MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Instrumentação para Pesquisa Prática de Ensino de Matemática II

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
Henrique Mongelli

Campo Grande, MS - 2009

EDITORA UFMS

MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Disciplina

INSTRUMENTAÇÃO PARA PESQUISA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA II

Campo Grande, MS - 2009

EDITORA UFMS

Este trabalho está licenciado com uma Licença Creative Commons - Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional.

Sobre as Autores

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli é professora do Departamento de Matemática da UFMS - CCET e mestre em Educação pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Desde a graduação trabalha com a capacitação de professores da Rede Municipal e Estadual do Mato Grosso do Sul oferecendo cursos relativos a Conteúdos e Metodologia de Matemática, palestras e oficinas pedagógicas. Na Educação a Distância trabalha deste 2001, atuando como professora da disciplina "Conteúdos e Metodologias para as Séries Iniciais do Ensino Fundamental" para o Curso de Pedagogia – Modalidade a Distância. Coordena os Curso de Licenciatura em Matemática – Modalidade a Distância nos Pólos de: Água Clara; Camapuã; Cruzeiro do Oeste; Igarapava; Rio Brilhante; São Gabriel do Oeste e Siqueira Campos.

Henrique Mongelli possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (1989), mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade de São Paulo (1995) e doutorado em Ciências da Computação pela Universidade de São Paulo (2000). Atualmente é professor associado da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Tem experiência na área de Ciência da Computação, com ênfase em Teoria da Computação, atuando principalmente na área de algoritmos paralelos e distribuídos.

Revisão: Sheila Mara Pessini Godinho

INTRODUÇÃO

Neste material, vamos estudar os conteúdos da sexta à nona série do Ensino Fundamental. Inicialmente veremos que a construção do sistema numérico deu origem a conjuntos de referência cada vez mais amplos, C, R, Q, Z, N, cada um deles contendo o seguinte.

N - números naturais
Z - números inteiros
Q - números racionais
R - números reais
C - números complexos

Alguns desses conjuntos foram estudados em disciplinas do ano anterior. Sugerimos que faça uma pesquisa sobre os números inteiros, os números racionais e os números reais. Não é necessário se aprofundar. Revisaremos conceitos como: expressões algébricas, polinômios, potenciação, radiciação, fatoração, múltiplos e seus divisores, álgebra e funções elementares.

Estes conceitos são fundamentais para a formação do professor de Matemática. No texto procuraremos discutir conteúdo, metodologias e sua aplicação no dia-a-dia. Este material é uma referência e que literaturas complementares deve ser procuradas.

SUMÁRIO

MÓDULO 1

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

CAPÍTULO I

1 Potenciação 15

Casos Particulares 18
Propriedades 20
Potencias de base 10 24

CAPÍTULO II

2 Radiciação 26

Introdução 26
Quadrado perfeito 29
Análise do índice do radical 29
Cálculo da raiz quadrada exata por decomposição 31
Potenciação de radicais 34
Divisão de radicais 35
Simplificação de radicais 36
Racionalização de denominadores 38
Principais casos de racionalização 39
Potência com expoente racional 40
Propriedades das potências com expoentes racionais 41

MÓDULO 2

MÚLTIPLOS

CAPÍTULO I

1 Introdução 45

Divisibilidade e Divisores 46
Crivo de Erastósteles 48
Reconhecimento de um número primo 50
Critérios de divisibilidade 51
Propriedades dos restos 58
Propriedades do produto dos restos 64

CAPÍTULO II

2 Mínimo Múltiplo Comum 67

MMC e a decomposição em fatores primos 67
1° Método - Processo da decomposição simultânea 68
2° Método - Árvore 69

CAPÍTULO III

3 Máximo Divisor Comum 72

Encontrando os divisores de um número - método 72
Encontrando a quantidade de divisores de um número 74

Referências 77

MÓDULO 3

POLINÔMIOS

CAPÍTULO I

1 Introdução 81

Monômio 81
Operações com monômios 83
Multiplicação de monômios 84
Divisão de monômios 85

CAPÍTULO II

2 Polinômio 88

Definição 89
Grau de um polinômio 90
Valor numérico 90
Polinômios iguais 91
Adição e subtração de polinômios 92
Multiplicação e divisão de polinômios 93
Teorema do resto 96
Teorema de D'Alembert 96
O Dispositivo de Briot-Ruffini 99
Decomposição de um polinômio em fatores 100

CAPÍTULO III

3 Fatoração 102

MÓDULO 4

ÁLGEBRA

CAPÍTULO I

1 Equações, inequações e sistemas 113

Sentenças matemáticas 113
Igualdades 118
Equação 119
Equação Algébrica 120
Equação do primeiro grau 120
Operações válidas 121
Redução de uma equação do 1° grau à forma ax + b = 0 122
Raiz de uma equação do primeiro grau 122
Aplicações da equação do primeiro grau 126

CAPÍTULO II

2 Inequação do primeiro grau 130

Propriedades de uma desigualdade 130

CAPÍTULO III

3 Sistemas lineares de equações do primeiro grau 135

Resolução do sistema linear de quações do 1° grau 135
Método da substituição 135
Método da adição 137
Método da comparação 138
Soluções através de gráficos 140
Sistemas indeterminados e sistemas impossíveis 144

CAPÍTULO IV
4 Equação do segundo grau 147

Raiz de uma equação do segundo grau 148
Como resolver uma equação do segundo grau 148
Equação completa do segundo grau 152
Equação incompleta do segundo grau 153
Resolução de equações incompletas do 2° grau 153
Equações frácionárias do segundo grau 155
Resolução de equações fracionárias do 2° grau 155

CAPÍTULO V
5 Equações bi-quadradas 158

CAPÍTULO VI
6 Equações irracionais 160

CAPÍTULO VII
7 Inequações do segundo grau 167

Resolução de uma inequação do segundo grau 167
Inequação produto 170
Inequação quociente 174

