que os professores que eu tive nunca foram muito acolhedores...". Já o aluno 34: "Assim, ó, quando eu penso em professor de Matemática sempre me vem um cara meio mal assim, com cara de brabo, tipo assim, que não tá muito de bem com a vida, aí quer descontar nas pessoas, mas isso é assim a primeira coisa

que parece, entendeu?" O aluno 27 conta que: "... no oitavo ano que tinha um professor que era terrível, ele trancava a gente na sala, batia o sinal e a gente não podia sair, tinha gente que perdia ônibus ele não deixava nem virar o rosto assim na aula, a gente não podia ir no banheiro, não podia nada, ele não conseguia explicar direito pra gente," O aluno 32 relata: "Bom, aqui, pelo menos todos os professores que eu já tive, eles eram inteligentes, por isso que eu dei ênfase na cabeça dele, aí aqui às vezes a gente acha que tá parecendo que ele tá ensinando uma coisa muito simples, daí na prova cai algo muito difícil". Já para o aluno 26 "...o professor de Matemática ele tem que realmente gostar de dar aula pra conseguir explicar pra todos."

Há ainda os alunos que têm uma imagem neutra do matemático. Eles apontaram para a questão do professor ser um mágico, que tira o conteúdo de uma caixa, imagem semelhante à apontada por Picker e Berry (2000) com o matemático com poderes especiais, ou os alunos falaram sobre terem professores bons e ruins, o que não os fez formar nem uma visão positiva, nem uma visão negativa de seus professores (Quadro 9).

aspecto de usar essa inteligência como um matemático com poderes especiais como destacado na pesquisa de Picker e Berry (2000).

E será que essa visão que os alunos têm do professor, pode influenciar em sua visão da Matemática?

Os alunos foram questionados sobre o que os influenciou a ter essa visão da Matemática. Como influências, as respostas mais citadas foram: professor (16 respostas), interesse pessoal (11 respostas) e família (5 respostas). Esses resultados corroboram com a pesquisa de Oechsler e Kuehn (2023) realizada com 446 alunos, do Ensino Fundamental ao Ensino Médio. Na pesquisa das autoras, quando questionados sobre o que influenciou na sua visão sobre a Matemática, a maioria dos respondentes apontou o professor como principal resposta, seguido de interesse individual, família, amigos e a mídia. Na pesquisa de Oechsler e Kuehn (2023), 79,4% dos entrevistados indicaram que o professor tem maior influência na sua opinião sobre a Matemática. Como justificativa para esse pensamento, os alunos destacaram três pontos: a metodologia do professor, relação professor/aluno e o seu incentivo aos estudos da Matemática. Já os que defendem que o professor não influencia na opinião, indicaram que eles não gostam da matéria, independente do professor ou da sua metodologia de ensino.

Na pesquisa feita com alunos do Ensino Médio e relatada neste capítulo, observou-se que os alunos destacam que a metodologia do professor influencia no que pensam da matéria. Alunos que não gostam de Matemática teceram os seguintes comentários sobre a metodologia do professor: *“Mas eu acho que talvez os outros professores que eu tive antes. Acho que tudo começou na tabuada que eu nunca decorei e não tinha um professor de Matemática muito bom também. Tipo, ela era muito rígida e ela não ajudava. Ela falava a tarefa de casa decorar a tabuada e eu nunca decorava, e ela me chamava lá na frente pra falar tabuada, eu não sabia, e*

passava vergonha na sala. Daí eu não gosto.” (aluno 3) e *“Foram os professores que eu tive, uns que não tiveram uma dinâmica boa e outros eu tive um entendimento melhor por causa do método de ensino.”* (aluno 8). Um aluno que gosta comentou o seguinte sobre os professores *“Acho que os professores, porque eles sempre ajudaram e facilitaram meu entendimento da Matemática.”* (aluno 14). Observa-se que a forma como o professor explora a Matemática em sala de aula (tipo de explicação, abordagem e exposição do aluno) contribuíram para que os entrevistados gostassem ou não da Matemática. Outros alunos explicaram que a relação que tinham com o professor também os influenciou *“O fato de o professor ajudar e não deixar só de canto sem ligar muito, e a disponibilidade dos professores para ajudar”* (aluno 2) e *“Acho que foi os professores de Matemática que eu tive, que eu dei sorte de ter vários professores de Matemática muito bons, que foram pessoas muito legais, que tratam os alunos bem, então acho que isso acabou me trazendo assim, a curiosidade sobre a Matemática.”* (aluno 26).

Além da influência do professor, muitos alunos indicaram que o gostar da Matemática depende de seu interesse pessoal. *“Por eu achar um negócio chato, nunca me despertou um interesse, então não consigo prestar atenção e realmente aprender. Acho que foi esse o motivo principal.”* (aluno 13), *“Acho que não teve algum acontecimento que realmente me fez gostar de Matemática, sei lá, só porque eu gosto mesmo, eu acho fácil em certos pontos e eu acho divertido.”* (aluno 21) e *“...e número sempre foi uma coisa que está interligada a minha pessoa e eu sempre me senti bem em fazer.”* (aluno 29).

Outro fator apontado pelos alunos que influencia o gostar ou não da Matemática é a família. Um aluno indicou a cobrança do pai *“Eu acho que foi mais a cobrança assim do meu pai, tipo, isso aqui é o básico, você tem que saber.”* (aluno 9). Outro destacou que o pai os incentivava em casa

com atividades de Matemática *“Eu nunca tive a sorte de ter um professor bom de Matemática igual eu tô tendo esse ano, mas meu pai sempre gostou muito de Matemática. Daí ele sempre fazia uma atividade ou outra com a gente lá em casa com cálculo. Daí eu escutava bastante ele fazendo essas brincadeiras com as minhas irmãs e eu acabei criando um gosto.”* (aluno 20). Outros dois falaram que tinham parentes (irmã e pai) que eram professores de Matemática e isso os influenciou a gostar da matéria, já que eles os ajudavam e a família incentivava o trabalho com números em casa. *“...também minha irmã mais velha é professora de Matemática e basicamente toda minha família quase faz parte de contábeis, tem a Matemática bem presente.”* (aluno 23) e *“meu pai era professor de Matemática, daí ele também me ajudava daí eu conseguia entender melhor, aí entendendo melhor comecei a ter mais ânimo pra Matemática”* (aluno 32).

Depois de ouvir o que os alunos pensam sobre a Matemática, eles foram questionados sobre o que poderia ser feito para se ter uma visão positiva da Matemática. A maioria dos alunos indicou aspectos relacionados à metodologia de ensino do professor ou mesmo à relação entre professor e aluno.

Com relação à metodologia de ensino, foi solicitada uma explicação mais detalhada e com exemplos *“Acho que seria mais pela forma que eles mostram o conteúdo, por exemplo eu tinha esse tal professor do oitavo ano, ele explicava muito bem, ele dava uns exemplos, explicava passo a passo de forma bem, até estimulava o pessoal a responder também”* (aluno 23), aulas mais divertidas explorando paródia, por exemplo, *“[...] de fazer uma paródia pra tentar decorar a fórmula ou alguma coisa assim, tipo, deixar a aula um pouco mais descontraída, porque às vezes quando fica botando muita fórmula e falando o passo a passo da conta às vezes a aula fica muito pesada, tipo, as vezes o aluno não gosta muito, às vezes dá sono e tal, aí acho que isso chamaria um pouco mais de atenção”* (alunos 24), ou o trabalho

com jogos e brincadeiras “*Por exemplo, nosso professor fazia jogos com números, tipo jogo da velha e alguns jogos com palitos que daí ele fazia desafio pra turma inteira e todo mundo se divertia daí*” (aluno 33) e “*Eu acho que se você mostrar a Matemática de uma forma mais divertida assim, fazendo brincadeiras e jogos, igual normalmente fazem, é um jeito bem divertido e bem legal que ajuda bastante a ter essa visão mais positiva da Matemática*” (aluno 35). Outros sugeriram mostrar uma aplicação da Matemática “*Talvez demonstrar para eles que a Matemática está envolvida em mais coisas do que eles pensam. Mostrar a Matemática no dia a dia também, é muito importante, porque como eu disse antes, a Matemática, ela tá envolvida em coisas que a gente acaba nem percebendo, atividades mais práticas, assim*” (aluno 26) e “*Eu acho que se a Matemática, ela fosse levada em sala de aula de um jeito menos tradicional assim, não tipo tão escrevendo no quadro, fazer cálculos assim. Se desse alguns exemplos que a gente fosse usar na nossa vida, seria interessante.*” (aluno 3)

Para alguns alunos, a visão da Matemática depende do próprio aluno, não ficando atrelada a algum fator externo “*Eu não sei muito bem não, mas eu acho que se as pessoas parassem de encarar como uma coisa muito difícil e comesçassem pelo fácil até ir melhorando acho que iam gostar mais*” (aluno 29), “[...] mas o aluno tem que se esforçar e não ficar, sei lá, ficar conversando e fazendo porcaria dentro da sala né, tem que se esforçar e prestar atenção no que o professor tá explicando” (aluno 32), “*Eu acho que vai muito de cada um, mas é, eu acho que também a gente, primeiro não pode chegar, tipo, já sendo, negativo, dizendo eu não me dou bem com a matéria, eu não consigo entender.*” (aluno 1), “*Eu acho que é porque o pessoal fica confuso e tem medo de, por exemplo, as letras o pessoal acha difícil e aí tem meio que medo, pra melhorar os alunos têm mais vontade de ir atrás*” (aluno 2) e “*Não tem muito que fazer? Porque tipo, quem tem alguma coisa contra tipo é totalmente*

contra. Tu não pode, nem se tu tentar explicar, nem se for a pessoa mais paciente do mundo se já tá totalmente com a mente fechada, ela não vai querer aprender isso. Então, não tem muito o que fazer.” (aluno 9).

Observa-se que a visão da Matemática depende de vários fatores, dentre os quais pode-se destacar, principalmente, a metodologia empregada pelo professor ou mesmo a relação que os alunos têm com o docente. E o que podemos concluir a partir dessa pesquisa e refletir para o ensino da Matemática? Falaremos um pouco sobre isso na próxima seção, onde traremos as nossas conjecturas sobre o tema.

4 E agora? Que imagem queremos construir da Matemática?

A visão negativa da Matemática pelos alunos tem grande impacto na sociedade. Em um país onde os jovens têm medo, receio e aversão a Matemática teremos um cenário com menos alunos interessados em seguir a área das exatas que, via de regra, é a área que desenvolve a base de tecnologia e infraestrutura impactando diretamente no desenvolvimento econômico do país. A visão negativa da Matemática estabelece, também, um cenário que acaba excluindo os alunos da área das humanas e das artes dos assuntos que envolvem Matemática. Ao quebrar o paradigma de que a Matemática é difícil, estaremos contribuindo para construir uma visão de que a matemática é para todos, e que todos podem aprender Matemática.

Dentro deste contexto, os alunos entrevistados apontaram o professor, interesse pessoal e a família, nesta ordem, como os que mais tiveram influência no gostar ou não gostar de Matemática. Observa-se nesta pesquisa e nas referências que tratam da imagem da Matemática, que é o professor que tem maior peso na visão que o aluno tem da Matemática. Quando os alunos foram questionados sobre o que poderia

ser feito para se ter uma visão positiva da Matemática, 61,1% dos alunos indicou aspectos relacionados à metodologia de ensino do professor ou mesmo à relação entre professor e aluno. Com relação às práticas de ensino, sabemos que quando o professor entra na sala de aula, ele fecha a porta, e toda a dinâmica da aula passa a depender exclusivamente da forma com que ele encara o ensino. E que é o professor, dentro da escola, quem tem maior responsabilidade e autonomia para escolher a dinâmica das aulas, o caminho a percorrer e os obstáculos a transpor. Dentro deste contexto, se a maioria das pesquisas, realizadas com alunos, têm apontado o professor como um dos principais motivos do aluno não gostar de Matemática, é necessário investigar o que deve ser modificado na formação do professor, para assim quebrar alguns paradigmas e promover uma visão positiva da Matemática. Como a aprendizagem da Matemática inicia no ensino fundamental, anos iniciais e segue até o final do ensino médio, temos, via de regra, dois perfis de professores que ensinam matemática: os pedagogos e os licenciados em matemática. Refletir, estudar e compreender sobre a formação destes dois perfis de professores é um caminho para mudar a imagem da Matemática.

Outra análise a ser feita consiste nas metodologias empregadas pelo professor em sala de aula. Quais metodologias contribuem para uma visão mais positiva da Matemática? Como ela é aplicada em sala de aula? Além da metodologia temos também a relação professor-aluno, apontada tanto em alguns relatos desta pesquisa como nas referências analisadas.

Questões como essas sobre a formação do professor, relação professor-aluno e a metodologia de ensino empregada podem nos auxiliar a entender como a Matemática é abordada em sala de aula e como isso está contribuindo para as visões observadas e para o medo e

o baixo desempenho em Matemática. Conhecer esses fatores pode nos auxiliar a pensar em estratégias que deixem a Matemática mais leve e interessante aos estudantes e, conseqüentemente, despertem neles a curiosidade e a vontade de aprender Matemática.

Com relação ao cerne do que influencia o aluno a gostar ou não de Matemática temos ainda a seguinte questão: a família e os amigos apontados, nas pesquisas, como agentes da visão da Matemática. Devemos lembrar que estes agentes foram ex-alunos e assim devido às suas experiências com Matemática na escola podem gostar ou não da matéria, ou seja, a influência da família e dos amigos está, de certa forma, correlacionada com suas experiências no ambiente escolar voltando assim ao agente que mais apareceu nas pesquisas: o professor.

A visão negativa da Matemática, pelos alunos e pela sociedade, é um problema que à primeira vista parece não ter solução. Mas ao expor e investigar um problema sem solução apontamos que precisamos de novas concepções para modificar este cenário. Portanto, um caminho para desconstruir a visão atual da Matemática é divulgar, retratar e expor que a visão negativa da Matemática existe, e que vem perpetuando a exclusão de muitos alunos. E este cenário aponta para a necessidade de alterar ou propor mudanças nos procedimentos didáticos abordados na formação de professores.

Gostaríamos que a imagem da Matemática fosse positiva para todos, assim como é para nós. Mas enquanto isso não acontece, destacamos a importância da realização de pesquisas que investiguem essas imagens, pois elas geram dados que podem subsidiar reflexões e, quem sabe, mudanças que promoverão novas visões da Matemática.

Referências

- AMADO, N.; CARREIRA, S.; FERREIRA, R. T. Afeto em competições matemáticas inclusivas: a relação dos jovens e suas famílias com a resolução de problemas. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.
- BECKER, F. *Epistemologia do professor de matemática*. Petrópolis: Editora Vozes, 2012.
- CARMO, J.S; SIMIONATO, A. M. Reversão de ansiedade à Matemática: alguns dados da literatura. *Psicologia em Estudo*, v. 17, n. 2, p. 317-327, 2012.
- FURINGHETTI, F. Images of Mathematics outside the Community of Mathematicians: Evidence and Explanations. *For the Learning of Mathematics*, v. 13, n. 2, p. 33-38, 1993.
- GOMEZ-CHACÓN, I; OP'T EYNDE, P; DE CORTE, E. Creencias de los estudiantes de matemáticas: la influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las Ciencias*, v. 24, n. 3, p. 309-324, 2006.
- LIM, C. S.; ERNEST, P. Public Images of Mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, n. 11, p. 44-56, 1999.
- LINS, R. C. Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. In: BICUDO, M.A.V; BORBA, M.C. (Orgs). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004
- MCLEOD, D. Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In: GROWDS, D. (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Nova York: MacMillan, p.575-596, 1992.
- OECD, *PISA 2012 Results: Ready to Learn: Students' Engagement, Drive and Self-Beliefs* (Volume III), PISA, OECD Publishing, 2012.
- OECHSLER, V.; KUEHN, A. Imagem da Matemática: a visão dos alunos da Educação Básica. *Alexandria*. v. 16, n. 1, p. 293-317, maio. 2023.
- PICKER, S. H.; BERRY, J. S. Investigating pupils' images of mathematicians. *Educational Studies In Mathematics*, v. 43, n. 1, p. 65-94, 2000.

SCUCUGLIA, R.; GREGORUTTI, G. S. Images of Mathematics and Mathematicians among Undergraduate Students of Education. *Acta Scientiae*, n. 19, p. 940–957, 2017.

ZAMONEL, B. B.; SCUCUGLIA, Ricardo. R. S. ; IANELLI, A. C. C. ; SILVA, P. E. A. . Aspectos Estéticos Envolvendo a Imagem Pública da Matemática. In: Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva e Rita de Cássia Idem. (Org.). *Experiências Estéticas em Educação Matemática*. 1ed. Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2021, v. 1, p. 272-295.

Agradecimentos

IFSC e CNPq pelo financiamento dado à pesquisa, via edital 01/2023/PROPPI/PIBIC-EM.

8

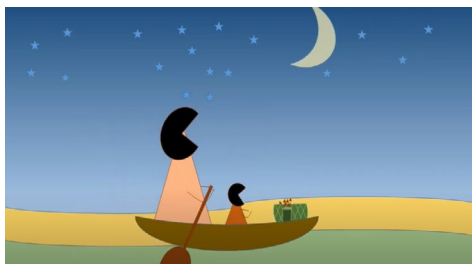
VÍDEOS DIGITAIS COM INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL COMO PRÁTICA MATEMÁTICA DISRUPTIVA E DE VALORIZAÇÃO DAS CULTURAS E TRADIÇÕES DOS POVOS ORIGINÁRIOS

*Daise Lago P. Souto ¹
José Fernandes T. Cunha ²*

Apresentação

Azo: Hoje pegaremos cinco peixes, e com eles começaremos aprender a contar, como o seu avô me ensinou, neste mesmo lugar. Aqui eu aprendi a fisgar peixe e a contar. Me observe e repita o que eu faço e falo. Assim você aprenderá a contar.

Azo: Atire a fisga, não no peixe, mas na imagem dele, e você não perderá um. Ao tirar o peixe da fisga, conte: estuba, um peixe, estuba.



Maku Skyry: Estuba.

Azo: Petok.

Maku Skyry: Petok.

Azo: Conta os dois: Estuba, petok.

Maku Skyry: Estuba, petok.

Azo: Hokybyktsa.

Maku Skyry: Hokybyktsa.

Azo: Conta os 3: Estubo, petok,
hokybyktsa.