CAPÍTULO VIII
8 Sistema linear de equações do segundo grau 179

Resolução do sistema linear de equações do 2° grau 179

Aplicações 180

MÓDULO 5

FUNÇÃO

CAPÍTULO I

1 Introdução à noção de função 189

Representação cartesiana 190
Definição de função do primeiro grau 192
Zeros ou raízes da equação do primeiro grau 192
Gráficos da função do primeiro grau 192
Aplicação da função do primeiro grau 194
Definição da função constante 199
Gráfico da função constante 199
Definição da função do 1° grau tipo f(x) = ax 200
Zero ou raiz da equação linear 200
Gráfico da função linear 200
Definição de função crescente ou decrescente 202
Gráfico da função crescente e decrescente 202

CAPÍTULO II

2 Definição de função quadrática 205

Concavidade da parábola 205
Vértice da parábola 206
Zeros ou raízes da equação quadrática 207
Interseção com os eixos coordenados 207
Gráficos da função quadrática 208
Estudo do sinal 209

Aplicações da função do segundo grau 211

MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Disciplina

INSTRUMENTAÇÃO PARA PESQUISA
E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA II

Módulo 1

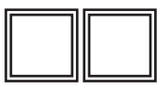
POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

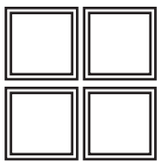
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
Heloisa Laura Queiroz Gonçalves da Costa
Henrique Mongelli

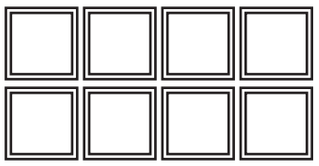
Capítulo I

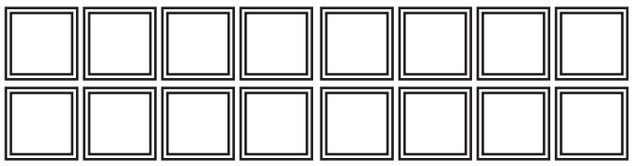
POTENCIAÇÃO

Observe a seqüência de quadradinhos dados a seguir.

1ª 

2ª 

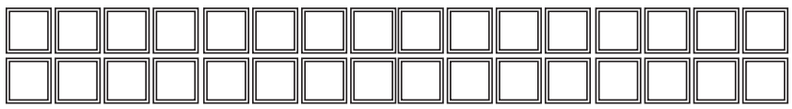
3ª 

4ª 

Podemos perceber que a quantidade de quadradinhos **duplica** de uma figura para outra, ou seja, temos

2 quadradinhos na primeira figura
2 x 2 quadradinhos na segunda figura
2 x 4 quadradinhos na terceira figura
2 x 8 quadradinhos na quarta figura

Como poderia ser representada a próxima figura?

5ª 

Nesta figura, temos 2 x 16 quadradinhos.

A partir da segunda figura, sabemos que a quantidade de quadradinhos de cada figura pode estar relacionada a uma multiplicação de fatores iguais, ou seja, podemos reescrever a quantidade de quadradinhos presentes em cada figura da seguinte forma:

2 quadradinhos na primeira figura
2 x 2 = 4 quadradinhos na segunda figura
2 x 2 x 2 = 8 quadradinhos na terceira figura
2 x 2 x 2 x 2 = 16 quadradinhos na quarta figura
2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32 quadradinhos na quinta figura

Nesse caso, essa multiplicação pode ser escrita na forma de potência, como dado a seguir.

$\mathbf{2^1}$ quadradinhos na primeira figura
2 x 2 = $\mathbf{2^2}$ = 4 quadradinhos na segunda figura
2 x 2 x 2 = $\mathbf{2^3}$ = 8 quadradinhos na terceira figura
2 x 2 x 2 x 2 = $\mathbf{2^4}$ = 16 quadradinhos na quarta figura
2 x 2 x 2 x 2 x 2 = $\mathbf{2^5}$ = 32 quadradinhos na quinta figura

Na segunda figura, a escrita 2 x 2 = 2^2, podemos dizer que 2^2 é uma maneira de reescrevermos a multiplicação de 2 por 2, o que facilita muito os cálculos e a escrita. Pense como seria difícil escrever o 2 sendo multiplicado 100 vezes. Com essa nova escrita representamos simplesmente 2^{100}.

Agora, observemos as multiplicações indicadas a seguir.

5 . 5 . 5 = 25 . 5 = 125
3 . 3 . 3 . 3 = 9 . 3 . 3 = 27 .3 = 81
2 . 2 . 2 . 2 = 4 .2 . 2 = 8 . 2 = 16

Na primeira linha do quadro anterior efetuamos a multiplicação de fatores iguais a cinco. Temos o cinco sendo multiplicado por ele mesmo 3 vezes. Assim esta multiplicação pode ser indicada como a seguir.

$$5 . 5 . 5 = 5^3 = 125$$

Escrevemos o fator 5 uma vez e, ao lado direito deste e um pouco acima do fator 5, escrevemos o número (no caso, 3) que representa o número de vezes que o fator está se repetindo. Lê-se: **"cinco elevado a três é igual a cento e vinte e cinco"** ou **"cinco elevado a terceira potência é igual a cento e vinte e cinco".**

Na segunda linha e na última linha do quadro anterior, estas multiplicações podem ser indicadas como a seguir.

$$3 . 3 . 3 . 3 = 3^4 = 81$$

e

$$2 . 2 . 2 . 2 = 2^4 = 16$$

Podemos definir potência como sendo um produto de fatores iguais.

$$a^n = \underbrace{a . a \ldots a}_{\text{n fatores}}$$

O número real a é chamado de **base da potência** e o número natural n é chamado **expoente da potência**.

A **base da potência** é o fator que se repete e o **expoente da potência** é o número de vezes que o fator se repete.

Observe que:

• dada uma multiplicação de fatores iguais podemos transformá-la numa potenciação.

$2 . 2 . 2 = 2^3$

• dada uma potenciação, podemos transformá-la em uma multiplicação de fatores iguais.

$2^2 = 2 . 2$

Potenciação é a operação.
Potência é o resultado.

Casos particulares

1. Toda potência de base 1 é igual a 1.
Exemplos.

a) $1^1 = 1$ b) $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$ c) $1^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

A potência, nesse caso, é um, isto porque a potenciação é um caso particular da multiplicação, e o número um é o elemento neutro da multiplicação.