Maku Skyry: Estuba, petok, hokybyktsa

(Transcrição do vídeo sistema tradicional de contagem do povo Rikbaktsa

Acervo do Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática

<https://youtu.be/nDAYopEpEzs>

¹ Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), Barra do Bugres (MT), docente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, e-mail: daise@unemat.br - ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6832-6099>

² Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), Barra do Bugres (MT), docente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, e-mail: fernandestorres@unemat.br - ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2319-6125>

Antes da chegada explosiva da Inteligência Artificial Generativa, já trabalhávamos com práticas educativas que apresentavam os saberes e fazeres de povos indígenas no Estado de Mato Grosso, como forma de oportunizar o resgate da cultura, a valorização das tradições e difusão de conhecimentos. O diálogo apresentado anteriormente é uma transcrição do vídeo “Sistema Tradicional de contagem do povo Rikbaktsa” (2018), que foi produzido por uma docente na escola do Povo Rikbaktsa localizada em Juína - MT. Esse vídeo digital, do tipo cartoon, foi produzido sob a orientação da primeira autora deste capítulo em uma disciplina do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM/UNEMAT) e foi premiado no II Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática. Nele, é apresentada a forma como os mais velhos (Pai = Azo; Mãe = Ajê) ensinam o modo próprio de contagem daquele povo aos mais novos (Menino = *Maku Skyry*; Menina = *Wytyk Skyry*), sempre em uma situação prática, como a pescaria. A matemática e a linguagem se interseccionam com a cultura, os saberes e o fazeres daquele povo. Cunha e Borba (2024, no prelo) destacam que “A diversidade linguística é uma riqueza cultural que deve ser preservada e valorizada”. Há registros da existência de 274 línguas indígenas faladas no Brasil (Brasil, 2022). Um exemplo do esforço empregado para manter essas línguas “vivas” é o dicionário eletrônico elaborado pelo segundo autor deste capítulo. Nele, foram catalogadas mais de 200 palavras em 28 línguas no contexto do ensino superior indígena na Universidade do Estado de Mato Grosso (Bernt; Januário & Cunha, 2005).

Como vimos, no recorte apresentado no início deste capítulo, as línguas e práticas cotidianas de povos originários também podem ser documentadas e disseminadas com vídeos digitais, o que contribui para a preservação da cultura e para a transmissão desses valores às próximas gerações. Essa forma de expressão audiovisual não só

documenta a riqueza cultural dos povos originários, mas também assegura que suas tradições e conhecimentos sejam compartilhados e perpetuados ao longo do tempo. Considerando a importância de preservar a diversidade cultural brasileira, a produção de vídeos digitais se apresenta como uma maneira propícia de registro da língua, dos hábitos, dos costumes, e das diferentes "matemáticas" praticadas por distintos grupos sociais (Cunha; Borba, 2024).

Autores como Santos e Braga (2023) chamam a atenção para o fato de que, inicialmente, os indígenas foram excluídos do processo educacional com tecnologias digitais conectadas à Internet. Essa exclusão gerou um descompasso temporal entre o surgimento da sociedade digital e a inclusão dos povos originários. Ao que parece, esse movimento irregular está sendo reduzido a cada dia. Atualmente, o uso de dispositivos como *smartphones* conectados à Internet tem se tornado comum nas comunidades indígenas. Eles permitem registros de áudio, imagens e vídeos, possibilitando a documentação e a disseminação de línguas, hábitos e costumes dos povos indígenas. Um exemplo disso é o canal no YouTube do professor Mogoche Bakairi (<https://www.youtube.com/@mogoxebakairi>), que conta com mais de 200 vídeos registrando o cotidiano e as manifestações culturais do povo Bakairi. No momento da escrita deste capítulo, um desses vídeos já ultrapassou 40 mil visualizações. Esse uso do YouTube ilustra como as tecnologias digitais podem ampliar a visibilidade e a valorização das culturas indígenas.

A importância de os próprios indígenas decidirem o que desejam divulgar em vídeos sobre sua cultura é imensurável, pois permite que a perspectiva autêntica de dentro para fora prevaleça. Quando os indígenas têm a autonomia para criar conteúdo audiovisual, eles podem compartilhar seus conhecimentos e práticas de acordo com suas

prioridades e valores, preservando a essência de suas tradições e garantindo que suas narrativas sejam representadas de maneira original e íntegra. Dessa forma, a produção audiovisual realizada pelos próprios indígenas não só fortalece a identidade cultural, mas também assegura que a difusão de suas tradições e conhecimentos ocorra de maneira alinhada com suas próprias perspectivas e objetivos.

Após esta breve contextualização, destacamos que neste capítulo apresentamos reflexões sobre práticas educativas de produção de vídeos digitais com Inteligência Artificial (IA), que foi desenvolvida em 2024 no contexto da Estadual de Ensino Fundamental Indígena “Julá Paré”, situada no Território Indígena Umutina. Essa ação formativa foi liderada pelo segundo autor deste capítulo e teve a colaboração de professores da Licenciatura Intercultural Indígena da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT; e discentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. (PPGECM/UNEMAT). Analisamos vídeos digitais produzidos pelos participantes com ChatGPT³ e o CapCut⁴. Na seção seguinte, abordamos sobre vídeos digitais como uma prática disruptiva em ambientes escolares, que pode ultrapassar os limites físicos de uma sala de aula convencional. Relacionamos essa abordagem com a Etnomatemática para discutir as “ticas de matema e o etno” dessas produções. Em seguida, detalhamos os trabalhos desenvolvidos por professores de escolas indígenas. Posteriormente, apresentamos e analisamos as produções audiovisuais e, por fim, tecemos as nossas considerações finais.

³ O ChatGPT é uma Inteligência Artificial Generativa desenvolvida pela OpenAI, projetada para interagir com usuários em linguagem natural. Ele oferece suporte e assistência em uma ampla gama de contextos, facilitando a comunicação e a resolução de questões. Disponível em: <https://chatgpt.com/>

⁴ O CapCut é um editor de vídeos disponível em versões para dispositivos móveis, desktop e online. Ele utiliza ferramentas de Inteligência Artificial para oferecer uma variedade de funcionalidades, facilitando a edição e o aprimoramento de vídeos. Disponível em: <https://www.capcut.com/pt-br/>

2 Produção de vídeos digitais com ia como uma prática matemática disruptiva

Entendemos como prática matemática disruptiva aquelas que, de alguma forma, rompem com o engessamento de atividades em qualquer ambiente escolar, em particular nas salas de aula. Ampliando as ideias de Vilela (2009) as práticas matemáticas disruptivas podem ser compreendidas como realizações entre atores humanos e não humanos, não sendo apenas práticas intencionais, mas sim condicionadas pela própria estrutura social, histórica, cultural e da linguagem, que limitam e regulam as possibilidades de desenvolvimento de matemáticas. Assim a produção de vídeos matemáticos digitais emerge como prática matemática disruptiva (Borba; Souto; Canedo Júnior, 2022). Isso porque é uma realização de atores humanos e não humanos (Borba; Villarreal, 2005; Borba et al., 2023), adota uma linguagem menos formal e mais descontraída para comunicar ideias matemáticas, possibilita romper com metodologias de ensino encapsuladas ou ditas “tradicionais”, possui intencionalidade e, reciprocamente, se molda e é moldada por questões sócio-históricas-culturais e de linguagem de diferentes matemáticas.

O advento das Inteligências Artificiais Generativas ampliou o papel dos atores não humanos no processo de produção de vídeos digitais. Atualmente, essas tecnologias podem atuar sendo coautoras em várias etapas desse processo. Entre as principais aplicações da IA na produção de vídeos, conforme listadas pelo ChatGPT, destacam-se:

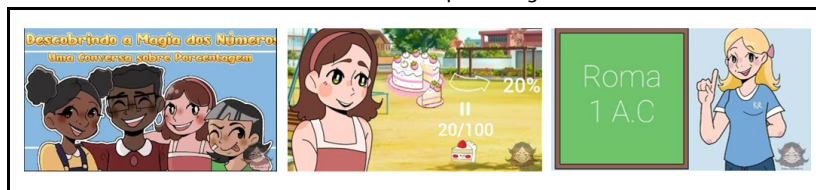
1. Edição Automatizada: A IA pode realizar cortes automáticos, ajustar a cor, estabilizar vídeos, adicionar transições e efeitos especiais, simplificando o processo de edição.

2. Geração de Conteúdo: Ferramentas de IA podem criar animações, gráficos e até mesmo roteiros a partir de entradas textuais, permitindo a criação de conteúdo visual a partir de ideias simples.
3. Reconhecimento de Objetos e Pessoas: Utilizando IA para identificar e rastrear objetos, pessoas ou cenários dentro de um vídeo, facilitando a inserção de efeitos e a categorização de conteúdos.
4. Análise de Sentimento e Classificação de Conteúdo: A IA pode analisar o tom de voz, expressões faciais e o contexto para ajustar o conteúdo de acordo com o público-alvo ou para classificar vídeos para fins de moderação. [...].
6. Criação de Legendas e Traduções Automáticas: Ferramentas de IA podem transcrever falas e gerar legendas em múltiplos idiomas, aumentando a acessibilidade e alcance dos vídeos.
7. Personalização de Conteúdo: A IA pode adaptar vídeos para diferentes públicos, alterando o conteúdo ou destacando partes específicas com base no perfil do espectador. [...]
10. Criação de Avatares e Personagens Virtuais: IA pode ser usada para criar avatares realistas ou personagens virtuais para apresentações, narrações ou interações em vídeos (OPENAI, 2024)

A coparticipação da Inteligência Artificial na produção de vídeos que expressam ideias matemáticas tem sido explorada tanto no contexto do ensino quanto em ações extensionistas conduzidas pelos autores deste capítulo. No processo de elaboração desses vídeos, a IA desempenha várias funções, como a criação e aprimoramento de roteiros, geração de imagens e gráficos, conversão de texto em áudio e criação de personagens, entre outras.

O vídeo intitulado “Descobrimos a Magia dos Números: uma conversa sobre porcentagem” é exemplo dessa produção coletiva entre estudantes e IA. Ele foi produzido no contexto de disciplina do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso. Algumas cenas desse vídeo são ilustradas no Quadro 1.

Quadro 1 - Cenas do Vídeo Descobrimdo a Magia dos Números:
uma conversa sobre porcentagem



Fonte: Disponível em: <https://youtu.be/pGLQ3CmFGhE>

O vídeo ilustrado na Quadro 1 explora o conceito de porcentagem de maneira sequencial e progressiva, iniciando com uma definição clara e conectando-a a exemplos concretos do cotidiano. A produção audiovisual utiliza exemplos simples e relacionados ao dia a dia das crianças, como a divisão de um bolo ou o cálculo de descontos, o que ajuda a contextualizar o conceito matemático abstrato de porcentagem de maneira concreta e tangível. Ao incluir a origem da porcentagem na Roma Antiga, o vídeo vai além da simples transmissão de conhecimento matemático, trazendo uma contextualização histórica que pode enriquecer a experiência de aprendizado. Esse vídeo produzido coletivamente por estudantes-com-Inteligência-Artificial, demonstra como a IA pode contribuir não somente para potencializar a comunicação matemática nos vídeos digitais, mas também simplificar a produção, democratizando o acesso a essa forma de expressão.

Esse movimento em direção a práticas matemáticas mais inclusivas e disruptivas tem sido fomentado por iniciativas como o Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática (<https://www.festivalvideomat.com/>), que se caracteriza um ambiente fértil para a criação e disseminação de matemáticas em diferentes modos e linguagens.

O Festival, ou a participação nele, por ter influenciado o modo de pensar e de planejar a atividade docente. Os professores refletem sobre suas práticas

para a formação de alunos críticos, autônomos e éticos, transformando a imagem pública da matemática e possibilitando uma ampla visão de mundo [...] Além disso, com esse processo de produção, é possível que o professor perceba a linguagem utilizada pelos alunos, o que é qualitativamente diferente da que é expressa com lápis e papel, pois é por meio da oralidade que o aluno fará um uso maior de uma linguagem coloquial, tentando explicar, com suas próprias palavras os procedimentos utilizados durante os cálculos (Costa & Souto, 2023, p. 94 e 96).

A afirmação de Costa e Souto (2023) não abarcou as práticas de professores em escolas indígenas ou em povos tradicionais. Isso porque, até aquele momento, não havia uma categoria específica para eles. O vídeo “Sistema Tradicional de contagem do povo Rikbaktsa” que apresentamos no início deste capítulo, foi o único, até então, submetido ao festival e que era oriundo de uma comunidade indígena. Ele foi a primeira inspiração para a criação da categoria “Povos Originários e Tradicionais” do Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática. Conforme destacamos inicialmente, esse vídeo foi premiado na II edição deste Festival. No entanto, a categoria só se concretizou na VII edição do Festival, pois foram necessárias ações de ensino e extensão em várias comunidades indígenas do país. Essas ações foram essenciais para que eles conhecessem o Festival e analisassem a pertinência da produção de vídeos digitais para o seu povo. Costa e Souto (2023, p. 90) questionaram o idealizador do festival, o prof. Marcelo Borba, sobre a criação desta categoria:

Borba - Para o VII Festival [realizado neste ano, 2023] é quase certo que vamos criar uma categoria para vídeos produzidos por Povos Originários e Tradicionais, isso nunca tinha sido pensado. A ideia teve várias origens mas a ida a Barra do Bugres, MT, onde existem dois programas que lidam com educação matemática, sendo um deles dedicado a populações indígenas foi fundamental. A participação no IV Congresso Brasileiro de Etnomatemática, em Araguaína, Tocantins, também em 2023 consolidou a certeza referente a criação da nova categoria [...] (Costa & Souto, 2023, p. 90)

Essa nova categoria possibilitou que os povos indígenas dessem maior visibilidade a suas culturas, crenças, ritos, mitos e outras tradições. A produção de vídeos digitais ultrapassa as limitações tradicionais da sala de aula, atingindo um público mais amplo e diversificado, caracterizando-se como uma prática matemática disruptiva. Incentivar a produção de vídeos digitais por estudantes e professores indígenas pode criar um ambiente favorável ao diálogo intercultural, fortalecer a identidade indígena e promover a conscientização sobre o valor educacional dos vídeos naquele contexto escolar. Essa possibilidade se alinha com o programa de etnomatemática (D'Ambrósio, 1999) e com sua perspectiva de pensar o cotidiano.

A Matemática começa a se organizar como um instrumento de análise das condições do céu e das necessidades do cotidiano, em todos os rincões do planeta e em tempos, foram se desenvolvendo ideias matemáticas, importantes na criação de sistemas de conhecimento e, consequentemente, comportamentos, necessários para lidar com o ambiente, para sobreviver, e explicar o visível e o invisível (D'Ambrósio, 2019, p. 37).

As ideias matemáticas enfatizadas por D'Ambrósio (2019) como importante na criação de sistemas e conhecimento são apresentadas em diferentes formas nos vídeos que participam do Festival. Assim, o Festival de vídeos digitais e a Etnomatemática juntos ampliam a visibilidade aos povos indígenas e valorizam suas culturas e tradições.

Creemos que os vídeos produzidos por diferentes povos indígenas amplificam, valorizam e deixam palpável a existência de matemáticas que revelam as expressões culturais, crenças, mitos, ritos, valores e tradições. Isso ganha potência quando compartilhamos esses vídeos na internet. Essas produções audiovisuais possibilitam o registro e a difusão dos saberes e fazeres praticados no cotidiano das comunidades indígenas, coadunando as raízes da Etnomatemática.

[...] a Etnomatemática desempenha uma função de respeitar e reconhecer a história, a tradição, os costumes, o conhecimento, a organização cultural e o pensamento de outras culturas, que habitualmente em nossa sociedade é excluída de sua prática matemática, onde o cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura (D'Ambrosio, 2019, p. 102).

Esse respeito e reconhecimento almejado pela Etnomatemática passa pelo conhecimento, pois é extremamente difícil, senão impossível, respeitar e reconhecer o que não se conhece. Para isso, os vídeos digitais trazem uma importante contribuição, pois são tecnologias capazes de preservar e perpetuar o registro filmado.

Na próxima seção discutimos como os povos indígenas estão integrados às tecnologias digitais com a produção de vídeos, utilizando-os como possibilidades de promoção e luta em prol de suas comunidades e contra o “apagamento” que têm sofrido historicamente. Eles (os vídeos) configuram-se, também, como uma oportunidade para esses povos se conectarem com a sociedade global, enquanto reafirmam seus costumes, danças, artesanatos, cânticos, ciência, matemática e métodos próprios de ensino e de aprendizagem.

3 Os vídeos digitais e as “matemáticas”

Os vídeos digitais têm se mostrado uma mídia valiosa para valorizar as práticas cotidianas dos povos indígenas, que são impregnadas de “matemáticas” próprias de suas culturas - “uma etnomatemática não aprendida nas escolas, mas no ambiente familiar, no ambiente dos brinquedos e de trabalho, recebida de amigos e colegas” (D'Ambrosio, 2019, p.24). Entendemos que as produções audiovisuais permitem que tradições, histórias e atividades diárias das comunidades indígenas sejam documentadas e compartilhadas, revelando as diversas formas como a matemática do cotidiano emerge e é aplicada de maneira contextualizada nessas comunidades.

Estimular a produção de vídeos digitais por povos originários e tradicionais não só promove a preservação da etnomatemática desses povos, mas também valoriza e legitima os modos únicos de pensar, resolver problemas e interpretar o mundo, característicos de suas culturas. Ao dar voz e visibilidade a essas práticas, os vídeos digitais contribuem para o reconhecimento da diversidade cultural e das “matemáticas” presentes nas comunidades indígenas. Com esse propósito, os autores deste capítulo têm desenvolvido várias ações formativas voltadas para produção de vídeos digitais nas comunidades indígenas do estado de Mato Grosso.

Nesta seção, apresentamos e analisamos três vídeos digitais produzidos coletivamente por estudantes e professores da Escola Estadual Indígena Julá Paré, localizada no Território Indígena Umutina, no município de Barra do Bugres, Mato Grosso. Esses vídeos foram elaborados no contexto de uma oficina conduzida por professores da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas (FACET) e da Faculdade Indígena Intercultural (FAIND), além de estudantes do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso.

A elaboração dos roteiros dos vídeos envolveu a colaboração entre professores e estudantes, o diálogo com pessoas idosas da comunidade, e o uso da Internet e da Inteligência Artificial Generativa ChatGPT para geração e personalização do conteúdo. A edição dos vídeos foi feita com o aplicativo CapCut, que integra ferramentas de IA para realizar diversas funcionalidades, como remoção de plano de fundo, conversão de texto em fala e geração de imagens, entre outras.

As produções audiovisuais resultantes desta oficina apresentam as práticas culturais, o artesanato e as matemáticas presentes no cotidiano dos povos indígenas e reafirmam a contribuição dessa tecnologia na

valorização e disseminação dos saberes e fazeres tradicionais dos povos indígenas. Nelas, a Etnomatemática se manifesta de forma muito clara e

não se esgota no entender o conhecimento matemático das culturas periféricas. Procura entender o ciclo da geração, organização intelectual, organização social e difusão desse conhecimento. Naturalmente, no encontro de culturas há uma importante dinâmica de adaptação e reformulação acompanhando todo esse ciclo, inclusive a dinâmica cultural de encontros (D'Ambrósio, 1999, p. 03).