2. Toda potência de base 0 é igual a zero (expoente diferente de zero).
Exemplos.

a) $0^1 = 0$ b) $0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$ c) $0^5 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$

3. Toda potência de expoente 1 é igual à base.
Exemplos.

a) $2^1 = 2$ b) $5^1 = 5$ c) $100^1 = 100$

Situação 1.
Consideremos $5^4 = 5 . 5 . 5 . 5$ e $5^3 = 5 . 5 . 5$, vamos calcular $5^4 / 5^3$.

$$\frac{5^4}{5^3} = \frac{5.5.5.5}{5.5.5} = 5.\frac{5}{5}.\frac{5}{5}.\frac{5}{5} = 5.1.1.1 = 5 = 5^{4-3} = 5^1$$

Observamos que $5^1 = 5$. Portanto, **todo número elevado a um dá ele mesmo.**

3. Toda potência de expoente 0 é igual a 1.
Exemplos.

a) $2^0 = 1$ b) $5^0 = 1$ c) $100^0 = 1$

Situação 1.
Consideremos $5^4 = 5 . 5 . 5 . 5$ e $5^4 = 5 . 5 . 5 . 5$, vamos calcular $5^4 / 5^4$. Sabemos que $5 / 5 = 1$

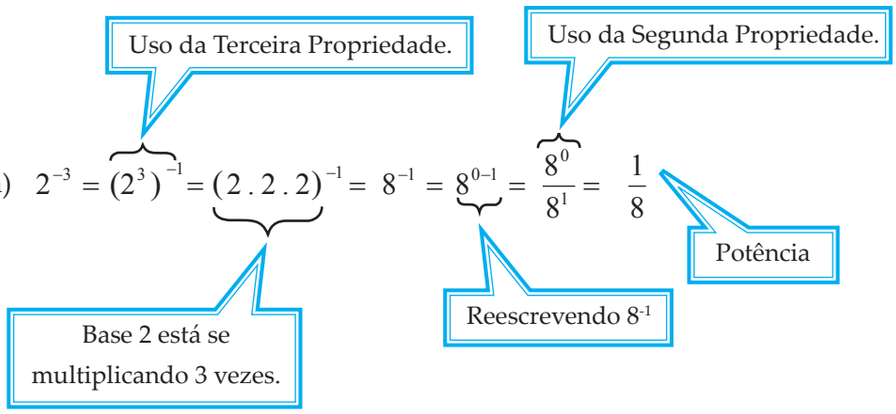
$$\frac{5^4}{5^4} = \frac{5.5.5.5}{5.5.5.5} = \frac{5}{5}.\frac{5}{5}.\frac{5}{5}.\frac{5}{5} = 1.1.1.1.1 = 1 = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

Observamos que $5^0 = 1$. Portanto, **todo número elevado a 0 dá 1.**

4. Toda potência de expoente negativo é igual ao inverso da potência de expoente positivo.

($a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, a número real e diferentes de zero, com n inteiro)

Neste caso, para chegarmos ao resultado de que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, a ≠ 0 precisamos de algumas das propriedades que serão apresentadas a seguir.



b) $10^{-1} = 0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$

c) $10^{-2} = 0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

d) $10^{-3} = 0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$

e) $2^{-1} = \frac{1}{2^1}$

f) $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

De fato, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, a≠0. Sabemos que $\frac{a^n}{a^n} = 1$ e $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$ com a ≠ 0 e que vale a propriedade $a^{-n} = a^{0-n}$, então $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0.$

Propriedades

Potências com a mesma base

Com o objetivo de facilitar as operações entre potências, empregam-se as propriedades dadas a seguir.

Para todo a, b real, a ≠ 0 valem

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^n$$

Vamos analisar cada uma dessas propriedades, para isso observe as situações a seguir.

PRIMEIRA PROPRIEDADE. Para multiplicar potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.

($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, a e b números reais e diferentes de zero, com m e n inteiros)

Base 2 está se multiplicando 3 vezes.

Base 2 está se multiplicando 3 vezes + 2 vezes, então está se multiplicando 5 vezes.

a) $2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{3+2} = 25$

Base 2 está se multiplicando 2 vezes.

c) $4^2 \cdot 4^2 = (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^2 \cdot 4^2 = 4^{2+2} = 4^4$

d) $7^2 \cdot 7^1 = (7 \cdot 7) \cdot 7 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^2 \cdot 7^1 = 7^{2+1} = 7^3$

De fato, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Vejamos

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ \ldots \ a}_{m \text{ vezes}} \ \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ \ldots \ a}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ \ldots \ a}_{m+n \text{ vezes}} = a^{m+n}$$

SEGUNDA PROPRIEDADE. Para dividir potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

($a^m : a^n = a^{m-n}$, a e b números reais e diferentes de zero, com m e n inteiros)

Base 2 está se multiplicando 2 vezes.

Base 2 está se multiplicando 3 vezes no numerador e 2 vezes no denominador.

a) $2^3 : 2^2 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{Base 2 está se multiplicando 3 vezes.}} : \overbrace{(2 \cdot 2)}^{\text{Base 2 está se multiplicando 2 vezes.}} = \overbrace{\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2}}^{\text{Base 2 está se multiplicando 3 vezes no numerador e 2 vezes no denominador.}} = 2$

Potência

Ou

$$2^3 : 2^2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 2^3 \cdot 2^{(-2)} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$$

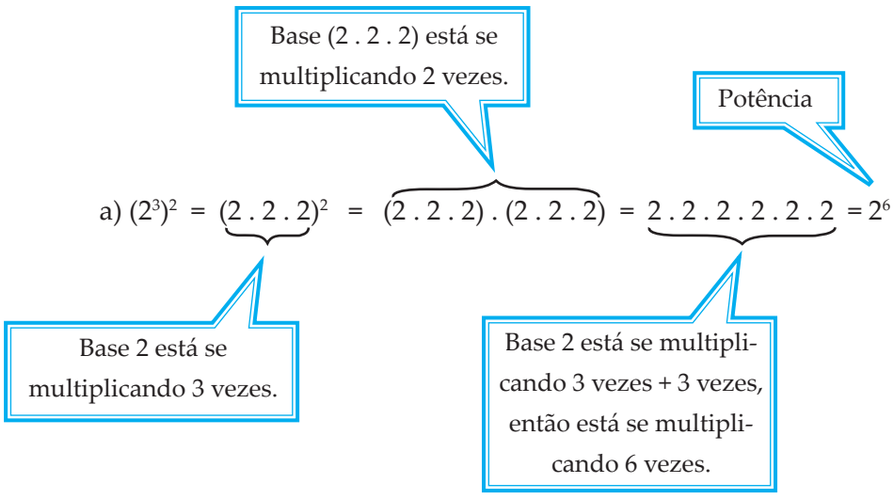
b) $4^2 : 4^2 = (4 \cdot 4) : (4 \cdot 4) = \frac{4 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{4^2}{4^2} = 4^{2-2} = 4^0 = 1$

c) $7^2 \cdot 7^1 = (7 \cdot 7) \cdot 7 = \frac{7 \cdot 7}{7} = \frac{7^2}{7} = 7^{2-1} = 7^1 = 7$

De fato, $a^m : a^n = a^{m-n}$. Vejamos

$$a^m \cdot a^n = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ \ldots \ a}_{m \text{ vezes}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ \ldots \ a}_{n \text{ vezes}}} = \frac{\overbrace{\frac{a}{a} \cdot \frac{a}{a} \cdot \frac{a}{a} \cdot \frac{a}{a} \ldots \frac{a}{a}}^{n \text{ vezes}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ \ldots \ a}_{n \text{ vezes}}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ \ldots \ a}^{m-n \text{ vezes}} = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ \ldots \ a}^{m-n \text{ vezes}} = a^{m-n}$$

TERCEIRA PROPRIEDADE. Para efetuar uma potência de potência, conservamos a base e subtraímos os expoentes.
($(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, a e b números reais e diferentes de zero, com m e n inteiros)



Ou,

$(2^3)^2 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 2^3 . 2^3 = 2^{3+3} = 2^6 = 2^{3 \cdot 2}$, pois $6 = 3 . 2$.

b) $(4^5)^2 = 4^{5 \cdot 2} = 4^{10}$

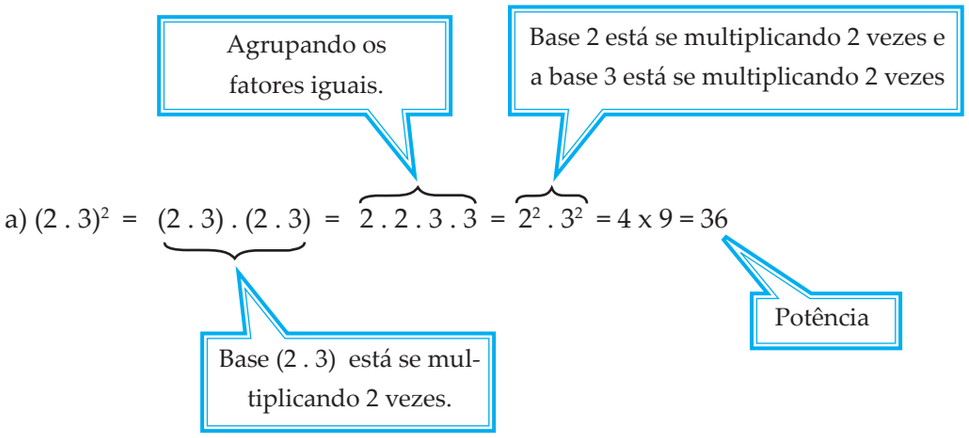
c) $(7^2)^4 = 7^{2 \cdot 4} = 7^8$

De fato, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Vejamos

$$(a^m)^n = \left(\overbrace{a . a . a . a \ \ldots \ a}^{m \text{ vezes}}\right)^n = \underbrace{\left(\overbrace{a . a . a . a \ \ldots \ a}^{m \text{ vezes}}\right)\left(\overbrace{a . a . a . a \ \ldots \ a}^{m \text{ vezes}}\right) \ldots \left(\overbrace{a . a . a . a \ \ldots \ a}^{m \text{ vezes}}\right)}_{n \text{ vezes}}$$

$$= (a^m)^n$$

QUARTA PROPRIEDADE. Para efetuar um produto elevado a uma potência, elevamos cada base a essa potência.
($(a . b)^m = a^m . b^m$, a e b números reais e diferentes de zero, com m inteiro)



a) $(2 . 3)^2 = (2 . 3) . (2 . 3) = 2 . 2 . 3 . 3 = 2^2 . 3^2 = 4 \times 9 = 36$

Ou

b) $(2 . 3)^2 = (2 . 2) . (2 . 3) = 2^2 . 3^2$

c) $(5 . 4)^2 = 5 . 4 . 5 . 4 = 5 . 5 . 4 . 4 = 5^2 . 4^2 = 25 . 16 = 400$

d) $(1 . 2)^3 = 1 . 2 . 1 . 2 . 1 . 2 = 1 . 1 . 1 . 2 . 2 . 2 = 13 . 23 = 1 . 8 = 8$

e) $(7 . 2)^2 = 7^2 . 2^2 = 49 . 4 = 196$

De fato, $(a . b)^m = a^m . b^m$. Vejamos

$$(a . b)^m = \underbrace{(a . b) . (a . b) \ldots (a . b)}_{m \text{ vezes}} = \left(\overbrace{a . a . a . a \ \ldots \ a}^{m \text{ vezes}}\right) . \left(\overbrace{b . b . b . b \ \ldots \ b}^{m \text{ vezes}}\right) = a^m . b^m$$

Resumindo:

$1^n = 1$
$0^n = 0$, $n \neq 0$
$a^1 = a$
$a^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$ e n inteiro

$a^m . a^n = a^{m+n}$, $a \neq 0$
$a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $a \neq 0$
$(a . b)^m = a^m . b^n$, $a \neq 0$

Potências de base 10

Vamos supor que queremos calcular 10^2, 10^3, 10^4 e assim por diante. Sabemos que:

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$
$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$$

Logo, percebemos que para determinar qualquer **potência de base 10 com expoente positivo**, basta tomar o número um e acrescentarmos tantos zeros quanto for a quantidade indicada pelo número do expoente.