Com base nas ideias de D'Ambrósio (1999), destacadas na citação anterior, podemos analisar que um recorte do ciclo de geração de conhecimento é apresentado no vídeo, intitulado “Matapi Balatiponé”. Pois, na entrevista apresentada nele, a artesã descreve em detalhes a evolução histórica do Matapi dentro da cultura do povo Balatiponé. O Quadro 2 apresenta algumas cenas deste vídeo.

Quadro 2 - Cenas do vídeo “Matapi Balatiponé”



Fonte: <https://youtu.be/wrJSJuq-Oco?si=TH-yf9A6cEMlnh9h>

O vídeo ilustrado no Quadro 2 proporciona uma narrativa histórica sobre o matapi balatiponé e explica o processo de sua confecção, evidenciando a matemática envolvida. Sob essa perspectiva, a produção audiovisual não apenas representa a cultura do povo Balatiponé, como sugerem Santos e Fragoso (2009), mas também desempenha um papel importante na preservação e transmissão das tradições culturais de geração em geração, conforme destacado por Cunha e Borba (2024a).

Além disso, ao conhecermos a historicidade de cada povo, descobrimos saberes e fazeres únicos, inerentes a cada cultura, nos quais os instrumentos materiais (artefatos) e intelectuais (mentefatos)

revelam como esses indivíduos compreendem e interagem com sua realidade (Neves, 2013). Mais que isso, reconhecer e entender a historicidade, os saberes e os fazeres de diferentes povos, grupos e sociedades nos permite valorizar culturas distintas da nossa. Quando percebemos a riqueza dos instrumentos materiais e intelectuais que cada povo utiliza para interpretar e moldar sua realidade, ampliamos nossa compreensão da diversidade humana. Isso nos incentiva a respeitar e apreciar as variadas formas de conhecimento e expressão cultural, fortalecendo o diálogo intercultural e promovendo uma convivência mais harmoniosa e enriquecedora.

A cestaria e outros trabalhos artesanais trançados são importantes artefatos culturais do povo Balatiponé-Umutina, pois há um grande interesse deles em divulgar os meandros do processo de produção, a historicidade e os materiais que compõem essa tecelagem de fibras naturais. O vídeo “Abanador Barukwá” é outra produção audiovisual que destaca a matéria-prima empregada e o processo de confecção deste artesanato cultural, integrante do cotidiano do povo Balatiponé-Umutina. Algumas cenas desse vídeo são apresentadas no Quadro 3.

Quadro 3 - Cenas do vídeo “Abanador barukwá”



Fonte: <https://youtu.be/r5mMBQPDsQ8?si=Cy8MmqVF1oEoHaxv>

A produção audiovisual ilustrada no Quadro 3, fornece uma explicação sobre as possibilidades de uso do abanador no cotidiano e nas manifestações culturais indígenas. Verifica-se, também, um esforço para relacionar a “matemática” europeia, com trançado desse artefato.

Talvez essa necessidade venha do próprio currículo escolar que é imposto a esses povos. Na contra mão desta imposição, D'Ambrosio (1999) e Gerdes (1996) defendem que é necessário valorizar de forma igualitária todas as “matemáticas”.

[...] pela luta na sobrevivência, na elaboração de atividades culturais e reflexão sobre as mesmas, os seres humanos desenvolvem ideias matemáticas, entre outras, de forma que a produção de conhecimento matemático ocorre em todas as culturas humanas. Assim, enquanto produto cultural, a matemática desenvolveu-se de diferentes formas, dependendo das condições culturais, sociais e econômicas do contexto em que cada grupo (Sufiatti, Bernardi & Duarte, 2012, p.68).

A matemática das cestarias do povo Balatiponé Umutina está presente também no vídeo “Cesto Artesanal Balatiponé Umutina Katodokwá”. Ele aborda outro importante utensílio cultural do povo que habita o Território Indígena Umutina. O Quadro 4 apresenta algumas cenas desse vídeo.

Quadro 4 - Cesto Artesanal Balatiponé Umutina Katodokwá



Fonte: <https://youtu.be/PYNjFM1N5mA?si=xPKVwVjpFuCjAaxU>

No vídeo ilustrado no Quadro 4, os autores detalham o uso do cesto artesanal (Cat quá) nas atividades cotidianas de sua cultura. Assim como nos outros vídeos que abordam temas relacionados a artesanato, este também destaca a sua utilidade, a matéria-prima utilizada (broto da palmeira do babaçu) e descreve as etapas envolvidas no processo de confecção deste item cultural. Ao final do vídeo percebe-se, a exemplo dos anteriores, a necessidade de relacionar esse artefato cultural com a

matemática do currículo oficial, no caso com a geometria. A esse respeito D'Ambrósio destaca:

Embora estejamos numa civilização global, a Educação deve ter características locais, deve refletir o etno em que ela está sendo praticada. As disciplinas acadêmicas são globais, são universais. A Matemática Acadêmica, a Biologia Acadêmica, a Física Acadêmica e todas as disciplinas que estão nos programas escolares, em todos os graus, são as mesmas em todos os países. Por isso se fala em currículo internacional e se aplicam testes internacionais padronizados. Isso faz com que muito do que se faz na escola, em todas as disciplinas, mas principalmente na matemática, seja desligado da realidade do aluno. [...] Mas não é possível esquecermos nossas raízes, nossos antepassados e ancestrais. Assim como as raízes sustentam uma árvore e o alicerce sustenta uma edificação, nossas raízes familiares e culturais é que sustentam nossa personalidade, nossa dignidade e nossa vontade. Esse é o aspecto local da condição humana (D'Ambrósio, 2018, p.537 - 538).

A problemática destacada por D'Ambrósio (2018) que ecoou nas narrativas do povo Balatiponé Umutina é, sem dúvida, fortalecida, ganha uma maior dimensão e alcança várias outras culturas com a possibilidade que o vídeo digital proporciona, ou seja, o compartilhamento desses vídeos na internet (<https://www.festivalvideomat.com/>) viabiliza sua chegada até mesmo nos locais mais longínquos geograficamente em relação à localização da aldeia Umutina. Assim, cremos que vídeos digitais e Etnomatemática podem ser um elo entre a realidade dos estudantes indígenas e a matemática de seu povo, expressa em artesanatos, mitos, ritos, lendas, fatos, situações locais, produzida desde os seus antepassados e compartilhada, ao longo do tempo, por meio da oralidade (linguagem local - própria daquela cultura) aos familiares.

Os vídeos digitais produzidos com Inteligência Artificial Generativa analisados neste capítulo oferecem uma visão rica e detalhada das práticas culturais e matemáticas dos povos indígenas do Território Indígena Umutina. Nessas produções audiovisuais, é possível

observar que as atividades cotidianas dessa comunidade estão impregnadas de saberes etnomatemáticos. As narrativas apresentadas nos vídeos reforçam a importância de reconhecer e valorizar a diversidade desses saberes, evidenciando a riqueza cultural que cada grupo indígena contribui para a compreensão mais ampla da matemática como um fenômeno universal.

Acreditamos que os vídeos digitais desempenham um papel crucial na preservação e transmissão dos saberes dos povos indígenas, permitindo que esses conhecimentos sejam eternizados e transmitidos para as futuras gerações. Dessa forma, eles contribuem significativamente para a luta pela sobrevivência cultural desses povos (Wanzeler; Silva & Kambeba, 2023). Além disso, ao divulgar essas práticas culturais e matemáticas por meio de vídeos digitais, cria-se um ambiente favorável à promoção de um diálogo intercultural. Isso pode contribuir para que os saberes etnomatemáticos indígenas possam ser apreciados e valorizados por diferentes culturas. Assim, a integração da etnomatemática com as tecnologias digitais oferece novas possibilidades para o reconhecimento e respeito pelas diferentes formas de conhecimento e práticas culturais ao redor do mundo.

Considerações finais

Neste capítulo, discutimos a produção de vídeos digitais como uma prática matemática disruptiva, particularmente quando integrada com tecnologias de Inteligência Artificial (IA). A utilização de IA no processo de criação audiovisual não só simplifica a produção, mas também redefine a maneira como as ideias matemáticas podem ser comunicadas com essa mídia. Essa prática promove uma abordagem mais flexível, colaborativa e culturalmente contextualizada, permitindo que

diferentes matemáticas sejam valorizadas e difundidas no espaço virtual.

A interação entre humanos e Inteligência Artificial na produção de vídeos digitais molda a matemática comunicada, tornando-a mais contextualizada e atrativa. Isso porque os algoritmos de IA podem sugerir roteiros personalizados para públicos específicos e criar representações visuais que contribuem a compreensão de conceitos matemáticos, conectando-os ao cotidiano dos espectadores e promovendo maior engajamento.

A produção de vídeos digitais nas comunidades indígenas emerge como uma prática educativa que valoriza a cultura e as tradições dos povos originários e tradicionais, como evidenciado pelos vídeos analisados ao longo deste capítulo. Consideramos fundamental aprofundarmos o nosso entendimento sobre nossas próprias culturas, assim como sobre as variadas perspectivas, origens e tradições dos povos originários e tradicionais.

Os vídeos digitais, em conjunto com a Etnomatemática, quando utilizados de forma criativa, superam as barreiras tradicionais da sala de aula, alcançando um público mais amplo e diversificado. Ao incentivarmos a produção de vídeos digitais por estudantes e professores indígenas, pretendemos criar um ambiente propício para o diálogo intercultural e reforçar a identidade indígena, ao mesmo tempo em que se busca fomentar a conscientização sobre o potencial educacional dos vídeos digitais nos contextos escolares, sobretudo na valorização da etnomatemática dos povos indígenas.

Os vídeos apresentados neste capítulo foram produzidos pelo povo Balatiponé-Umutina. Neles, é possível verificar “as ticas, a matema e o etno” que são os pilares da Etnomatemática. Para explicar vamos parafrasear D’Ambrósio (2018). Nessas produções audiovisuais são

apresentadas maneiras, modos, artes, técnicas, (ticas) para entender, para explicar, para lidar com (matema) seu meio ambiente, com fatos e fenômenos naturais ou criados por outros humanos e animais, com o ambiente sociocultural, com seu imaginário e com fantasias (etno).

Talvez os vídeos digitais estejam também se transformando em uma “nova” oralidade para a continuidade e a transferência de saberes e fazeres. Com ela não há preocupações com o registro na memória, além disso, qualquer um pode acessar seja qual for o tempo e lugar. Há, portanto, uma diferença qualitativa do que historicamente acontecia, quando eras necessárias a memorização e a presença física de todos ao redor de uma fogueira. No entanto, ampliar essa discussão foge ao escopo deste capítulo.

Outra problemática que identificamos, para além do objetivo aqui proposto, foi a imposição da matemática europeia/colonizadora que é tida, historicamente, como dominante e tem sido imposta nos currículos, inclusive nas escolas indígenas. Nós, assim como a Etnomatemática, defendemos que as diferentes “matemáticas” devem ser reconhecidas e valorizadas, sem relações de poder ou qualquer tipo de hierarquia entre elas. Cada uma tem sua importância! Contudo, nos vídeos digitais que analisamos aqui ficou claro o esforço desse povo em relacionar a matemática colonizadora com a sua cultura. É possível que eles não tenham se atentado a isso. Por este motivo, consideramos relevante que trabalhos futuros retomem essa problemática e agreguem forças ao movimento de muticulturalização dos currículos matemáticos.

Referências

BERNDT, A.; JANUÁRIO, E.; CUNHA, J. F. T. Dicionário enciclopédico eletrônico: registro das línguas indígenas presentes nos cursos do 3º grau indígena. In: **Cadernos de**

Educação Escolar Indígena – 3º Grau Indígena. Barra do Bugres: UNEMAT, v.4, n.1, 2005. ISSN 1677-0277.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York, United States: Springer, 2005.

BORBA, M. C.; SOUTO, D. L. P.; CANEDO JUNIOR, N. R. Vídeos na Educação Matemática: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais. Belo Horizonte: Autêntica, 2022.

BORBA, M. C.; SOUTO, D. L. P.; CUNHA, J. F. T.; DOMINGUES, N. S. Humans-with-Media: Twenty-Five Years of a Theoretical Construct in Mathematics Education. In: PEPIN, B.; GUEUDET, G.; CHOPPIN, J. (Eds.). **Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.** Cham: Springer International Publishing, 2023. p. 1–26. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_7-1

BRAGA, A. C. V.; SANTOS, G. L. A cultura digital e escolarização indígena: a experiência tupinambá no Acuípe de Baixo. **Revista Docência e Ciberultura**, v. 7, n. 3, p. 167-183, 2023.

BRASIL. Ministério dos Povos Indígenas. Fundação Nacional dos Povos Indígenas. **Brasil registra 274 línguas indígenas diferentes faladas por 305 etnias**, 27 out. 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/funai/pt-br/assuntos/noticias/2022-02/brasil-registra-274-linguas-indigenas-diferentes-faladas-por-305-etnias>. Acesso em: 04 jan. 2023.

COSTA, R.F.; SOUTO, D. L. P. Festivais de vídeos digitais e educação matemática: uma construção coletiva. In: BORBA, M.C.; XAVIER, J.F.; SCHÜNEMANN, T. A. (org.) **Educação matemática: múltiplas visões sobre tecnologias digitais.** São Paulo: Livraria da Física, 2023, p.79-101.

CUNHA, J. F. T.; BORBA, M. C. Vídeos digitais e diversidade cultural: explorando a matemática além dos limites acadêmicos. In: **Anais do 7º Congresso Brasileiro de Etnomatemática.** Macapá, 2024a.

CUNHA, J. F. T.; BORBA, M.C. Mathematical narratives on Youtube: the digital video festival and scientific live streams within a research group channel. In:

ENGELBRECHT, J., OATES, G., BORBA, M.C. (org.). **Social media in the changing Mathematics Classroom.**

Series Advances in Mathematics Education. Springer, 2024b [No prelo].

D'AMBRÓSIO, U. O programa etnomatemática e questões historiográficas e metodológicas. In: **Anais VI Congresso brasileiro de Filosofia**. São Paulo, 1999.

D'AMBRÓSIO, U. Etnomatemática: motivações, desenvolvimento e ações. **Ensino Em Revista**, Uberlândia, v.25, n.2, p. 536-542, 2018.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática**: Elo entre as tradições e a modernidade. Editora autêntica: Belo Horizonte, 2019.

DOMINGUES, N. S.; BORBA, M. C. Compreendendo o I Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática. In: **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 15, n. 18, p. 47-68, 2018.

DOMINGUES, N. S.; BORBA, M. C. Digital video festivals and mathematics: changes in the classroom of the 21st Century. **Journal of Educational Research in Mathematics**, v. 31, n. 3, p. 257-275, 2021. <https://doi.org/10.29275/jerm.2021.31.3.257>

GERDES, P. **Etnomatemática**: Cultura, Matemática, Educação. Instituto Superior Pedagógico. Maputo, 1991.

KENSKI, V. M. Educação, memórias e cultura digital: reflexões para hoje e os próximos futuros. **Video Journal of Social and Human Research**, v. 2, n. 1, p. 35-44, 31 jul. 2023.

KLEIN, T.; RENESSE, N. **O que dizem (e pensam) os indígenas sobre as políticas de inclusão digital?** Povos Indígenas no Brasil. Disponível em: [https://pib.socioambiental.org/pt/O_que_dizem_\(e_pensam\)_os_%C3%ADndios_sobre_as_pol%C3%ADticas_de_inclus%C3%A3o_digital%3F](https://pib.socioambiental.org/pt/O_que_dizem_(e_pensam)_os_%C3%ADndios_sobre_as_pol%C3%ADticas_de_inclus%C3%A3o_digital%3F). Acesso em 20 ago. 2024.

NEVES, R. M. S. **Análise de vídeos documentários: perspectivas de debate acerca do Programa Etnomatemática**, 2013. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Goiás, 2013.

OPENAI. ChatGPT. Disponível em: <https://chat.openai.com>. Acesso em: 11 set. 2024.

SANTOS, M. S.T.; FRAGOSO, P. M. A. Vídeo digital: identidades e representações das culturas populares. Intercom: **Revista Brasileira de Ciências da Comunicação**, São Paulo, v. 32, n. 1, p. 169-187, 2009.

SUFIATTI, T.; BERNARDI, S. L.; DUARE, G. L. C. Cestaria e a história de vida dos artesãos indígenas da Terra Indígena Xapecó. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, v. 6, n. 1, p. 67-98, 2013.

VILELA, D. S. Práticas matemáticas: contribuições sócio-filosóficas para a educação matemática. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 17, n. 1, 2009. DOI: 10.20396/zet.v17i31.8646728. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646728>. Acesso em: 14 set. 2024.

WANZELER, E. B.; SILVA, B. N.; OMÁGUA KAMBEBA, E. F. Vídeonetnopoésias como narrativas de sentirpensar e produzir memórias: o cacicado de eronildes firmin kambeba. **Revista Docência e Cibercultura**, v. 7, n. 3, p. 233-244, 4 ago. 2023.

9

A PRODUÇÃO DE VÍDEOS INSERIDA EM PROCESSOS FORMATIVOS: A CONSOLIDAÇÃO DE UM CAMINHO QUE RESULTOU NA FORMAÇÃO DO GRUPO DE PESQUISA TEDIEM

*Marcelo Batista de Souza
Edileusa do Socorro Valente Belo
José Ivanildo de Lima*

Ações desenvolvidas na região norte do Brasil e na Guiana Inglesa por membros do grupo de pesquisa Tecnologias Digitais e Educação Matemática (TEDIEM), vinculado à Universidade Federal de Roraima (UFRR), câmpus Paricarana, possibilitaram um vivenciar de experiências para professores e estudantes, desde a sua criação, em 2022. Particularmente, em tempos marcados pela demonização do uso do celular na sala de aula, os membros do TEDIEM tem discutido pautas, amadurecido ideias, deixado zonas de conforto e procurado reinventar-se. Diante desse cenário, em reuniões que trataram sobre a escrita de projetos de ensino, pesquisa e extensão, bem como a realização de eventos, surgiu a necessidade de refletirmos acerca do uso de tecnologias digitais e do emprego de recursos humanos.