Agora queremos calcular 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} e assim por diante.
Sabemos que:

$$1 / 10 = 0{,}1 = 10^{-1}$$
$$1 / 100 = 0{,}01 = 10^{-2}$$
$$1 / 1000 = 0{,}001 = 10^{-3}$$

Logo, percebemos que, no caso da **potência de base 10 com expoente negativo,** contam-se as casas decimais correspondentes ao expoente negativo.

Mas, onde usamos potências de base 10?

As potências de base 10 podem ser usadas na decomposição de números devido ao nosso sistema de numeração ser decimal, ou seja, ser de base 10.

Vejamos algumas maneiras de decompor o número 4567.

$$4567 = 4000 + 500 + 60 + 7$$
$$4567 = 4 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 7$$
$$4567 = \underbrace{4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 7 \times 10^0}$$

Decomposição utilizando potências de base 10

As potências de base 10 podem facilitar a leitura de certos números, quando por exemplo nos deparamos com informações que apresentam números "muito grandes", como nas situações a seguir.

O Brasil tem uma área de aproximadamente $8\,500\,000\ Km^2$.

O Brasil tem cerca de 170 000 000 habitantes.

Podemos reescrever as informações anteriores, utilizando potências de base 10.

O Brasil tem uma área de aproximadamente $85 \times 10^5\ Km^2$.

O Brasil tem cerca de 17×10^7 habitantes.

Ou quando nos deparamos com informações que apresentam números "muito pequenos", como na situação a seguir.

Em média uma bactéria tem 0,000005 g.

Em média uma bactéria tem 5×10^{-6} g.

Capítulo II

RADICIAÇÃO

Introdução

Na aula de artes o professor Pedro colocou a seguinte situação para seus alunos:

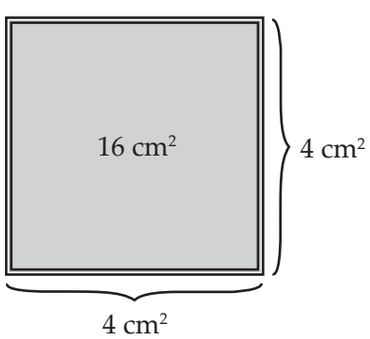
- "Vocês devem fazer quadrados de cartolinas com 16 cm^2 de área". E retirou-se da sala.

Os alunos então começaram a discutir como seria a resolução da atividade.

Maria colocou "Quantos centímetros deverá ter o lado de cada um desses quadrados?" e acrescentou "A área de um quadrado é lado vezes lado, ou seja, $A = l \times l = l^2$".

José completando as informações de Maria disse "Dessa forma, precisamos encontrar o número que multiplicado por ele mesmo, ou seja, elevado ao quadrado, tem como resultado 16".

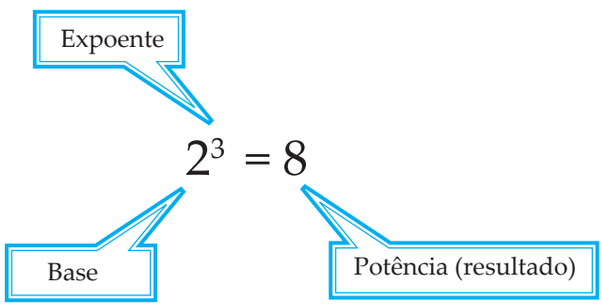
Logo, Maria e Pedro apresentaram aos colegas o quadrado solicitado pelo professor.



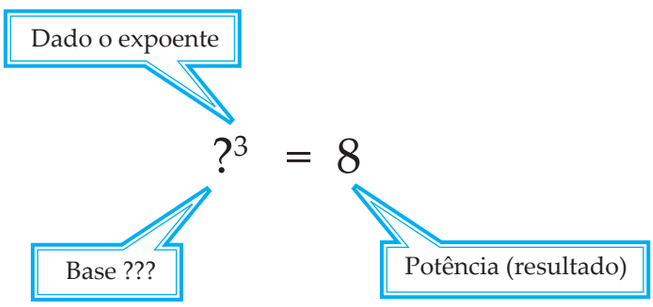
E responderam: "O número procurado é 4, pois $4 \times 4 = 4^2 = 16$, então o quadrado tem que ter 4 cm de lado".

Como esses alunos só conhecem potenciação, vamos definir a radiciação dizendo que a potenciação tem como operação inversa a radiciação. Isto é,

• Na operação de potenciação são dados a base e o expoente. Temos como objetivo encontrar uma potência.



• Na radiciação são dados a potência e o expoente. Temos como objetivo encontrar a base



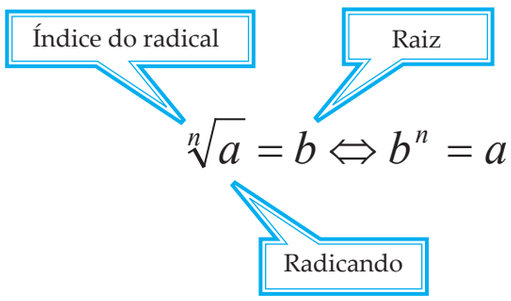
Perguntamos: "Qual é o número que elevado ao cubo tem como resultado 8?"

A base procurada é 2, pois somente o 2 elevado ao cubo tem como resultado 8 ($2 \times 2 \times 2 = 8$).

Esta operação que permite determinar o número que elevado ao cubo dá 8, chama-se radiciação.

No caso de $2^3 = 8$, pode-se afirmar que 2 é a raiz cúbica de 8. Indicamos a operação de radiciação pelo símbolo $\sqrt{}$ chamado de radical.

Assim, podemos **defini-la. Dados a e b números reais positivos e n um número inteiro maior que 1, temos por definição que** $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ **, com:**



Observação. Quando o índice é 2, usualmente ele não é escrito. Assim, $\sqrt{4}$, lê-se raiz quadrada de quatro.

Exemplos.

1. $x^2 = 81$ (Que número que elevado ao quadrado dá 81?)
Sabe-se que $9 \times 9 = 9^2 = 81$, podemos afirmar que 9 é a raiz quadrada de 81 e escreve-se:

$$\sqrt{81} = 9$$

Lê-se: A raiz quadrada de 81 é 9.

2. $x^3 = 64$ (Que número que elevado ao cubo dá 64?)
Sabe-se que $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$, podemos afirmar que 4 é a raiz cúbica de 64 e escreve-se:

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

Lê-se: A raiz cúbica de 64 é 4.

3. $\sqrt{9} = ?$(A raiz quadrada de 9 é?)
Sabe-se que $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, queremos encontrar o valor de $\sqrt{9}$
Fazendo: $\sqrt{9} = b \Leftrightarrow b^2 = 9$, logo podemos afirmar que 3 é a raiz quadrada de 9. De fato, pois $3 \times 3 = 9$ e escreve-se:

$$\sqrt{9} = 3$$

Lê-se: A raiz quadrada de 9 é 3.

Quadrado perfeito

É denominado **quadrado perfeito** todo número que admite raiz quadrada exata, isto é, existe um número que multiplicado por ele mesmo produz o seu quadrado.

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[3]{125} = 5$
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt[3]{216} = 6$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{512} = 8$	$\sqrt[3]{729} = 9$	$\sqrt[3]{1000} = 100$

Análise do índice do radical

Vamos considerar o radical $\sqrt[n]{a}$ e analisar os casos a seguir.

1º CASO. **Índice é par.**

Se n é par, todo número real positivo tem duas raízes reais. De fato, como podemos observar nos cálculos feitos a seguir.

$$\left.\begin{array}{l}(-9)^2 = (-9).(-9) = 81\\ (+9)^2 = (+9).(+9) = 81\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{81} = \pm 9$$

Temos, $\sqrt{81} = \pm 9$ (duas soluções), mas sabemos que o **resultado de uma operação deve ser único.** Observe que temos uma **contradição aparente.**

Para eliminarmos essa contradição define-se módulo de um número da seguinte forma:

Módulo de x é o maior valor entre x e o oposto de x.
Indica-se por |x|.

Assim:

a) $\begin{cases} |4| = 4, \textit{ pois } 4 = \textit{máx}\{-4,4\} \\ |-4| = 4, \textit{ pois } 4 = \{-4,4\} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2 \\ \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2 \end{cases}$

De um modo geral teremos:

$\sqrt{a^2} = |a|$ será sempre positivo (ou nulo se a = 0).

Veja outros exemplos.

$$\sqrt{81} = 9$$

$$-\sqrt{81} = -9$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$-\sqrt{64} = -8$$

Mas o que acontece se o radicando é um número negativo e o índice do radical for par? Vejamos:

$$\sqrt[2]{-4} \Rightarrow (x)^2 = -4$$
$$\sqrt[2]{-9} \Rightarrow (x)^2 = -9$$

Não existe nenhum número real que elevado ao quadrado resulte num número positivo.

Não existe raiz real de um número negativo se o índice do radical for par.

2º CASO. **Índice é ímpar.**

Se n é ímpar, cada número real tem apenas uma raiz real. De fato, como podemos observar nos cálculos feitos a seguir.

$$\sqrt[3]{8} = 2, \textit{ pois } 2^3 = 8$$
$$\sqrt[3]{-8} = 2, \textit{ pois } (-2)^3 = -8$$

Sempre existe raiz real de um número negativo se o índice do radical for ímpar.

Cálculo da raiz quadrada exata por decomposição

1. Para os números menores que 100 a raiz quadrada é facilmente memorizada.

$0^2 = 0$	$3^2 = 9$	$6^2 = 36$	$9^2 = 81$
$1^2 = 1$	$4^2 = 16$	$7^2 = 49$	$10^2 = 100$
$1^2 = 4$	$5^2 = 25$	$8^2 = 64$	

2. Para os números maiores que 100, devemos proceder como da maneira tratada a seguir.

Queremos encontrar a raiz quadrada de 7056.

1º Passo. Separa-se o número que se quer extrair a raiz quadrada da seguinte forma: da direita para a esquerda, em classes de dois algarismos, usando o ponto.

$\sqrt{70 . 56}$

2º Passo. Extrai-se a raiz quadrada aproximada, por falta, da 1ª classe da esquerda ($\sqrt{70} = 8$ por falta, isto é, 8 é o primeiro número da raiz que se coloca na chave). Eleva-se o primeiro número da raiz ao quadrado ($8^2 = 64$) e subtrai-se da primeira classe 70. Abaixa-se a outra classe e separa-se o último algarismo da direita.

$\sqrt{70 . 56}$ | 8
- 64
65 . 6

3º Passo. Toma-se o dobro do primeiro número da raiz (2 x 8 = 16) e coloca-o debaixo do traço que separa a raiz. Divide-se o número separado do último número por 16. Assim, 65 : 16 é igual a 4 e sobra 1 de resto. Esse quociente pode ser o segundo número da raiz e se escreve na chave à direita do número 16, formando o número 164. (Temos que verificar se 4 serve para ser colocado ao lado do 16 e isto será feito no próximo passo).

$\sqrt{70 . 56}$	8
- 64	
65 . 6	164

3º Passo. Tomamos o número 164 e multiplicamos por 4, resultando 656. E temos duas condições.

a) Se o produto (164 x 4) for igual ou menor que 656, então 4 satisfaz e é o segundo número da raiz.

b) Se o produto for maior que 656, então toma-se como segundo número da raiz o número 3 e este é colocado na chave ao lado de 16 formando 163. tomemos 163 e multiplicamos por 3. Isto continua até que a condição seja satisfeita.

No nosso caso 4 satisfaz, dando o produto igual a 656, produto que subtraído de 656 à esquerda dá zero.

$\sqrt{70 . 56}$	8
- 64	
65 . 6	164
65 6	
0	

A raiz quadrada é exata e dizemos que o número 7056 é quadrado perfeito.
Prova: 84^2 + resto = 7056 + 0 = 7056

Faremos outro exercício onde o processo continuará. Não vamos reescrever os passos anteriores, apenas os que serão acrescentados.

Queremos encontrar a raiz quadrada de 81329.

$\sqrt{8 . 13 . 29}$	28
- 4	
41 . 3	48
	x 8
38 . 4	384
02 9 29	

41: 4 = é igual a 10 e resto 1. Escreve-se o segundo número da raiz a começar por 9, mas 49 x 9 = 441 é maior do que 413, então o desconsideramos e vamos considerar o 8 que é o primeiro número menor que 9 e temos 48 x 8 = 384 (menor que 413).