Assim, após “muitas” reuniões, discussões e tomadas de decisão do grupo, definimos e executamos três projetos de extensão, um projeto de ensino, um projeto de pesquisa, realizamos quatro eventos e participamos de outros tantos com alguma ação para visibilizar o trabalho desenvolvido pelo TEDIEM. Por exemplo, em 2022 experenciamos imersões na escola pública por meio dos projetos de extensão ‘Vídeos Digitais e Educação Matemática’ e ‘Sequências didáticas na Educação Matemática’, que envolveu, posteriormente,

estudantes e professores em eventos como a Semana da Matemática da UFRR, a Feira de Ciências promovida pela Secretaria de Educação de Roraima, os Encontros de Projetos de Pesquisa – de Matemática, duas edições do Intercâmbio Intercultural entre Escolas da Fronteira Brasil – Guiana Inglesa, a Conferência do Grupo de Pesquisa Tecnologias Digitais e Educação Matemática (TEDIEM) e o Fórum Roraimense de Formação Inicial de Professores que Ensinam Matemática, organizado pela diretoria regional de Roraima da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Já em 2023, apostamos nos projetos de extensão ‘Saberes profissionais para uma Educação Matemática de estudantes com altas habilidades e superdotação na Educação Básica’ e renovamos o projeto ‘Vídeos digitais e Educação Matemática’ que foram desenvolvidos em paralelo às ações do projeto de ensino ‘Uso da tecnologia digital integrado à elaboração de protótipos e à produção de conhecimento matemático’, o qual foi estendido para 2025 com anuência da Pró-reitoria de Ensino de Graduação da UFRR.

Em nosso entendimento, essas experiências foram fundamentais no final de 2024 para realizarmos a V Mostra de Vídeos Digitais e Educação Matemática integrada a XVIII Semana da Matemática da UFRR, eventos de porte médio e abrangência internacional que receberam apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Nesse caminho, os desafios que emergiram no planejamento desses projetos e eventos lançaram membros do TEDIEM em zonas de risco, tendo em vista que as dificuldades enfrentadas ao longo da execução de suas ações nos trouxeram reflexões. De todo modo, essas experiências têm movimentado a sala de aula e realçado a importância de seus atores educacionais vinculados ao ensino de Matemática.

Outrossim, podemos dizer que em todos os eventos que organizamos nesses dois últimos anos fomos agraciados com trocas de experiências envolvendo membros do TEDIEM, estudantes e professores da Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) e Universidade Federal do Acre (UFAC), além de estudantes e professores de outras instituições públicas (Escolas, Institutos e Universidades).

Participamos de rodas de conversa, momentos de entrevistas e sessões de vídeos digitais. Confraternizamos. Ouvimos manifestações de estudantes, professores, pesquisadores e produtores de vídeos que, de algum modo, colaboraram para a realização da V Mostra de Vídeos Digitais e Educação Matemática integrada à XVIII Semana da Matemática da UFRR. Além disso, vivenciamos em várias oportunidades os bastidores dos referidos projetos e eventos, no período 2022-2024, que viabilizaram registros e compartilhamentos de memórias com membros do TEDIEM, em trabalhos presentes e possibilidades de trabalhos futuros, os quais têm permitido por meio de nossas experiências demarcá-los como um lugar de conhecimento e proporcionado o aceite de convites para ministrar palestras, escrever artigos, elaborar relatórios de pesquisa e participar de bancas examinadoras.

As primeiras experiências

Em nosso entendimento, esse rol de experiências se consolidou no desenvolvimento das ações dos projetos mencionados que, naquela

oportunidade (2022-2024), buscaram desenvolver pesquisas sobre o uso de ‘Tecnologias Digitais e Educação Matemática na Educação Básica e na Educação Superior’ vinculado ao estado de Roraima. Segundo Souza (2021, p. 28), investigações realizadas nesse contexto sugerem que as tecnologias digitais podem ser utilizadas “pelo professor para ensinar um determinado conteúdo e, também, para avaliar os estudantes que produzem vídeos como parte de uma atividade”. Nesse caminho, apresentamos (inicialmente), de forma breve, trabalhos desenvolvidos no âmbito desses projetos que envolvem pesquisa e formação de professores que ensinam matemática para realçarmos o protagonismo de estudantes na produção de vídeos, a exemplo de alguns desenvolvidos pelo primeiro autor deste artigo, apresentados na sequência.

Por exemplo, em Souza (2022), uma análise multimodal é desenvolvida a partir da leitura de um vídeo produzido por estudantes de uma universidade pública, no qual o conteúdo explorado é a multiplicação de matrizes. Na oportunidade, o autor ressalta que durante o seu processo de produção, os estudantes foram estimulados a articular diferentes formas de comunicação, como as linguagens visual, simbólica e natural, algo que permitiu a reorganização do pensamento e a ressignificação de conceitos abstratos.

O autor fundamenta-se no construto teórico seres-humanos-com-mídias (Borba & Villarreal, 2005) para valorizar a relação entre humanos e não humanos, assim como reforçar que, nessa coletividade, ambos são protagonistas na produção de conhecimento. Ele admite que, nesse contexto, o uso de vídeos é visto como uma prática reorganizadora do pensamento, viabilizadora de formas de interação em sala de aula e promotora de uma aprendizagem colaborativa.

Nesse viés, a análise proposta em Souza (2022) discute como os vídeos possibilitam aos estudantes assumirem o controle do processo de

aprendizagem, ao criarem as suas próprias representações matemáticas, algo que se alinha à ideia de que o uso de tecnologias digitais pode ampliar as formas de expressão na comunicação matemática. O autor admite que o seu trabalho contribui para o entendimento de como as tecnologias digitais utilizadas na produção de vídeos podem enriquecer a prática educacional e promover a inclusão integrada ao ensino de Matemática, na qual os estudantes são incentivados a interpretar, significar e comunicar conceitos, tendo a oportunidade de se expressarem livremente.

Souza (2022) destaca que a produção de vídeos pode transformar o ensino da Matemática, não apenas como uma ferramenta de visualização, mas também como uma forma de promover compreensões acerca de conceitos matemáticos. Na sua visão, essa prática coloca os estudantes em uma posição de protagonismo no processo de aprendizagem, uma vez que eles podem criar significados e se expressar por meio da combinação de recursos semióticos.

Já em Souza e Belo (2023) os autores aprofundam o debate sobre a inclusão das tecnologias digitais no ensino de Matemática, abordando a formação inicial e a formação continuada de professores. Um ponto central das suas ideias é a necessidade de adaptar a prática pedagógica às transformações tecnológicas e ao uso de recursos que facilitam o aprendizado de conceitos matemáticos abstratos. Os autores compreendem que as tecnologias digitais, a exemplo de softwares específicos e ferramentas interativas, são vistas como mediadoras no processo de reorganização do pensamento que, por sua vez, podem potencializar a compreensão de estudantes e enriquecer o ambiente de ensino.

Em especial, eles ressaltam que a formação de professores deve se concentrar em duas áreas principais: o desenvolvimento de

competências tecnológicas e a aplicação pedagógica desses recursos. Nesse contexto, os autores acreditam que muitos professores ainda enfrentam dificuldades com o uso eficaz das tecnologias em sala de aula, o que tem se mostrado um obstáculo para a inovação no ensino. Por essa razão, eles destacam a importância de programas de formação que incluem o domínio técnico de recursos digitais e a capacitação de professores, tendo em vista a possibilidade de integração do currículo as suas práticas em sala de aula.

Souza e Belo (2023) refletem ainda sobre como esses recursos podem ser utilizados para promover algum tipo de interação humano-tecnologia que permita aos estudantes terem autonomia ao desenvolverem os seus próprios ritmos de aprendizagem. No entendimento desses autores, vídeos, simuladores, aplicativos, entre outros, são recursos potenciais indicados para tornar a matemática acessível, especialmente, em tópicos complexos como o cálculo diferencial e integral.

Outro ponto de destaque do trabalho de Souza e Belo (2023) é a análise de políticas educacionais relacionadas à formação de professores com ênfase na expansão de licenciaturas em Educação a Distância e na criação de programas como o Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Eles entendem que esses programas buscam proporcionar uma formação ‘mais’ robusta, alinhada às demandas contemporâneas, que integram o uso de tecnologias ao cotidiano docente. O estudo também menciona os desafios que ainda persistem na escola pública como a desigualdade marcada pela dificuldade de acesso a recursos tecnológicos em diferentes regiões e contextos educacionais. Por essa razão, os autores defendem que a adoção de tecnologias digitais no ensino de Matemática não deve ser vista apenas como uma adição ao currículo, mas como um elemento transformador que exige mudanças

estruturais na formação docente e na organização das práticas pedagógicas.

Nessa direção, Souza, Gama e Lima (2023) abordam a produção de vídeos digitais como uma possibilidade pedagógica para a sala de aula de Matemática. Os autores partem da premissa de que o uso de tecnologias voltadas para o ensino é uma demanda crescente, especialmente em um mundo cada vez ‘mais’ digitalizado. Os autores defendem que a produção de vídeos realizadas por estudantes possa transformar a maneira como os conceitos matemáticos são ensinados e apreendidos. Na visão deles, o uso de vídeos possibilita aos estudantes explorarem a colaboração, a autonomia e a criatividade.

Seguindo esse entendimento, eles desenvolveram ações vinculadas a um projeto de extensão que envolveu a participação de estudantes e professores em atividades de produção de vídeos relacionados ao estudo de conceitos matemáticos. Para tal, foi proposta uma capacitação e visitas a escola pública visando integrar práticas digitais em aulas de matemática. Na oportunidade, os professores receberam orientações sobre como transformar o conteúdo matemático em vídeos autorais que, inclusive, auxiliaram os estudantes a estruturarem as suas ideias.

Segundo os autores, a produção de vídeos contribuiu para o engajamento dos estudantes com a Matemática, incentivou os alunos a se apropriarem de conceitos e promoveu uma compreensão dos temas abordados na sala de aula. Além disso, os vídeos permitiram que os professores observassem as dificuldades dos estudantes de forma detalhada, os quais possibilitaram intervenções pedagógicas e a criação de uma ponte entre teoria e prática. Com isso, ao representar visualmente conceitos abstratos, como operações algébricas ou propriedades geométricas, Souza, Gama e Lima (2023) acrescentam que os estudantes puderam ver aplicações concretas da teoria matemática.

Nesse contexto, eles destacam que apesar dos benefícios trazidos por conta da experiência, alguns desafios foram enfrentados na implementação dessa metodologia. Por exemplo, a infraestrutura escolar se mostrou como um dos principais obstáculos, já que nem todas as escolas possuíam os equipamentos tecnológicos adequados para a produção de vídeos. Além disso, a falta de familiaridade dos professores com recursos digitais revelou outro desafio, o que reforçou a necessidade de formação continuada e de suporte técnico para garantir que a metodologia seja empregada na sala de aula.

Diante do exposto, os autores concluem que a produção de vídeos digitais é uma prática ‘inovadora’ que pode enriquecer o ensino de Matemática. No entanto, para que essa abordagem se sustente no âmbito da escola pública é importante que seja feito um investimento contínuo na formação de professores e na infraestrutura das escolas. O estudo sugere que essa experiência pode ser expandida para outras áreas do conhecimento e, assim, reforça a importância de adaptar essa metodologia às práticas educacionais e às demandas existentes na sala de aula da escola pública.

Para além desses trabalhos, que relatam experiências, descrevem análises e compartilham interpretações relacionadas à produção de vídeos, o convívio com membros do grupo de pesquisa TEDIEM no desenvolvimento de seus projetos trouxe à tona o mosaico de pesquisas, realçado pela heterogeneidade de seus membros que, em seus trabalhos, desenvolvidos por meio de curadorias, ampliaram as possibilidades de produzir conhecimento sobre o vídeo digital. Segundo Borba e Chiari (2013, p. 13), essa abordagem retrata “a noção de que um conjunto de investigações com focos particulares distintos, mas sobre o mesmo tema, permite uma análise longitudinal [...] o que possibilita, por sua vez, que se tenha uma compreensão mais abrangente”.

Algumas conexões

Em especial, essa narrativa visa refletir sobre a experiência da segunda autora com vídeos digitais e Educação Matemática. Ela, que é professora formadora de professores de Matemática há nove anos na UFRR, entende que o docente é um sujeito que aprende com as diversas experiências, seja no âmbito pessoal ou social. Experiências essas que estão relacionadas às situações vividas, passadas, sentidas (Larrosa, 2015, p. 18) e que nos transformam de tempos em tempos.

Em sua pesquisa desenvolvida ao longo do doutorado, ela investigou as experiências de docentes formadores de professores de Matemática, buscando compreender processos autoformativos produzidos por sujeitos que refletiram sobre as suas experiências (Belo, 2018). Assim, ela pode reconhecer a importância das experiências nas práticas pedagógicas desses sujeitos e que núcleos experienciais foram apreendidos nas suas práticas, os quais serviram de elementos balizadores para as suas tomadas de decisões. Ou seja, olhar para as experiências de cada docente é compreender por que eles fazem o que fazem da maneira como fazem.

Atualmente, a segunda autora faz parte do grupo de pesquisa TEDIEM, que tem como meta a pesquisa universitária enquanto processo acadêmico na formação inicial e continuada do professor de Matemática, além do estímulo ao uso de tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem. Buscando em suas memórias docentes quando se deu a sua primeira aproximação com as tecnologias digitais, ela lembrou da época em que ministrou a disciplina Tendências Pedagógicas da Educação Matemática no segundo semestre de 2019. Naquele momento, ela precisou estudar e agregar ‘novos’ conhecimentos para a sua prática formadora, pois até então apenas

‘utilizava’ computadores, softwares, plataformas digitais, entre outros, para fins educacionais. A partir do momento que precisou ampliar o seu olhar para as tecnologias digitais passou de usuária para pesquisadora, justificando que precisava compreender teoricamente e metodologicamente as nuances daquela interação humano-máquina para ensinar Matemática com uso desses recursos.

Assim, ela tem buscado navegar pelo uso da calculadora e do celular em sala de aula; pelos softwares voltados para o ensino de Matemática; pela sala virtual do *Google*, o *Classroom*; e pela produção de vídeos digitais. A autora admite que em alguns aspectos aprendeu mais do que ensinou, pois os discentes conheciam alguns recursos que ela não dominava tanto quanto eles. Essa experiência possibilitou ‘atualizar’ os seus conhecimentos estando imersa no contexto das tecnologias digitais. Entretanto, hoje ela percebe que teoricamente ‘pouco’ avançou, de certo modo ainda permanece como ‘usuária’. No entanto, em 2020, com a pandemia da COVID 19, após a UFRR ter decidido migrar para um formato de ensino remoto emergencial as coisas mudaram. Ela revela que o seu aprendizado na disciplina Tendências Pedagógicas da Educação Matemática a auxiliou metodologicamente no desenvolvimento de suas atividades.

Passado algum tempo, em 2021, um dos professores do Departamento de Matemática da UFRR retorna do doutorado em Educação Matemática, na linha de pesquisa Tecnologias Digitais, o TEDIEM então se consolida como grupo de pesquisa e passa a desenvolver os seus primeiros estudos, tendo como base a literatura que aborda vídeos digitais, além de outras temáticas de interesse do grupo. A saber, um dos seus primeiros estudos se voltou para a obra de Borba, Souto e Canedo Jr (2022), na qual ela pode acompanhar a trajetória histórica das tecnologias digitais no contexto da Educação Matemática

e refletir sobre a imbricação entre tecnologias e sociedade, entre técnica e sujeito. Desse modo, ela percebeu a sua base epistemológica – a Pesquisa Narrativa, que se centra na experiência do sujeito, alinhou-se ao contexto das tecnologias digitais.

A autora revela que outro estudo, realizado pelo grupo de pesquisa TEDIEM sobre o texto de O'Halloran (2005), ficou marcado em sua memória e trouxe à tona as noções de multissemiótica e multimodalidade exploradas em pesquisas desenvolvidas por membros do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), a exemplo das descritas em Souza (2021), Canedo Jr (2021), Fontes (2020), Neves (2020), Domingues (2020) e Oechsler (2018). Ela admite que a imersão na semiótica proporcionou apreender Matemática e a produção de conhecimento com uso de vídeos digitais de outras formas. Assim, ela considera que as escolhas que fazemos ao produzir um vídeo podem indicar a nossa relação com a matemática e com o mundo.

Movida pela inquietação de como o grupo de pesquisa TEDIEM estava se constituindo, ela decidiu participar do Congresso Internacional de Pesquisa (Auto) biográfica, realizado em 2024, com a apresentação de um trabalho que analisou, em termos narrativos, a constituição de um grupo de pesquisa em tecnologias digitais e Educação Matemática no extremo norte do Brasil (Belo, 2024). A autora diz que hoje pode refletir sobre a tecnologia não ser algo extrínseco ao ser humano, justamente por considerar que existe uma relação intrínseca, pois ambos sujeito e tecnologia se modificam a partir das interações.

Nessa mesma linha, outras relações foram formadas por meio do avanço desse processo metacognitivo, quando o terceiro autor deste artigo passou a analisar a inserção de tecnologias digitais em suas práticas de formação de professores de Matemática, especificamente ancoradas na produção de vídeos digitais. Em especial, ele analisa duas

experiências vivenciadas no âmbito da graduação, uma relacionada ao curso de Licenciatura em Matemática a Distância e outra associada ao curso de Licenciatura em Matemática presencial, as quais serão compartilhadas para traçar o caminho pelo qual ele passou quando introduziu a produção de vídeos digitais como recurso didático voltados para fins de acompanhamento, monitoramento e registro da produção de materiais didáticos manipuláveis (Lorenzato, 2006) e composição de uma espécie de laboratório pessoal de geometria, aritmética e álgebra (Bairral & Silva, 2010). Além disso, em um segundo momento, o referido autor passou efetivamente a solicitar a produção dos vídeos para a discussão de conceitos pertinentes na formação do professor, especificamente, sobre história e filosofia da Educação Matemática.

De início, ele reflete que no curso de Licenciatura em Matemática a distância, a implantação do Sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB) na UFRR, datada de 2007, marcou um ponto de inflexão na instituição, impulsionando a adoção de ‘novas’ ferramentas metodológicas e de avaliação da aprendizagem baseadas em tecnologias digitais.

Em 2010, o Programa de Capacitação de Profissionais em Educação a Distância, definido como um ‘Programa de Formação à Distância, dedicado ao uso pedagógico das tecnologias da informação e da comunicação para a Educação a Distância’ (UFRR, 2010), teve papel fundamental na formação de profissionais. No âmbito desse programa era ofertado o Curso de Extensão em Capacitação de Profissionais de Educação a Distância, com carga horária de 180 horas, que visava subsidiar teórica e metodologicamente os profissionais que atuariam nos cursos à distância vinculados à UAB, além de desenvolver habilidades para o uso das tecnologias digitais na prática educativa. Naquela oportunidade, a preocupação com a utilização desses recursos,

como a Internet aplicada à Educação, era central nesse processo de capacitação. Professores, tutores e profissionais envolvidos com a EAD, imersos nas práticas formativas, passaram por processos de apropriação dos usos e modos de fazer e de lidar com recursos de tecnologias digitais e de gerenciamento de conteúdo para a WEB.

Essa institucionalização da EAD na UFRR ocorreu em paralelo à quarta fase das tecnologias digitais na Educação Matemática (Borba, Scucuglia & Gadanidis, 2014), caracterizada pela internet rápida e o surgimento do YouTube como um repositório de vídeos com capacidade de armazenamento ilimitado (Borba, Souto & Canedo Júnior, 2022). Segundo Schimmelpfennig, Felcher e Ferreira (2022), em meados de 2004 o termo tecnologias digitais passou a ser utilizado por pesquisadores e a partir de então surgiram as possibilidades de uso desses recursos na sala de aula incluíram vídeos, softwares, multimodalidade, redes sociais, ambientes virtuais de aprendizagem, celular e performance matemática digital.

Em certa medida, no contexto da Licenciatura em Matemática a distância, tanto a seleção e quanto à organização de conteúdos digitais passaram a integrar os planejamentos e às práticas, seguindo objetivos e abordagens pedagógicas previstos nos documentos oficiais da instituição. Por exemplo, a busca por textos, e-books, artigos, blogs, sites, vídeos, arquivos de som, gráficos, charges, animações, imagens, entre outros, exigiu de sua parte a disponibilidade de tempo na garimpagem de material digital para que esse recurso tomasse a forma de objetos digitais de aprendizagem. Entretanto, durante as reuniões pedagógicas desse curso, foi o surgimento de um problema que possibilitou a inclusão de vídeos digitais na prática de formação dos futuros professores, em vista de os formadores terem manifestado

descontentamento com relação ao envio de ‘meras’ cópias de soluções de atividades e de tarefas propostas.

Assim, a produção de vídeos foi introduzida na disciplina ‘Instrumentação para o ensino de Geometria’, ofertada em 2015/1, com o objetivo de superar a ‘cola’ e promover a materialização e o registro da aprendizagem por meio do vídeo. Por isso, o planejamento¹ da disciplina funcionou como um roteiro para o estudante, composto de tarefas, todas baseadas na aprendizagem por meio do vídeo. A avaliação das produções considerava critérios como criatividade, construção e manipulação correta do recurso, além de domínio do conteúdo matemático envolvido para a criação dos materiais manipuláveis e eram orientadas pelas tarefas disponibilizadas a seguir:

- **Tarefa 1** – Construção do geoplano. Siga as orientações contidas no Livro 1, p. 31. Apresentar vídeo (câmera de celular ou maq. fotográfica, etc) de no máximo 5 minutos explicando a atividade 1, p. 32.
- **Tarefa 2** – Construção do dominó contido na p. 55. Se estiver em um local com outros cursistas, faça o vídeo em dupla. Se estiver sozinho, faça o vídeo com algum colega ou pessoa de sua confiança.
- **Tarefa 3** – Construir modelos de sólidos geométricos utilizando canudos, linha e tesoura. Além das instruções do livro 1, p. 70, 71 e 72, sugerimos que acesse os endereços abaixo. Siga as instruções e crie pelo menos cinco sólidos geométricos. Faça um vídeo de até 5 minutos apresentando o processo de construção de um dos sólidos e o resultado dos outros quatro sólidos. <https://www.youtube.com/watch?v=FXcrq3QSAZI> e <https://www.youtube.com/watch?v=TN0sAaQmSqq>.
- **Tarefa 4** – Construir policubos (tetracubos, pentacubos e o cubo-soma). Deverá elaborar um vídeo de no máximo 3 minutos contendo uma atividade com policubos, p. 91 e 92.

¹ O mesmo tipo de planejamento ocorreu no semestre seguinte, em 2015-2, na disciplina Instrumentação do Ensino de Aritmética e Álgebra.

- **Tarefa 5** – Construa cubos reais de madeira com densidades diferentes, isto é, procure madeiras mais pesadas ou mais leves até chegar no modelo que flutua, conforme o vídeo. Construa modelos seccionados conforme mostra o vídeo. O material pode ser de papel cartão, cartolina, papelão ou madeira. Use sua imaginação! Faça as secções, conforme está demonstrado no vídeo. Mostre os resultados em um vídeo de no máximo 3 minutos. Assista ao vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=oSEwrglbqnI>.
- **Tarefa 6** – Construa os modelos com canudos dos poliedros de Platão. Mostre os resultados em um vídeo de no máximo 3 minutos.
- **Tarefa 7** – Apresentar um vídeo de até 5 minutos mostrando a construção e o resultado das atividades 1, 5 e 7 do Volume II do livro que estão respectivamente nas p. 74, 78 e 80. Essa atividade está na Aula 17.
- **Tarefa 8** – Construa os tangrans quadrado, coração partido, oval e triangular. Faça um vídeo de no máximo 5 minutos mostrando o processo de construção e os resultados. Veja a Aula 20.
- **Tarefa 9** – Construa o teodolito constante da p. 21. Mostre em vídeo de 3 minutos o processo de construção. Aula 21, p. 15.
- **Tarefa 10** – Elabore um vídeo de no máximo 5 minutos executando as atividades 1 e 2 solicitadas na p. 10, da Aula 23.
- **Tarefa 11** – Construir os objetos ‘Livro dos Espelhos’ e um caleidoscópio e realizar uma atividade retratada em um vídeo de no máximo 3 minutos. A ideia inicial está na Aula 25, p. 52. Para aprofundamento, acessar o link <http://tecmat.pbworks.com/f/Bolema18.pdf> e verificar o artigo “O Uso de Espelhos e Caleidoscópios em Atividades Educacionais de Geometria para 7ª e 8ª séries” dos autores Claudemir Murari e Geraldo Perez.
- **Tarefa 12** – Composição do Laboratório Pessoal de geometria – Fazer individualmente um vídeo contendo uma apresentação e descrição de todo o seu laboratório de geometria, construído ao longo da disciplina. O vídeo não pode superar os 15 minutos.

Vale registrar que esse formato, marcado pela produção dos estudantes, tinha o objetivo de explorar um conteúdo específico nessas duas disciplinas em 2015, cuja intencionalidade subjacente era evitar a mera cópia de tarefas entre os estudantes. Dentre as atividades

planejadas, a maioria delas se materializava por meio da produção de vídeos digitais elaborada por estudantes da Licenciatura em Matemática. Esses vídeos produzidos cumpriram, antes de tudo, o papel de servir como um registro da comprovação individual associado à produção de material didático para alimentar os seus laboratórios pessoais de Matemática e instrumentalizar a prática de ensino do futuro professor.

Exemplos de práticas que ajudaram a consolidar a produção de vídeos

Na disciplina História e Filosofia do Ensino de Matemática (HIFEM), ofertada em 2019/1, houve uma busca por compreender processos históricos e filosóficos de constituição e institucionalização do ensino da Matemática no Brasil e suas relações com os movimentos internacionais de Educação Matemática. Uma turma, composta por 54 estudantes do primeiro semestre, além de outros que optaram pela ‘nova’ matriz curricular, fizeram parte de um contexto de mudanças relacionadas ao Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática, na modalidade presencial. A saber, desse montante, 43 estudantes concluíram a disciplina.

Como dito anteriormente, o foco da disciplina não se voltou para a análise dos vídeos. No entanto, a pretensão foi apontar os vestígios da utilização dos vídeos no desenvolvimento das atividades. Por isso, separamos alguns excertos de falas de estudantes que serviram de instrumento de avaliação da aprendizagem, um exercício permanente de escrita reflexiva e crítica com um formato próximo a um relato de experiência. Naquela oportunidade, todos os 43 relatos foram revisitados com o intuito de identificar extratos descritivos sobre a experiência de produção de vídeos digitais, no sentido de captar como

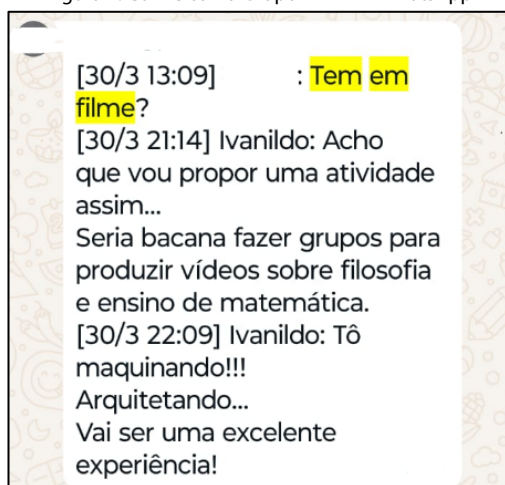
os estudantes reagiram à introdução desse objeto de aprendizagem na disciplina. Desse montante, foram identificados 15 extratos de textos com reflexões consistentes sobre a metodologia relativa à produção de vídeos digitais. Os comentários curtos como ‘gostei muito’, ‘foi interessante’, entre outros, que fazem menção sem qualquer posicionamento sobre a participação na produção de vídeos foram descartados.

É importante dizer que no planejamento da disciplina não havia explicitamente a produção de vídeos digitais. Havia sim, a utilização de cinco vídeos curtos para discutir determinado conceito relativo ao tema em questão, como se pode atestar na fala do estudante E5:

O professor formou vários grupos e passou para cada um, um vídeo para assistirem e falarem o que entenderam/acharam. O vídeo estudado por mim e meu grupo, era de Osvaldo Pessoa Jr – Importância da Filosofia para a Ciência. Achei esse vídeo muito interessante, pois demonstra como a ciência é altamente dependente da filosofia. Principalmente a matemática, que considero, pessoalmente, junto com a filosofia, as mães das ciências (Relato de E5, 2019).

Terminada essa fase de discussão prévia das ideias contidas nos vídeos, avançamos para a formalização dos conceitos por meio da leitura e discussão de um texto introdutório que tratava sobre a Filosofia da Educação Matemática (Bicudo & Garnica, 2011). No entanto, a seguinte questão: “Tem em filme?” foi manifestada por um licenciando que em tom irônico reclamou da quantidade de páginas. O recorte da conversa está ilustrado na Figura 1.

Figura 1: Conversa no Grupo HIFEM – WhatsApp



Fonte: Acervo pessoal.

Essa frase interrogativa, nos levou a propor a elaboração de ‘filmes’ como forma de apresentação das discussões dos grupos, mediante a produção dos vídeos digitais na disciplina. O encaminhamento foi simples: abordar os conceitos presentes no texto, usar a criatividade na organização da apresentação e escolher qualquer software que ajudasse o grupo na produção do vídeo, conforme destaca a estudante E3:

A produção dos vídeos, proposta por um dos alunos, foi a forma em que os alunos mais interagiram. Isso faz com que a aprendizagem do conteúdo se torne mais atraente e prática, pois com os vídeos pudemos mostrar e explicar para os colegas o conteúdo proposto de forma mais simples, direta, mais descontraída, isso acaba tomando mais atenção das pessoas e assim o conteúdo é absorvido melhor. [...] todos se esforçaram, leram todos os textos e fizeram os resumos de pontos importantes. Fiquei encarregada também da gravação de alguns áudios, (método que utilizamos para explicar o conteúdo), com isso acho que todos merecem “10” pelo esforço e pelo resultado do trabalho (E3, 2019).

A estudante descreve a produção dos vídeos como elemento que promoveu a interação do grupo e o envolvimento com a aprendizagem

do conteúdo do texto (de 26 páginas!), que foi lido, estudado e analisado, mesmo que de maneira descontraída. Importante mencionar que do ponto de vista da socialização, os próprios estudantes fizeram a distribuição das tarefas, em especial, o E1 apontou o seguinte:

[...] esse trabalho foi feito de forma rápida e simples, não muito profunda, onde nos sentamos todos pra discutir antes da gravação e fazer uma espécie de roteiro. Depois disso, concordamos em só um [...] falar no vídeo representando os integrantes e juntando a ideia de todos. O que foi feito nesse vídeo foi a visão individual de filosofia, educação e matemática, depois a visão do todo de filosofia da educação matemática, mostrando no vídeo que o ensino da matemática fica vazio sem o uso da filosofia, onde não se aprenderia sem as críticas e dúvidas que é o que caracteriza a filosofia em si (E1, 2019).

Ao fazer uma ‘espécie de roteiro’, esses estudantes discutiram não só o *como* fazer, os procedimentos metodológicos, mas também o *quê* e *quando* deve ser apresentado em cada momento no vídeo. Eles trazem à tona os principais conceitos do texto num movimento dinâmico em busca de conexões com imagens e áudios que representam as ideias nele contidas. Hoje, podemos afirmar que ao procederem no registro perceptivo, os estudantes da disciplina, usufruíram de elementos significantes que viabilizaram a compreensão de significados e fortaleceram a convicção de que as escolhas semióticas desses produtores auxiliaram na elaboração de seus discursos (Souza, 2021; Souza, Gama & Lima, 2024).

Isso tem reflexo em E9 e E14 que se posiciona ao comentar sobre os vídeos e suas aprendizagens:

Juntos trabalhamos para a realização da atividade, utilizamos a criatividade e humor para fazer o vídeo. Não foi tarefa fácil, mas obtivemos bons resultados. As tarefas foram divididas por igual, cada um se esforçou para fazer o trabalho (E9, 2019).

Foi interessante a produção dos vídeos permitindo que os alunos explorassem um lado mais dinâmico do estudo de história, filosofia e matemática. Quando associamos a leitura contínua de textos, temos um grande cansaço e de certa forma, a mesmice, por isso, os vídeos foram uma forma descontraída e eficaz de mostrar o conteúdo do texto (E14, 2019).

Dessas falas depreende-se, sem exagero nenhum, que o uso de vídeos produziu resultados significativos de aprendizagem no pensar reflexivo sobre os conceitos presentes no texto. Não foi o simples reescrever de trechos do material escrito. Implicou em escolhas, em organização do trabalho, visto que o vídeo possui, imagens, áudios, textos, “possui um grande potencial de propor que ele seja produzido por alunos pode[rem] explorar não só os conceitos matemáticos, mas também o planejamento, a escrita, tomada de decisões, trabalho colaborativo e o senso de investigação”, conforme destacam Schimmelpfennig, Felcher e Ferreira (2022).

Entendemos que todo esse emaranhado de possibilidades pode ser percebido na exposição do licenciando, quando ele se propõe a explicar como os seus colegas agiram no coletivo um a um:

Extremamente eficaz na edição do vídeo apesar de pouco presente nas discussões do trabalho [...] aspecto de liderança, sempre organizada, bastante presente nos debates do grupo e compreensiva [...] apesar de ter preparado um bom resumo para o trabalho, foi o que ficou com a menor parte e o que mais cobrou, gerando um certo conflito no grupo [...] ótimo em receber ideias e fixar conteúdo proposto, eficaz na produção do material proposto e determinado a fazer um bom trabalho [...] bastante conjecturadora, bom domínio do conteúdo e extremamente ativa na produção de material para o trabalho (E14, 2019).

Sem dúvidas, por esses e outros motivos temos realizado sistematicamente essas atividades na disciplina HIFEM e em outras disciplinas como Geometria Analítica, Matemática para ensinar álgebra e funções, por exemplo. Os resultados análogos têm aparecido, no

entanto, entendemos que a continuidade dessa pesquisa é um empreendimento que requer ‘mais’ fôlego de investigação, o que a nosso ver configura-se em um trabalho para outra ocasião.

Considerações

Com base no exposto, ao elegermos critérios específicos, reafirmamos que cada pesquisador(a) do TEDIEM, envolvido nos projetos mencionados neste capítulo, foi transformado pela maneira de olhar as produções de estudantes e professores. Essa transformação gerou experiências que trouxeram uma renovação à pesquisa artístico-educacional em matemática no contexto brasileiro. Nesse sentido, a atividade de curadoria desenvolvida por cada pesquisador(a), em seus estudos, revelou ‘novos’ talentos, especialmente, no que diz respeito à montagem das mostras de vídeos digitais, à Educação Matemática e à produção de materiais didáticos para uso em suas localidades. As narrativas dessas mostras apresentam-se como um ‘novo’ espaço de conhecimento, conforme documentado em artigos, laboratórios educativos, relatórios de pesquisa e trabalhos de conclusão de curso (Gama, 2022, Reis, 2022, Gama & Souza, 2022, Souza & Reis, 2022, Souza, Reis & Belo, 2024).

Ademais, essa prática curatorial também mostrou que as propostas de jovens pesquisadores do grupo TEDIEM, estabelecem diálogos tanto com a literatura consolidada em outras áreas do conhecimento quanto com as discussões contemporâneas que envolvem a Educação Matemática. Assim, ao analisarmos as mostras de vídeos digitais, assim como os trabalhos desenvolvidos antes da formação do TEDIEM e os demais realizados no período de sua existência (2022-2024), percebemos que eles fogem das generalizações comuns, abordando temas específicos

e destacando o valor das curadorias. Entendemos que as mostras permitem um trânsito fluido entre referências consagradas e ‘novos’ olhares acerca do uso de vídeos digitais na Educação. Assim, a prática curatorial não se resume à simples seleção de conteúdos, mas sim à construção de narrativas que englobam a contação de histórias, a partilha de vivências, a valorização de diferentes culturas, bem como a análise crítica e a criatividade exposta em suas formas de apresentação. A escolha dos autores deste artigo, atuando como curadores, desempenhou um papel fundamental na criação de algo ‘novo’. Por meio de nossas narrativas, procuramos conduzir os leitores em jornadas investigativas, ao mesmo tempo em que apresentamos as mostras de vídeos digitais no contexto da Educação Matemática como um lugar de conhecimento.

Referências

- BAIRRAL, M. A.; SILVA, M. Â. **Instrumentação do ensino da geometria**. v. 1. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
- BELO, E. S. V. **Cartografias experienciais de formadores de professores de matemática: consciência de si e autoformação**. 2018. 180 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2018.
- BELO, E. S. V. A constituição de um grupo de pesquisa em tecnologias digitais e educação matemática no extremo norte do Brasil. In: **ANAIIS DO X CONGRESSO INTERNACIONAL DE PESQUISA (AUTO)BIOGRÁFICA**. Anais...Salvador(BA) UNEB, 2024.
- BORBA, M. de C.; CHIARI, A. S. S. Vinte anos de GPIMEM: um mosaico de pesquisas em movimento. In: BORBA, M. de C.; CHIARI, A. S. S. (Org.) **Tecnologias digitais e Educação Matemática**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

- BORBA, M. C.; SOUTO, D. L. P.; CANEDO JUNIOR, N. R. **Vídeos na Educação Matemática: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2022.
- BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática**. Belo horizonte: Autêntica, 2011.
- BORBA, M. de C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.
- BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization**. v. 39. New York: Springer, 2005.
- CANEDO JUNIOR, N. da R. **A participação do vídeo digital em práticas de modelagem quando o problema é proposto com essa mídia**. 2021. 194 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2021.
- DOMINGUES, N. S. **Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática: uma complexa rede de Sistemas Seres-Humanos-Com-Mídias**. 2020. 279 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2020.
- FONTES, B. C. **Fatores que influenciam a maneira como a Matemática é comunicada nos vídeos produzidos pelos licenciandos em matemática a Distância**. 2019. Dissertação (Mestrado em Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Rio Claro.
- GAMA, M. A. P.; SOUZA, M. B. de. Uso da tecnologia digital integrado a uma atividade de Geometria Analítica. In: **V Encontro de Práticas Educativas Digitais (Híbrido)**, 2022, Natal. V Encontro de Práticas Educativas Digitais (Híbrido), 2022.
- LARROSA, Jorge. **Tremores: escritos sobre experiência/** Jorge Larrosa; tradução Cristina Antunes, João Wanderley Geraldi. – 1. Ed. Reimp. – Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2015. – (Coleção Educação: Experiência e Sentido)

LORENZATO, S. A. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. A. (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

NEVES, L. X. **Intersemioses em vídeos produzidos por licenciandos em Matemática da UAB**. 2020. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – Rio Claro.