$\sqrt{8.13.29}$	285	
- 4		
4 13	48	565
- 3 84	x 8	x 5
0 29 29	384	2825
- 28 25		
1 04		

Repete-se o processo. Toma-se o dobro de 28 que é 56. Divide-se 292 por 56 (que é igual a 5 e resto 12). O quociente 5 pode ser o terceiro número da raiz. O quociente 5 satisfaz a condição a), pois 565 x 5 = 2825 é menor do que 2929.

Neste caso a raiz é 285, aproximada por falta e o resto é 104. O número 81 329 não é quadrado perfeito.

Prova: 285^2 + resto = 81225 + 104 = 81 329.

Queremos encontrar a raiz quadrada de 10409.

$\sqrt{1.04.09}$	102
- 1	
00 . 4	202
- 4 . 09	x 2
- 4 04	404
5	

Veja que devemos dividir 0 por 2, mas como o resultado é zero. Abaixa-se a outra classe colocando como segundo número da raiz o 0, escrevendo-o ao lado de 2. A seguir, dividimos 40 por 20, resultando 2. Esse quociente satisfaz a condição a) e portanto será o terceiro número da raiz.
Neste caso a raiz é 102, aproximada por falta e o resto é 5. O número 1 0409 não é quadrado perfeito.

Prova: 102^2 + resto = 10404 + 5 = 10409.

Queremos encontrar a raiz quadrada de 89965.

$\sqrt{8.99.65}$	299	
- 4		
49 . 9	49	589
- 44 . 1	x 9	x 9
05 8 65	441	5301
- 5 3 01		
564		

49 : 4 é igual a 12 e tem resto 1. Então o segundo número deverá ser considerado de 9 para menos, satisfazendo a condição a).
58 = 29 x 2.
586 : 58 é igual a 10 e resto 6. Então, toma-se o 9 como segundo número.

Neste caso a raiz é 299, aproximada por falta e o resto é 564. O número 8 9965 não é quadrado perfeito.

Prova: 299^2 + resto = 89401 + 564 = 89965.

Potenciação de radicais

Observando as potências, temos que:

$$(\sqrt{8})^3 = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{8.8.8} = \sqrt{8^3} \Rightarrow (\sqrt{8})^3 = \sqrt{8^3}$$

$$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2.2.2} = \sqrt{2^3} \Rightarrow (\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3}$$

$$(\sqrt{2})^5 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2.2.2.2.2} = \sqrt{2^5} \Rightarrow (\sqrt{2})^5 = \sqrt{2^5}$$

Percebemos nos exemplos anteriores que, para se elevar um radical a um dado expoente, basta elevar o radicando àquele expoente. Ou seja,

$$(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

De fato, vamos mostrar que vale a propriedade $(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$

$$\left(\sqrt{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a}\,\ldots\sqrt{a}}_{m\ vezes} = \sqrt{\underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,\ldots\,.\,a}_{m\ vezes}} = \sqrt{a^m}$$

De fato, vamos mostrar que vale a propriedade: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,\ldots\sqrt[n]{a}}_{m\ vezes} = \sqrt[n]{\underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,\ldots\,.\,a}_{m\ vezes}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Divisão de radicais

Segundo as propriedades dos radicais, temos que:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2}} = \frac{2}{3} \quad (I)$$

e

$$\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{3^2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} \quad (II)$$

De (I) e (II) concluímos que: (I) = (II)

$$(I) = (II) \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2}} = \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$

De um modo geral, na divisão de radicais de mesmo índice, mantemos o índice e dividimos os radicais. Ou seja,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}, \quad b \neq 0$$

De fato, vamos mostrar que vale a propriedade $\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}, \quad b \neq 0$

$$\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \left(\frac{a^m}{b^m}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(a^m)^{\frac{1}{n}}}{(b^m)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}$$

Exemplo.

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Nos exemplos anteriores, tínhamos o mesmo índice para os radicais e o que acontece se os índices dos radicais forem diferentes? Por exemplo, como podemos reescrever $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}} = ?$

Se os radicais forem diferentes, devemos reduzi-los ao mesmo índice e depois efetuar a operação.

Exemplo.

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{8^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{8^3}{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{512}{4}} = \sqrt[6]{128}$$

Simplificação de radicais

Simplificar um radical significa escrevê-lo sob a forma mais simples e equivalente ao radical dado.

Temos vários casos para analisar.

1º CASO. O índice e o expoente do radicando são divisíveis por um mesmo número (diferente de zero).

Exemplo 1.

$$\sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$\sqrt[5]{2^5} = 2$$

Logo, $\sqrt[4]{2^4} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

Exemplo 2.

$$\sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[2]{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$$

Logo, $\sqrt[4]{2^6} = \sqrt[2]{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$

Um radical não se altera quando o expoente do radicando e o índice do radical são divididos pelo mesmo número.

2º CASO. O expoente do radicando é um múltiplo do índice.

Exemplo.

$$\sqrt[4]{2^4} = 2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = 2$$

$$\sqrt[2]{9} = \sqrt[2]{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3^1$$

$$\sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4$$

O radicando pode ser colocado fora do radical com um expoente igual ao quociente do expoente anterior pelo índice.

3º CASO. O expoente do radicando é maior do que o índice.

Neste caso, devemos decompor o radicando em fatores de modo que um dos fatores tenha expoente múltiplo do índice.

Exemplo.

$$\sqrt[4]{2^{16}} = \sqrt[4]{2^4 . 2^4} = 2 \ . \ 2 = 4$$

$$\sqrt[2]{a^6} = \sqrt[2]{a^2 . a^3} = a\sqrt[2]{a^3}$$

O radicando pode ser colocado fora do radical com um expoente igual ao quociente do expoente anterior pelo índice.

Racionalização de denominadores

Consideremos uma fração cujo denominador é um número irracional. Seja $\frac{3}{\sqrt{2}}$ a fração considerada.

O que precisamos fazer para tornar o denominador desta fração um número racional?