OECHSLER, V. **Comunicação Matemática por meio da produção de vídeo em sala de aula: uma experiência na Educação Básica**. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – Rio Claro.

O'HALLORAN, K. L. **Mathematical discourse: language, symbolism and visual images**. London: Continuum, 2005.

SCHIMMELPFENNIG, T. K.; FELCHER, C. D. O.; FERREIRA, A. L. A. A produção de vídeos de Matemática na formação inicial do professor. In: **Anais do XIV Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)**, 2022, p. 4016-4025.

[no prelo] SILVA, F. T. Uso de tecnologia digital – criando vídeos em Educação Matemática. In: **XXIX Feira Estadual de Ciências de Roraima**, nº 24., 2022, Boa Vista.

SILVA, S. R. P. da. **Vídeo de conteúdo matemático na formação de professores de Matemática na modalidade a distância**. 247 p. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – Rio Claro.

SOUZA, M. B. de. Quando o “bem simples” é significar a multiplicação de matrizes: um vídeo produzido por estudantes. **Quadrante**, v. 31, p. 113-134, 2022.

SOUZA, M. B. de. **Vídeos digitais produzidos por licenciandos em Matemática a distância**. 2021. 242 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Departamento de Matemática. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2021.

SOUZA, M. B. DE ; BELO, E. DO S. V. . Seeds that germinate, sprout, grow and develop in their own time: productions of educational actors inserted in different spaces.

Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, v. 13, n. 3, p. 1-19, 10 set. 2023.

SOUZA, M. B. de; GAMA, M. A. P. **Em cena - vídeos na Educação Matemática**: um curso de extensão para professores da rede pública. In: V Encontro de Práticas Educativas Digitais (Híbrido), 2022, Natal. V Encontro de Práticas Educativas Digitais (Híbrido), 2022a.

SOUZA, M. B. de; GAMA, M. A. P. Vídeos digitais na Educação Matemática: uma possibilidade de utilizar diferentes modos de expressão no discurso e de movimentar a sala de aula. In: **XVI Semana Nacional de Ciência e Tecnologia em Roraima 2022**: “Da Independência do Brasil à Emancipação Tecno-Científica do Estado de Roraima”, 2022, Boa Vista. Boletim de resumos, 2022b.

SOUZA, M. B. de; GAMA, M. A. P.; LIMA, J. I. Produção de vídeos digitais: uma possibilidade para a sala de aula de Matemática. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 9, p. 898-913, 2023.

[no prelo] SOUZA, M. B. de; GAMA, M. A. P.; RODRIGUES, I. C. dos S. Em cena – Mostra de Vídeos Digitais em Escolas da Fronteira Brasil-Guiana. **Cadernos de Extensão**. Universidade Federal de Roraima. 2023.

SOUZA, M. B. de; GAMA, M. A. P.; SILVA, F. T. Mostra de vídeos digitais produzidos na escola pública. In: **XVI Semana da Matemática: Matemática – desafios e perspectivas pós-pandemia**, 2022.

SOUZA, M. B. de; REIS, D. R. Uso de tecnologia digital no estágio supervisionado em Matemática. In: **V Encontro de Práticas Educativas Digitais** (Híbrido), 2022, Natal. V Encontro de Práticas Educativas Digitais (Híbrido), 2022.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA - UFRR. **Pró-reitoria de Assuntos Estudantis e Extensão**. Edital n.º 015/2010 - PROEX/CAPACITAÇÃO EAD, 2010.

10

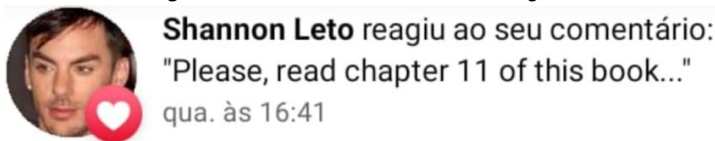
THIRTY SECONDS TO MARS IN MATHEMATICS EDUCATION

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva
Monize Bianca Prieto

Birth

A shorter version of this chapter was originally published by Scucuglia et al. (2019). Since then, we have shared it in various settings, including social media platforms frequented by fans of Thirty Seconds to Mars. For some time, we considered translating it into English and expanding the original chapter to disseminate new exploratory research findings regarding Thirty Seconds to Mars in mathematics education, reaching a broader audience as well. Then, on December 21st, 2023, this happened (Figure 1):

Figure 1: Shannon Leto's reaction on Instagram.



Font: Personal collection of screens captured images of the authors.

We thus started the translating/extending enterprise right the way.

1. Introduction

Thirty Seconds to Mars is an American pop rock band founded in the late 1990's (see https://en.wikipedia.org/wiki/Thirty_Seconds_to_Mars). The band is led by Jared Leto, who is also a director, producer, and film actor, having won the Academy Award for Best Supporting

Actor in 2014 for his role as Rayon in *Dallas Buyers Club* (Vallee, 2013). In 2023, the band released their sixth album. The complete discography is as follows (Figure 2):

- 30 Seconds to Mars (Leto, 2002);
- *A Beutiful Lie* (Leto, 2005);
- *This is War* (Leto, 2009a);
- *Love, Lust, Faith and Dreams* (Leto, 2013);
- *America* (LETO, 2018);
- *It's The End of The World But it's a Beautiful Day* (Leto, 2023).

Figure 2: Thirty Seconds to Mars' albums.



Font: Personal collection of the authors.

Over the years, the band's musical and audiovisual productions have incorporated various symbols and 'enigmas,' including subliminal messages, creating a fertile ground for exploring issues at the intersection of arts, mathematics, and technology. In this context, the aim of this text, which is the result of experimental research, is to explore problems that encourage the development of aesthetic mathematical experiences through elements associated with the band Thirty Seconds to Mars.

2. A Conception of Aesthetic Experience¹

On one hand, the Arts permeate various aspects of our work in mathematics education, infusing our teaching and research activities with an aesthetic dimension. On the other hand, it is not our intention here to delve deeply into the various conceptions of aesthetics in the history of philosophy. Generally speaking, the notion of aesthetic experience is associated with surprise, the sensory fullness of our perception, a kind of rare experience characterized by the visceral affective engagement with a given phenomenon (Sinclair, 2006).

An aesthetic experience can only be condensed into a moment, in the sense of a climax of previous long-term processes, if it culminates in an exceptional movement that encompasses everything else to the point where everything else is forgotten. What distinguishes an experience as aesthetic is the conversion of resistance and tensions, of explications that are temptations for digression, into a movement toward an inclusive and gratifying resolution (Dewey, 2010, p. 139).

®

The researcher approaches the classroom door of a public elementary school. The intention is to invite students to participate in a university extension or knowledge mobilization activity about creating mathematics videos. The teacher notices the researcher's approach.

Teacher: *You may come in, professor.*

Researcher (with great enthusiasm): *Excuse me. Hey, everyone! Who here likes math?*

Silence. Students are in shock.

Student at the back of the room: *Are you crazy, man? Don't you know how to approach a crowd? Get lost, dude.*

Student in the center of the room: *Well, professor, I think I like it. But I don't know what's happening. I understand what the teacher says, copy everything, and study at home. But when it comes to the test, I mess up; I always do poorly. My dad says math is super important, and I know it is. But since I study and still do poorly on the test, I don't know if I like it or not.*

¹ Please, see Scucuglia and Idem (2021): <https://www.editorafi.org/274estetica>

Student in the front row: *Hey, I don't know anything about math, but I get perfect scores on all the tests. I know which site the teacher gets the questions from, and I don't even need to copy them down for the test; I just look at my phone.*

Researcher: *I see... So, who here likes the internet?*

Student at the back of the room: *Now we're talking, bro! The internet is life, you know. Facebook, Insta. Girls taking selfies in front of mirrors. Sending nudes. You know what I'm saying? Online, everyone's over 18.*

Student in the center of the room: *So, professor. Everyone likes the internet, right? Who doesn't? But NASA should come study this school. When the internet works here, no teacher uses it. When the teacher wants to use it, the internet never works. Kind of a paradox. And there's no internet in my neighborhood. Sometimes, my dad gives me money to go to the internet café, but only if I do well on the math test. So... I think it is more like a conundrum.*

Student in the front row: *I love the internet. I download all the music for us to dance to here at school. We have a funk dance group in the class.*

Student at the back of the room: *See, bro? Who said there's no math in funk? Look here, the 'quadrado de oito' (square dance move). Is it a cube? I don't think so, because a cube has six sides, right?*

Student in the center of the room: *Six faces, dude.*

The researcher thinks: *If they want to participate in the video course, I'll suggest creating a music video about hypercube representations.*

Student at the back of the room: *Look here, man. Math from MC Pedrinho; sharp stuff, professor. The student's phone starts playing a song. The chorus says: "40% oral, 60 for you to sit."*

Female students get up from their desks and start dancing.

The researcher thinks: *If they want to participate in the video course, I'll suggest creating a music video about percentages, but within the school conduct guidelines. We'll probably end up discussing curricula transversal themes.*

Teacher (in a very stern tone): *Stop! Stop right now! What do you think this is? And you're there with that kind of indecent dancing. Wearing those short shorts. What do you think this is? Then you show up pregnant, and you don't know why. Making a baby and leaving it for your mother to raise is easy. I'd like to see you take care of it. Isn't that right, professor?*

The researcher closes his eyes; he knows he must respect the teacher's authority and autonomy in her classroom. He considers mentioning the emerging educational and pedagogical opportunities in this scenario.

Researcher: *My friend will answer that.*

Video: <https://youtu.be/H6Nq6QU93RQ>

*Quem sou eu para julgar se uma saia ou uma dança é indecente?
 Problema sério é gravidez de adolescente.
 Nunca fui, mas sei o que acontece em baile funk.
 Mas tenho amigo que já fez sexo até em roda punk.
 O problema, não ser do funk um grande admirador.
 É apenas gostar disso, e nem saber quem que é o Gabriel O Pensador*

*Who am I to judge whether a skirt or a dance is indecent?
 The serious problem is teenage pregnancy.
 I've never been, but I know what happens at funk parties.
 But I have a friend who's had sex even at a punk concert.
 The problem isn't being a big funk fan.
 It's just liking it and not even knowing who Gabriel O Pensador is*

®

It is possible to explore mathematically the things we enjoy most. We appreciate Thirty Seconds to Mars. What do your students enjoy most?

3. Thirty Seconds to M@th

3.1. From the Earth to Mars: What speed is required for an object to travel from Earth to Mars in 30 seconds?

- Average distance between Earth and Mars: 225 million km²
- Speed of light: approximately 300,000 km/s

Calculation:

1. Time taken by light to travel from Earth to Mars:

$$\text{Time} = \frac{\text{Distance}}{\text{Speed of Light}} = \frac{225,000,000 \text{ km}}{300,000 \text{ km/s}} = 750 \text{ seconds}$$

² The distance is approximately 225 million kilometers (140 million miles). However, the actual distance can range from about 54.6 million kilometers (33.9 million miles) when they are closest (called opposition) to as far as 401 million kilometers (249 million miles) when they are on opposite sides of the Sun.

Therefore, it takes light about 12.5 minutes to travel from Earth to Mars on average.

2. Required speed to cover the distance in 30 seconds:

$$\text{Required Speed} = \frac{\text{Distance}}{\text{Time}} = \frac{225,000,000 \text{ km}}{30 \text{ seconds}} = 7,500,000 \text{ km/s}$$

$$\text{Multiple of Speed of Light} = \frac{\text{Required Speed}}{\text{Speed of Light}} = \frac{7,500,000 \text{ km/s}}{300,000 \text{ km/s}} = 25$$

Answer: An object would need to travel at 25 times the speed of light to cover the range distance from Earth to Mars in 30 seconds.

Suggestion of task (retrospective): Calculate the time light takes to travel from Earth to Mars using both the closest and farthest distances between the two planets. Then, determine the required speed to travel from Earth to Mars in 30 seconds for both cases. Finally, calculate how many times this required speed exceeds the speed of light.

Δ

The following was created based on the use of ChatGPT4.0.

When considering a hypothetical journey from Earth to Mars, particularly if we are discussing a rocket rather than an object traveling at or above the speed of light, several key astronomical, physical, and mathematical variables must be taken into account. First, orbital mechanics play a crucial role in planning the journey. Both Earth and Mars follow elliptical orbits around the Sun, and the distance between them varies depending on their positions in their respective orbits. The shortest distance occurs during opposition, when Mars is closest to Earth. The most energy-

efficient path from Earth to Mars is a Hohmann transfer orbit, an elliptical orbit that tangentially touches the orbits of both Earth and Mars. This method, takes about 6-9 months to complete.

The timing of the launch is also critical, as planetary alignment must be considered. Mars and Earth align favorably for a transfer every 26 months, known as the synodic period. Launching at the wrong time could drastically increase the distance, time, and fuel required for the journey. Gravitational forces are another significant factor. Gravity assists, or slingshots, use the gravitational pull of celestial bodies, like the Moon or even other planets, to increase the rocket's velocity, reducing the fuel needed. However, escaping Earth's gravity well requires significant energy. The gravitational pull weakens as the rocket moves away from Earth but increases again as it approaches Mars, requiring careful calculations for deceleration and landing.

The choice of propulsion systems greatly influences the journey. Traditional chemical rockets are limited in the speed they can achieve due to the amount of fuel they can carry and burn. Advanced propulsion methods, such as ion drives, nuclear propulsion, or even hypothetical concepts like warp drives, could potentially offer faster travel times, but each comes with its own technical and physical challenges.

Relativistic effects, according to Einstein's theory of relativity, also need to be considered. As an object approaches the speed of light, its mass effectively becomes infinite, and it would require an infinite amount of energy to continue accelerating. This makes speeds faster than light theoretically impossible with our current understanding. Furthermore, at speeds approaching the speed of light, time dilation becomes significant, meaning time would pass more slowly for those aboard the rocket compared to those on Earth, which has implications for communication and mission planning.

Environmental hazards present additional challenges. Cosmic radiation from the Sun and other cosmic sources requires significant shielding to protect the spacecraft's occupants, especially over a long journey. Additionally, space debris poses a risk; at high velocities, even small particles could cause catastrophic damage to the spacecraft. Upon reaching Mars, the thin Martian atmosphere complicates landing. Unlike Earth, Mars' atmosphere doesn't provide as much atmospheric braking, and the thin atmosphere makes parachutes less effective, requiring the rocket to be equipped to handle both the entry and the landing. The landing site's terrain and Mars' surface conditions, such as dust storms, must also be considered to ensure a safe and accurate landing.

Life support systems must be robust enough to sustain the crew for the duration of the trip, which could last months or even years, depending on the propulsion system used. These systems need to maintain a habitable environment, including air, water, food, and waste management. Furthermore, the psychological challenges of long-duration space travel, including isolation and confinement, must be managed to ensure the crew's well-being. The mission's objectives and payload also impact the planning and execution of the journey. The mass of the payload, which could include scientific instruments, rovers, habitats, or return vehicles, directly affects the amount of fuel and the type of propulsion system required. The duration of the mission on Mars and the activities performed there determine how much equipment and supplies need to be transported.

From the perspective of mathematics education, these considerations provide a context for exploring applied mathematics. For instance, students could calculate the optimal launch window using synodic periods or determine the fuel requirements based on the rocket's mass and the gravitational forces involved. Additionally, the complexities of orbital mechanics, time dilation, and gravitational assists offer opportunities to

engage students in higher-level mathematical thinking, linking abstract concepts to real-world applications. In conclusion, traveling from Earth to Mars involves a complex interplay between physics, astronomy, and engineering, with mathematics. While achieving near-light speeds remains theoretical, understanding these variables is crucial for any realistic mission planning within our current technological limits, and it provides an opportunity to integrate mathematical education with real-world scientific challenges (Figure 3).

Figure 3: Representation with artificial intelligence



Font: Research data generated with Chat GPT: “Here is the artistic representation that encapsulates the concept of traveling from Earth to Mars in 30 seconds, integrating elements of mathematics, physics, and astronomy, along with highlights on mathematics education and visual references to the rock band Thirty Seconds to Mars. [It] blends futuristic science fiction with the edgy, modern style associated with the band”.

3.2 Glyphics (Figure 4): From the album *30 Seconds to Mars* (Leto, 2002). What do you think the following symbols mean? Construct the Glyphics in GeoGebra.

Figure 4: Glyphics

Font: <https://www.dafont.com/forum/attach/orig/1/0/101321.png>

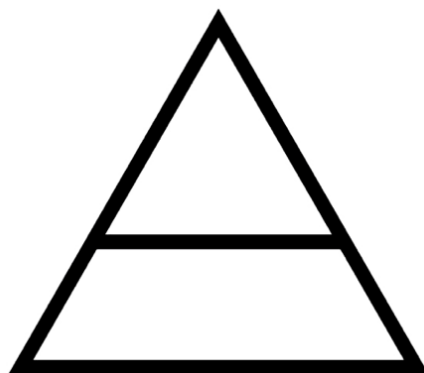
Using geometric transformations (e.g., reflections, symmetries, translations, rotations, etc.) and other 'properties' like contour lines, create the Glyphics based on the Secret Glyphics (Figure 5).

Figure 5: Secret Glyphics

Font: <https://i.pinimg.com/originals/ba/2c/22/ba2c22eb0c804548fd636ff6228e1d97.jpg>

Place the Secret Glyphics in a cube-shaped box. Take the box to the fourth dimension, transforming it into a hypercube. Bring the box back to our dimension, open it, and you will find the Glyphics. Challenge: What happened inside the box?

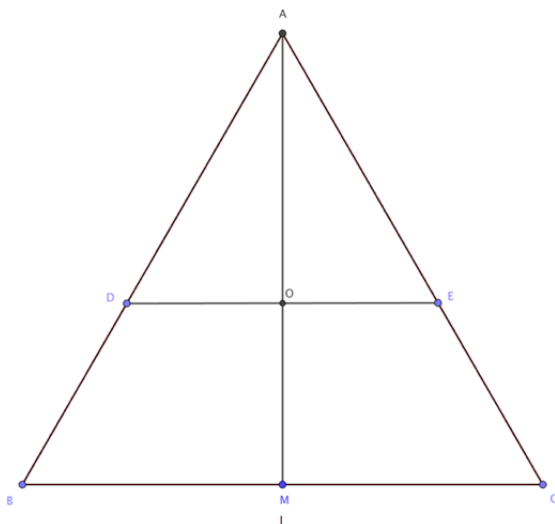
3.3 Triad (Figure 6): From the album “This is War” (Leto, 2009a).

Figure 6: Triad

Font: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fc/30stmTriad.jpg>

Let ABC be an equilateral triangle with a side length of l , and DE be a line segment inscribed parallel to the base of the triangle. Let AM be the height/median corresponding to the base of the triangle, and O be the intersection point between AM and DE . Construct this scenario in GeoGebra (Figure 7).

Figure 7: Triad constructed with GeoGebra



Font: Research data.

P_1 : If the area of triangle ADE is equal to the area of trapezoid $BDEC$, what is the length of segment AO in terms of l ?

$\triangle ABC \approx \triangle ADE$ (case AA).

Length of the segment $AM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Let a be the length of segment DE and x be the length of segment AO . Since the area of $\triangle ABC$ is double the area of $\triangle ADE$, we have:

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = \frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

As a result of the similarity of triangles, we have:

$$\frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} = l \cdot x \Rightarrow x = \frac{l\sqrt{6}}{4}.$$

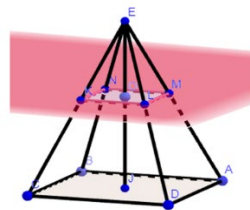
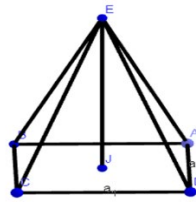
P₂: Let AO = OM: (a) What is the area of triangle ADE? (b) What is the area of trapezoid BDEC?

(a) Since $a = \frac{l}{2}$, the area of $\triangle ADE$ is $\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{16}$.

(b) Consequently, the area of trapezoid BDEC is $\frac{l^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{l^2 \sqrt{3}}{16} = \frac{3l^2 \sqrt{3}}{16}$.

3.4 Pyramids (Figure 8)

Figure 8: Pyramids



Font: *This is war*, videoclip (Cumbis, 2009) + Reresearch data generated with GeoGebra.

P₃: Let ABCDE be a regular quadrangular pyramid, as shown in Figure 7. Also, consider EJ as the height of the pyramid with a length of h . Determine the volume of the pyramid.

Consider

$$V_{pyr} = \frac{A_b \cdot h}{3}. \text{ We know that } A_b =$$

$$a^2. \text{ Consider the right triangle EJC. Thus, } h^2 + \frac{d^2}{2} =$$

a^2 , where $\frac{d^2}{2}$ is one half of the diagonal of the base ABCD. Then, $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Therefore, $V_{pyr} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

P₄: Let KLMN be a square defined by the intersection between the pyramid and a plane parallel to the base, and let O be the intersection point between KLMN and EJ. (a) If EO=OJEO=OJ, determine the volume of the pyramid EKL MN and the frustum of the pyramid ABCDKLMN. (b) Determine the length of EO such that the volume of the pyramid EKL MN is equal to that of the frustum ABCDKLMN.

(a) Once again, $V_{pyr} = \frac{A_b \cdot h}{3}$. In his case, $A_b = \frac{a^2}{4}$ and $h = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Thus, $V_{pyr} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$. Therefore, $V_{frustum} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} - \frac{a^3\sqrt{2}}{48} = \frac{7a^3\sqrt{2}}{48}$.

(b) Let l be the length of the segments KLMN and x be the length of the segment EO. Since the volume of ABCDE is double the volume of KLMNE, we have: $\frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{2l^3\sqrt{2}}{6} \rightarrow l = \frac{a^3\sqrt{4}}{2}$.

3.5 Convergent Series and Paradoxes

P₅: Construct the triad in GeoGebra (Vital, 2018). Consider the inscribed line segment to be dynamic (using a slider), “sliding from the base of the triangle to the opposite vertex.” Consider a point moving along the height of the triangle, starting from the vertex opposite the base and moving toward the midpoint of the base. Assume that the motion follows one of Zeno’s paradoxes, that is, according to the following

series: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Prove that this series is convergent.

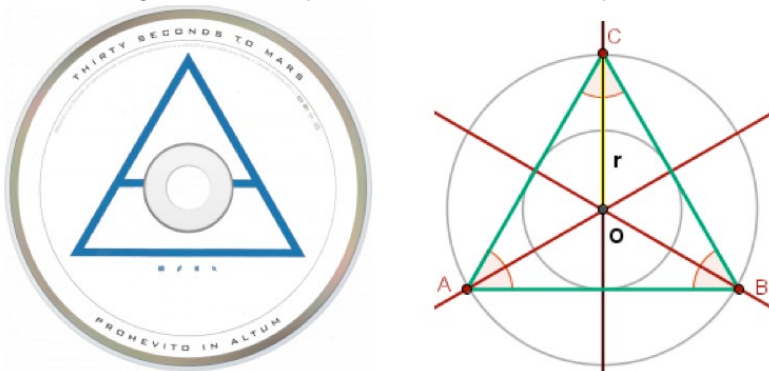
Prove that any geometric series under the following conditions is

convergent:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}, \text{ for } |r| < 1.$$

In the referred series, $a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. If we consider the sequence $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$, we may conjecture $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$, which brings us to the fundamental harmonics in music, that is, the genesis of the concept of music with the monochord in the Pythagorean school (Abdonour, 2005). Furthermore, as $\frac{2}{3} = 0,666\dots$, – a profane number? – if we consider in in Figure 6 the length of segment $AO = \frac{2}{3}$, we obtain a notable point of the equilateral triangle; probably one of the most significant points in all Euclidian geometry, which is the centroid, incenter, orthocenter, and circumcenter of the equilateral triangle (Figure 9).

Figure 9: Relationship between the Triad and notable points



Fonts: <https://i.stack.imgur.com/r3v4Z.gif>;

<https://fanart.tv/detailpreview/fanart/music/d8354b38-e942-4c89-ba93-29323432abc3/cdart/this-is-war-4e1cbf31e65d4.png>

↑ **Provehito in Altum** (Figure 10). To launch oneself towards the heights, to seek the infinite. A ritualistic demonstration in a higher state?

Figure 10: Provehito in Altum

Font: http://3.bp.blogspot.com/-ltbKtS2vtVU/TjCJUTaxS4I/AAAAAAAAAtI/OjC3fwMhPyc/s1600/1211250901_f%255B2%255D.jpg

The motto of Memorial University, *Provehito in Altum*, is well known, both in Newfoundland and away. It adorns the ceremonial arms of the university, inscribed upon a glowing scroll. It was featured on the masthead of the early issues of *The Muse* and in its pages ever after; it graced Memorial library's checkout cards; and it was so frequently invoked in early graduation speeches that it could incite burning annoyance. The motto is still a mainstay in convocation addresses, but it also inspired the Altum Society at MUN's School of Nursing and subtitles MUN's Strategic Research Intensity Plan, 2014-2020. It is found inscribed in various places around the university, in particular on the edge of its convocation table, and prominently (and very appropriately) in the deep recesses of MUN's intra-campus tunnels. The motto has also been adopted outside the university, most notably by the band Thirty Seconds to Mars, whence it seems to have inspired countless items of apparel, artwork, and even tattoos (Pollard, 2017, p. 227).

Figure 11 exhibits artistic representations created with ChatCPT4.0 on relations between Thirty Seconds to Mars and Zeno's paradoxes.

Figure 11: Arts on Mars and Zeno's paradoxes

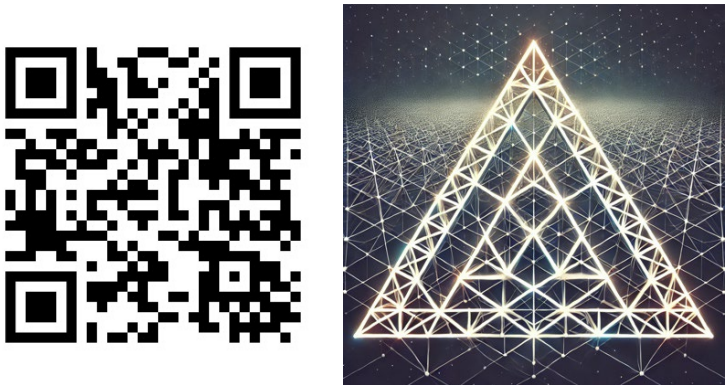


Font: Research data.

3.6. Fractals

Let $AO = \frac{1}{2}$ and construct a Sierpinski Triangle using GeoGebra. Construct a Sierpinski Tetrahedron using GeoGebra 3D (Barbosa, 2019) (see Figure 12).

Figure 12: Research and image on Fractals



Fonts: <https://www.geogebra.org/u/lara-barbosa>. and ChatGPT4: Combining the Triad symbol from Thirty Seconds to Mars with the Sierpinski Triangle fractal. It reflects the intricate, infinite depth of the fractal pattern while maintaining the geometric simplicity of the Triad symbol.

3.7 Jared Magnetic

In the performance of *The Kill* at the Rock Am Ring festival in 2010 (see <https://youtu.be/UDv4WrhrwqY>), Jared Leto joins the audience, transforming the spectators into “spect-actors” (Boal, 2009). In one of the most ecstatic moments of the performance, in an aerial shot, we have the following situation (Figure 13), where the people are moving towards Jared.

Figure 13: The Kill performed at Rock AM Ring, 2010

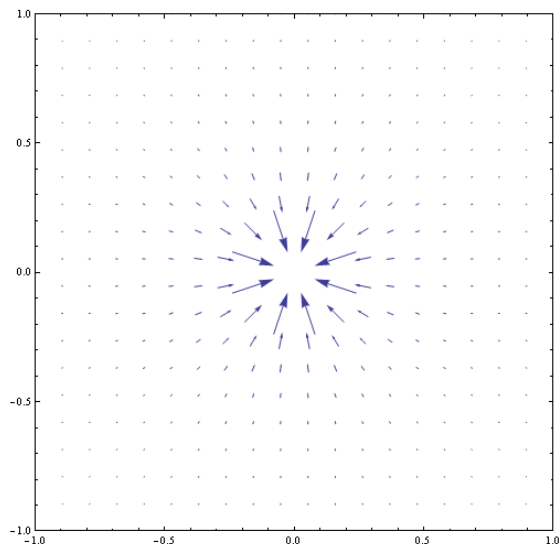


Font: <https://youtu.be/UDv4WrhrwqY>

In <https://mathematica.stackexchange.com/questions/37018/plotting-a-gravity-field>, we find an interesting discussion that elucidates a model for the mentioned phenomenon, created based on direction fields using the Mathematica software (Figure 14 and Figure 15)

Figure 14: Simulation with Mathematica

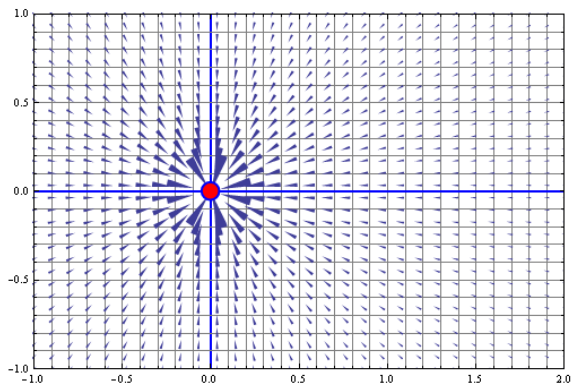
```
VectorPlot[-#/Norm[#]^3 &[{x, y}], {x, -1, 1}, {y, -1, 1},
VectorPoints -> 20, VectorScale -> .3,
RegionFunction -> (Norm[{#, #2}] > .1 &),
ImageSize -> 500, PlotRange -> 1]
```



Font: <https://mathematica.stackexchange.com/questions/37018/plotting-a-gravity-field>

Figura 15: Simulation with Mathematica

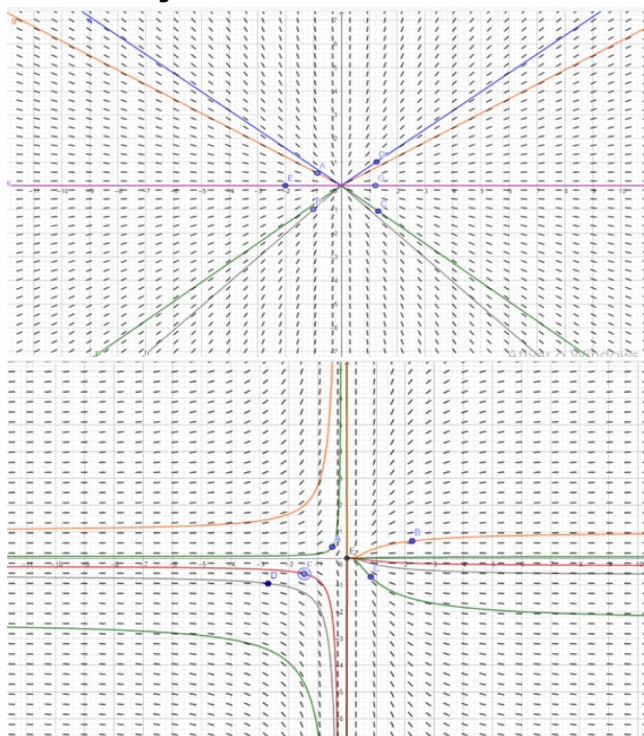
```
VectorPlot[-#/Norm[#]^3 &[{x, y}], {x, -1, 2}, {y, -1, 1}, VectorPoints -> 30,
VectorScale -> {.1, Automatic, (#5)^(1/3) &},
RegionFunction -> (Norm[{#, #2}] > .1 &), ImageSize -> 500,
PlotRange -> {{-1, 2}, {-1, 1}}, VectorStyle -> "Pointer",
GridLines -> ({#, #} &Join[Range[-1, 2, .1], {{0, Directive[Thick, Blue]}]}],
Epilog -> {EdgeForm[{Thick, Blue}], Red, Disk[{0, 0}, .05]},
AspectRatio -> Automatic]
```



Font: <https://mathematica.stackexchange.com/questions/37018/plotting-a-gravity-field>

Using the gravity formula, from the perspective of an ODE (ordinary differential equation), experiments were conducted using GeoGebra software to model the gravitational field. We obtained the following results (Figure 16):

Figure 16: Direction Fields with GeoGebra



Font: Research data.

Conundrum (Ricardo). Once, in a peak of euphoria³, I was convinced that I had proven a great mathematical theorem based on the album *Love Love Faith + Dreams*, while listening to and performing the song *Birth* and using the artwork from the album's booklet. I even stated the

³ It was a moment of pure euphoria, like Chris Cornell's *Euphoria Morning*.

idea as 'The Fractal Colors Conjecture.' One of its proofs involved concepts from Graph Theory (Four Color Theorem), Damien Hirst's aesthetics, color theory, fractal geometry (Sierpinski triangle and tetrahedron), and the convergence of geometric series in Real Analysis. After the euphoria passed, I easily convinced myself that it was just another offshoot of deceptive anxieties, another daydream...

***Analyst:** This type of anesthesia creates a false perception of productivity. I suggest filling your time with healthy activities that bring you pleasure—actions that make you feel fully alive, with your senses in complete space-time awareness. What do you truly enjoy?*

4. Love Lust Faith + Dreams

In *Up in the Air* (Cumbbis, 2013) (see <https://youtu.be/y9uSyICrtow>), there is an aesthetic dimension that explores colors, gestures, and movements. There are also subliminal messages. Between the 56th and 57th seconds of the short film, for example, more than 30 images are presented, many of them not consciously perceived by the audience. According to McLuhan (1964), the repetition of advertisements gradually establishes brands and products in the consumer's mind. 'Advertisements are not addressed to conscious consumption. They are like “subliminal pills” for the subconscious, with the aim of exerting a hypnotic spell' (McLuhan, 1964, p. 257). According to Key (1974), the main strategies in terms of subliminal messages are figure/ground reversal, embedding images, double meanings, tachistoscopic projection, low-intensity light, and background light and sound. Discussing “multimedia subliminal propaganda,” Calazans (2006) highlights emerging advances from research in this area involving the use of a device called a tachistoscope. These studies provide evidence that the

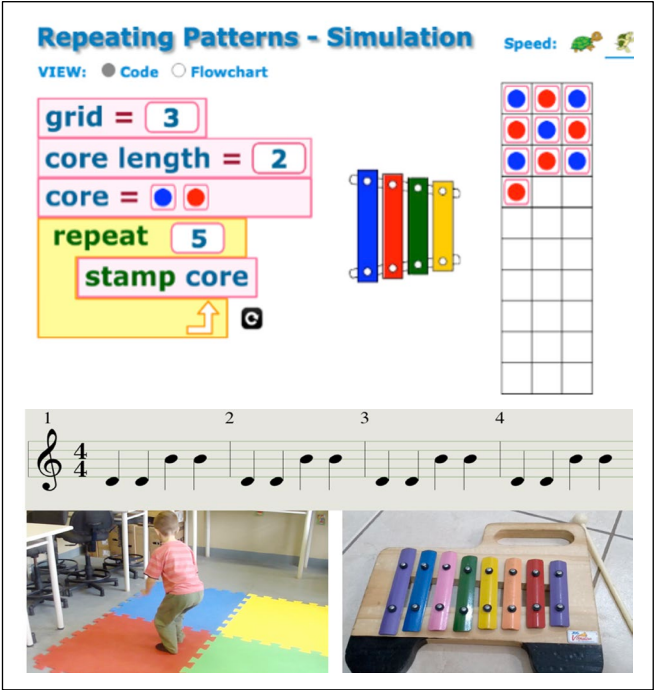
brain reacts to the presentation of images within 1/3000th of a second, which is the definition of subliminal in tachistoscopic terms.

How can we use subliminal messages in the production of videos for Mathematics Education? What would we hide in an educational video? Invitation: Scucuglia (2019) (see: <https://youtu.be/dTs2j62fYKI>). See Scucuglia (2024): https://www.youtube.com/watch?v=WN_RePIS8ZM

5. Hurricane

For the International Society for Technology in Education (ISTE) and the American Computer Science Teachers Association (CSTA), computational thinking can be characterized by skills such as data collection, data analysis, data representation, problem decomposition, abstraction, algorithmization, automation, simulation, and parallelization (ISTE/CSTA, 2011). In one of our research activities, we engaged first and second-year elementary school students in exploring the application available at researchideas.ca/wmt/c2a0.html (Gadanidis, 2017). Essentially, they created patterns with color sequences and simulated their patterns using sounds (xylophone), colored pencils and paper strips, and dance on colorful mats. In this context, they explored connections between multiple representations involving different computational thinking skills (Figure 17).

Figure 17: Task om Computational thinking for kids



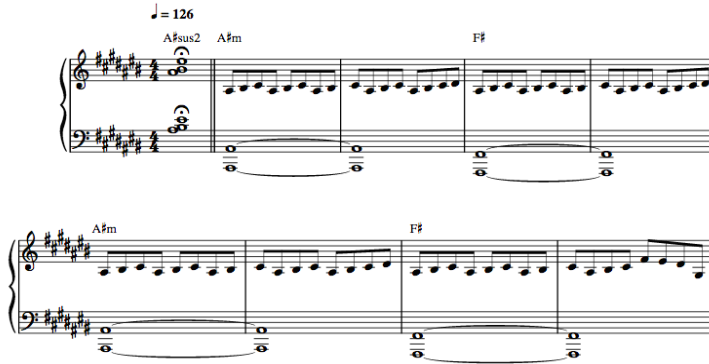
Font: Research data

Let us look at Figure 18. Which computational thinking skills can we explore with a musical score excerpt from the song *Hurricane* (LETO, 2009b)? Thinking musically $\approx$ Thinking mathematically $\approx$ Thinking computationally.

Figure 18: Excerpt from the score of Hurricane

HURRICANE

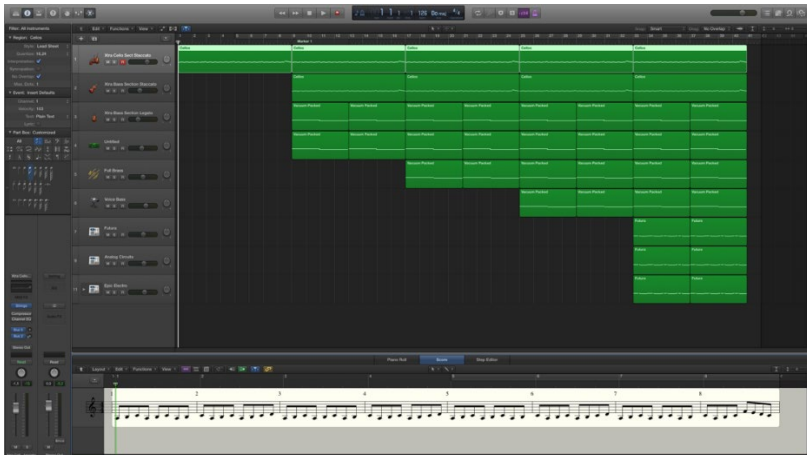
Words and Music by
JARED LETO



Font: <https://musescore.com/neoone/scores/3986606>

Problem decomposition, abstraction, algorithmization, automation, and simulation are skills that are present when we create this music excerpt using the software Logic Pro X (Figure 19).

Figure 19: Hurricane on Logic Pro



Font: research data

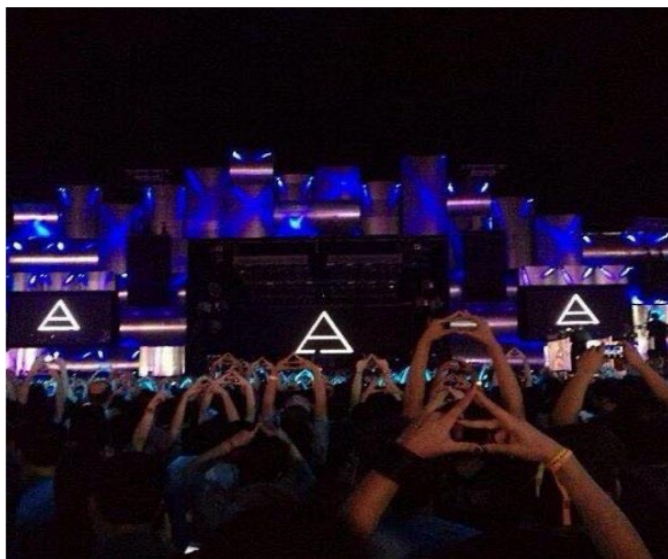
6. Concluding Remarks

The aim of this text is to foster the development of aesthetic mathematical experiences through the exploration of elements from the band Thirty Seconds to Mars. Readers are encouraged to draw other analogies with the band or with artists/genres of their choice. The overall proposal is to explore the arts-technology interface in Mathematics Education, seeking creative possibilities for engagement in math classrooms where students are in a "certain state of anesthesia" and can experience mathematics through all their senses, perceiving mathematical practices as a pedagogical, social, cultural, and therefore, human engagement.

Word, image, and sound, which today are channels of oppression, must be used by the oppressed as forms of rebellion and action, not passive, absorbed contemplation. It is not enough to consume culture: it is necessary to produce it. It is not enough to enjoy art: it is necessary to be an artist! It is not enough to produce ideas: it is necessary to transform them into concrete and sustained social actions. At some point, I wrote that to be human is to be theater. I must expand the concept: to be human is to be an artist! Art and aesthetics are instruments of liberation (Boal, 2009, p. 19).

0. A Dreamed Math Class (Alternate public image – Figure 20)

Figure 20: Mars'concert – Rock in Rio 2013



Font: <https://br.pinterest.com/pin/44121271323857888/>

Acknowledgments: Brazilian National Council for Scientific and Technological Development (CNPq). Processes: 307278/2022-0 and 403790/2023-9.

References

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados**. 3^a. Ed. – São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

BARBOSA, Lara Martins. **Aspectos do Pensamento Computacional na Construção de Fractais com o Software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, 2019.

BOAL, A. *A estética do oprimido*. Rio de Janeiro: Garamond, 2009. 256 p.

CALAZANS, Flavio. **Propaganda subliminar multimídia**. São Paulo: Summus Editorial, 2006.

CUMBBIS, Bartholomew. **Artifact**. USA: FilmBuff, 2012.

CUMBBIS, Bartholomew. **Up in the Air**. USA: Virgin Records, 2013.

DEWEY, John. **Arte como experiência**. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

GADANIDIS, Gadandis. **Repeating patterns**. Disponível em: <http://researchideas.ca/wmt/c2a0.html> , 2017a.

ISTE/CSTA. **Computational Thinking Teacher Resource**. 2ed., 2011. <csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/472.11CTTeacherResources_2ed-SP-vF.pdf>.

KEY, Wilson Bryan. **Subliminal Seduction**. New York: New American Library, 1974.

LETO, Jared. **Debut**. Santa Monica, CA: Immortal Records, 2002.

LETO, Jared. **This is War**. USA: Virgin Records, 2009a.

LETO, Jared. Hurricane. In: LETO, Jared **This is War**. USA: Virgin Records, 2009b.

LETO, Jared. **Love Lust Faith + Dreams**. USA: Virgin Records, 2013.

LETO, Jared. **America**. USA: Universal Music, 2018.

LETO, Jared. **It's The End of The World But it's a Beautiful Day**. USA: Concord Records, 2023.

MCLUHAN, Marshall. **Understanding media: the extensions of man**. USA: Mentor book, 1964.

POLLARD, Richard Matthew. Provehito in Altum ("Launch out into the Deep"). **Newfoundland and Labrador Studies**, [S.l.], nov. 2014. 1715-1430.

SCUCUGLIA, Ricardo. **Surpreenda Matematicamente em 30s – Convite**. Disponível em: <https://youtu.be/dTs2j62fYKI>. 2019

SINCLAIR, Nathalie. **Mathematics and Beauty: Aesthetic Approaches to Teaching Children**. New York: Teachers College, 2006. 209 p.

VALLEE, Jean-Marc. ***Dallas Buyers Club***. Universal Pictures, 2013.

VITAL, Carla. **Performance Matemática Digital e GeoGebra**: possibilidade artístico-tecnológica em Educação Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, 2018.

SOBRE OS AUTORES

Adriana Kuehn

Possui graduação em Engenharia Civil pela Fundação Universidade Regional de Blumenau (1996), graduação em Matemática pela Fundação Universidade Regional de Blumenau (2008) e mestrado em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Santa Catarina (2000). Professora efetiva da Fundação Universidade Regional de Blumenau na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Tem experiência na área de Engenharia Civil, com ênfase em Estruturas, e em Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: cálculo diferencial e integral, álgebra, estatística, matemática, ensino de engenharia, linguagem matemática, CTS e interdisciplinaridade.

Aldo Lopes

Professor Associado da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), campus de Itabira, MG, desde 2010. Possui graduação em Matemática (2006), mestrado em Matemática (2009) e doutorado em Matemática (2013) pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Possui também mestrado em Educação Matemática (2020) pela Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Realizou o pós-doc de verão no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) no Rio de Janeiro (2020) e possui pós-doc em Educação Matemática pela UFOP (2022). Tem experiência com o ensino de graduação na área de Matemática para cursos de Engenharia e interesse de pesquisa nas áreas de Geometria e Equações Diferenciais Parciais, atuando principalmente nos seguintes temas: Geometria Diferencial, Análise Geométrica, Auto-Calibração de Câmeras. Tem, ainda, interesse de pesquisa na área de Modelagem Matemática no Ensino Superior. Atualmente, integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática no Ensino Superior (GEPEMES), certificado no CNPq, que reúne professores-pesquisadores da UFOP e UNIFEI. E-mail: aldoelopes@hotmail.com

Amanda Queiroz Moura

Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Professora Assistente Doutora do Departamento de Matemática da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS/Unesp. Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos da UNESP. Integrante do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Inclusão - Épura. e-mail: amanda.moura@unesp.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9472-3773>

Daise Lago P. Souto

Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Professora Adjunta Doutora do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas. Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PPGECM/UNEMAT e do Programa de Pós-Graduação da Rede REAMEC. Coordenadora do Grupo Estudos e Pesquisa em Ensino e Tecnologias Digitais - GEPETD. e-mail: daise@unemat.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6832-6099>

Douglas Matheus Gavioli Dias

Doutor em Educação para Ciência e Matemática (UNESP) e Mestre em Ensino e Processos Formativos, Universidade Estadual Paulista (UNESP). Formado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Ilha Solteira. Docente da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Correio Eletrônico: douglas.dias@unesp.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8558-9066>

Edileusa do Socorro Valente Belo

Professora na Universidade Federal de Roraima. Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (2018). Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (2012). Graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2002). Tem experiência na área de Educação Superior, atuando principalmente nos seguintes temas: Estágio; formação de professores, ensino-aprendizagem de matemática, docência no ensino superior e pesquisa narrativa. Correio eletrônico: edileusa.belo@ufrb.br. <http://lattes.cnpq.br/4891194817871655>. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6721-9056>

Felipe Wanderherz

Aluno do curso técnico integrado em Informática do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC) Câmpus Gaspar. Bolsista do edital 01/2023/PROPI/PIBIC-EM.

Giovana Aparecida Bertolucci

Mestre em Ensino e Processos Formativos, Universidade Estadual Paulista (UNESP). Membro do Grupo de Pesquisa Formação de Professores e Ensino de Matemática da UNESP de Ilha Solteira. Docente da Secretaria Municipal de Educação do Município de Novo Horizonte, SP. Correio Eletrônico: giovana.aparecida@unesp.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6942-4993>

Inocência Fernandes Balieiro Filho

Doutor em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista (UNESP). Professor do Departamento de Matemática da UNESP. Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos da UNESP. Membro do Grupo de Pesquisa Formação de Professores e Ensino de Matemática da UNESP. Correio eletrônico: inocencia.balieiro@unesp.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4012-959X>

José Fernandes T. Cunha

Professor da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas (Facet) da Universidade do Estado de Mato Grosso (Unemat), campus de Barra do Bugres MT. Atua como docente no curso de Ciência da Computação e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM) da Unemat. Possui graduação em Ciência da Computação pela Unemat. Especialização em Gestão Organizacional e Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pela Unemat. Doutorado em Educação em Ciências e Matemática pela Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (Reamec)/UFMT. É um dos líderes do Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino com Tecnologias Digitais GEPETD da Unemat. Pesquisador associado ao Grupo de Pesquisa em Informática Outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM, Unesp). Atualmente exerce a função de Diretor de Programas e Projetos vinculado à Pró-reitoria de Extensão e Cultura da Unemat. E-mail: fernandestorres@gmail.com

José Ivanildo de Lima

Doutor em Educação em Ciências e Matemática/UFMT-REAMEC (2017). Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto de Educação Matemática e Científica/UFPa (2008). Pesquisa História da Educação Matemática e a Formação de Professores em Roraima e na Amazônia. É Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Roraima (2000) na qual é professor do Departamento de Matemática desde 2010, atuando na área de Educação Matemática. Correio eletrônico: jivalima@gmail.com. <http://lattes.cnpq.br/7793642014999905>.

Maewa Martina Gomes da Silva e Souza

Professora Assistente junto ao Departamento de Educação e Desenvolvimento Humano da Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Filosofia e Ciências (FFC), Campus de Marília/SP. Pedagoga com habilitação em Deficiência Intelectual, Psicopedagoga Clínica e Institucional (INDEP), Especialista em Atendimento Educacional Especializado, Mestre e

Doutora na linha de Educação Especial pela Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Filosofia e Ciências (FFC), Campus de Marília/SP. Membro do Grupo de Pesquisa “Diferença, Desvio e Estigma”. E-mail: maewa.martina@unesp.br
<http://lattes.cnpq.br/3354301214646268>. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4322-3100>.

Marcelo Batista de Souza

Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas, mestre em Informática pelo Instituto de Computação da Universidade Federal do Amazonas e doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Atualmente é professor de magistério superior da Universidade Federal de Roraima (Associado I), lotado no Departamento de Matemática. Trabalha nas áreas de Informática na Educação, Educação Matemática e Educação a Distância. Explora ambientes virtuais de aprendizagem, protótipos digitais, softwares educacionais e programação computacional, assim como desenvolve atividades que envolvem algoritmos, matemática e produção de vídeos. <http://lattes.cnpq.br/2044002660241616>. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2397-5399>.

Michele Mara Pires Ramos Betti

Professora da Rede Estadual de Minas Gerais, possui Graduação em Tecnologia da Construção Civil (UNICAMP), Licenciatura em História (UNOPAR), Licenciatura em Matemática (UNIFRAN) e Pedagogia (UNIFRAN). Especialista em Educação Especial (FaSouza) e Gestão Escolar (UNOPAR). Mestranda na linha de Pesquisa em Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos (PPGEPP/Unesp). <https://lattes.cnpq.br/9692307855084420>.

Monize Bianca Prieto

Licencianda em Matemática pelo Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE) da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP,) Campus de São José do Rio Preto, SP. E-mail: monize.bianca@unesp.br.

Nathália Dolberth

Aluna do curso técnico integrado em Química do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC) Câmpus Gaspar. Bolsista do edital 01/2023/PROPP/PIBIC-EM.

Paulo Sérgio Teixeira do Prado

Pedagogo e mestre em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), doutor em Psicologia Experimental pela Universidade de São Paulo (USP) com pós-doutorado em Psicologia pela UFSCar. Atua como docente junto ao curso de Pedagogia da Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Marília e é credenciado no Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos (PPGEFP) (interunidades) da mesma universidade. <https://lattes.cnpq.br/5560576962648816>. <https://orcid.org/0000-0002-2246-5226>.

Ricardo Mendes Grande

Matemático, mestre em física-matemática, doutor em filosofia (com concentração em lógica e filosofia da matemática) com pós-doutorado em filosofia da física quântica. Possui trabalhos na área de filosofia da física quântica, filosofia da matemática e conhecimento simbólico. Autor de “O Símbolo e a realidade” (Editora Fi) com coautoria de Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva. E-mail: rekdinhoapoetico@gmail.com. <http://lattes.cnpq.br/9084231250125679>.

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

Doutor em Educação pela Western University. Professor Associado (Livre-Docente em Educação Matemática) do Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Campus de São José do Rio Preto, SP. Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos da UNESP e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP. Integrante do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM). E-mail: ricardo.scucuglia@unesp.br.

Vanessa Oechsler

Possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Regional de Blumenau (2008), Especialização em Formação de Professores pela Universidade Federal de Santa Catarina (2011), Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática pela Universidade Regional de Blumenau (2012), Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2018). Atualmente é professora de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina (IFSC), Câmpus Gaspar, atuando no nível técnico, tecnológico e formação de professores. Desenvolve pesquisa na área de Formação de Professores, Tecnologias e Educação, Práticas Pedagógicas, Metodologias Ativas e Educação Matemática Crítica.



A Editora Fi é especializada na editoração, publicação e divulgação de produção e pesquisa científica/acadêmica das ciências humanas, distribuída exclusivamente sob acesso aberto, com parceria das mais diversas instituições de ensino superior no Brasil e exterior, assim como monografias, dissertações, teses, tal como coletâneas de grupos de pesquisa e anais de eventos.

Conheça nosso catálogo e siga as nossas páginas nas principais redes sociais para acompanhar novos lançamentos e eventos.



www.editorafi.org
contato@editorafi.org

Composto por dez capítulos, este livro apresenta um panorama rico e diverso sobre o ensino da Matemática, aliando inovação e criticidade que refletem as tendências contemporâneas da área. Sob a lente da educação matemática crítica, a inclusão educacional se revela como um princípio essencial. Práticas pedagógicas inclusivas e adaptativas são não apenas uma questão de justiça social, mas também ferramentas para transformar a sala de aula em um espaço de crescimento mútuo e valorização da diversidade. Ferramentas como a inteligência artificial e o uso de vídeos pedagógicos têm ampliado as possibilidades de personalização e engajamento no ensino. Estas tecnologias desafiam educadores a reimaginar práticas, integrando criatividade e inovação para promover aprendizagens mais significativas. A filosofia da matemática e da educação matemática, ao questionar pressupostos epistemológicos e pedagógicos, convida os educadores a repensar suas práticas. Ensinar matemática, portanto, vai além da transmissão de conteúdos: é um ato de mediação que conecta o saber abstrato às vivências concretas dos estudantes, transformando o ensino em um diálogo significativo com o mundo. Explorar a criatividade no ensino da Matemática significa transcender o convencional. Seja ao conectar conteúdos matemáticos à arte, à música ou à cultura, como no caso do uso de saberes indígenas ou da banda Thirty Seconds to Mars, este livro propõe inspirar educadores e alunos a encontrar beleza e significado no raciocínio matemático. Cada capítulo é uma peça de um quebra-cabeça maior: o de uma educação matemática mais humana, inclusiva e conectada às demandas do século XXI. Que esta jornada de descobertas inspire práticas pedagógicas transformadoras e amplie os horizontes do ensino.



Programa de
Pós-Graduação em
**Ensino e
Processos
Formativos
Interinidades**



editora **fi**.org