Lembre-se que não podemos alterar a fração dada inicialmente. Já sabemos que uma fração não se altera quando o numerador e o denominador são multiplicados por um mesmo número, diferente de zero.

Nós estamos buscando uma fração equivalente a fração $\frac{3}{\sqrt{2}}$, mas de forma que apresente um número racional no denominador. Assim podemos dizer que

Racionalizar o denominador de uma fração é obter uma fração equivalente com denominador racional.

Para encontrarmos tal fração, basta multiplicar o numerador e o denominador desta fração por $\sqrt{2}$, obtendo uma fração equivalente à dada.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

A essa transformação, damos o nome de **racionalização de denominadores.**

Para racionalizar o denominador de uma fração, devemos multiplicar os termos desta fração por uma expressão com radical, denominado **fator racionalizante**, de modo a obter uma nova fração equivalente com denominador sem radical.

Exemplos.

1. Qual é o fator racionalizante de $\sqrt{3}$?

É $\sqrt{3}$, pois $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$

2. Qual é o fator racionalizante de $4\sqrt{3}$?

É $\sqrt{3}$, pois $4\sqrt{3} \,.\sqrt{3} = 4\sqrt{9} = 4 \,.\, 3 = 12$

3. Qual é o fator racionalizante de $\sqrt[3]{4^2}$?

É $\sqrt[3]{4^1}$, pois $\sqrt[3]{4^2} \,.\, \sqrt[3]{4^1} = \sqrt[3]{4^2.4^1} = \sqrt[3]{4^{2+1}} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

4. Qual é o fator racionalizante de $3\sqrt{6} + 1$?

É $3\sqrt{6} - 1$, pois $(3\sqrt{6})^2 - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 1 = (3\sqrt{6})^2 - 1$

5. Qual é o fator racionalizante de $\sqrt{3} + \sqrt{2}$?

É $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, pois $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \,.\, (\sqrt{3} - \sqrt{2}) =$

$= (\sqrt{3} \,.\, \sqrt{3}) - (\sqrt{3} \,.\, \sqrt{2}) + (\sqrt{2} \,.\, \sqrt{3}) - (\sqrt{2} \,.\, \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$

Principais casos de racionalização

1º Caso. **O denominador é um radical de índice 2.**

Exemplo.

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5.\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{5.\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5.\sqrt{2}}{2}$$

Assim, $\sqrt{a}$ é o fator racionalizante de $\sqrt{a}$, pois $\sqrt{a} \,.\, \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$

2º Caso. **O denominador é um radical de índice diferente de 2.**

Exemplo.

$$\frac{3}{\sqrt[3]{7}} = \frac{3\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}\,\sqrt[3]{7^2}} = \frac{3\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{3\sqrt[3]{7^2}}{7}$$

Assim, $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ é o fator racionalizante de $\sqrt[n]{a^m}$, pois

$\sqrt[n]{a^m} \,.\, \sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$

3º Caso. O denominador é uma soma ou diferença de dois termos, sendo pelo menos um dos termos um radical.

Exemplo.

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{5}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3-2} = \frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{1} = 5(\sqrt{5}-\sqrt{2})$$

Assim, podemos concluir que:

$\sqrt[n]{a^{n-m}}$ é o fator racionalizante de $\sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ é o fator racionalizante de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é o fator racionalizante de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

$\sqrt{a} + b$ é o fator racionalizante de $\sqrt{a} - b$

Potência com expoente racional

De modo geral, definimos:

Se a é um número real positivo e $\frac{m}{n}$ é um número racional, com m e n inteiros e n > 0, temos:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, com $a \in \Re$, m, n ∈ N, a > 0, n > 0, m > 0 .

Podemos também transformar um radical em expoente fracionário

$$\sqrt{32} = 32^{\frac{1}{2}}$$

Observe as seguintes igualdades.

$$\sqrt{5^6} = 5^3 \text{ ou } \sqrt{5^6} = 5^{\frac{6}{2}} = 5^3$$

Igualmente podemos transformar uma potência com expoente fracionário em um radical.

$$7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

Propriedades das potências com expoentes racionais

As propriedades das potências com expoentes racionais são as mesmas para os expoentes inteiros.

Sendo a e b números reais e positivos e os expoentes números racionais, temos que:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$$

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

Exemplos.

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}} = 2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = 2$$

$$(2 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$$

MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Disciplina

INSTRUMENTAÇÃO PARA PESQUISA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA II

Módulo 2

MÚLTIPLOS

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
Heloisa Laura Queiroz Gonçalves da Costa
Henrique Mongelli

Capítulo I

INTRODUÇÃO

Situação-problema 1.
Observe os seguintes números apresentados no quadro do professor. Qual é o número seguinte?

Dizemos que esses números formam uma **seqüência numérica** e cada número dela é chamado de **termo**. O que há de especial nessa seqüência?

Temos os múltiplos do número 7. Na seqüência, todos os termos são obtidos pela multiplicação de 7 por um número natural.

Seqüência	0	7	14	21	...
	7. 0 = 0	7 . 1 = 7	7 . 2 = 14	7 . 3 = 21	...

Múltiplo de 7 é todo número que resulta da multiplicação de um número natural por 7. Para saber se um número é múltiplo de 7, usamos a operação inversa.

Situação-problema 2.
Observe a seguinte seqüência: **0, 9, 18, 27, 36,45...**

Qual é o número seguinte?
O que há de especial nessa seqüência?

Situação-problema 3.
Observe a seguinte seqüência: **2, 11, 20, 29, 38,46...**

Qual é o número seguinte?
O que há nessa seqüência? Ela é múltipla de 9?

Situação-problema 4.

a) Qual é seqüência de múltiplos de 5? E de 10?
b) Qual é seqüência de múltiplos de 2? E de 4?

Dizemos que um número natural *m* é **múltiplo** de um número natural a se m é o resultado da multiplicação de a por algum número natural.

Exemplo: 18 é múltiplo de 6 porque 6 x 3 =18.

Divisibilidade e divisores

Observe a divisão a seguir.

$$\begin{array}{r|l} 32 & 4 \\ \hline -32 & 8 \\ \hline 00 & \end{array}$$

Divisão exata

Dela podemos tirar que:

- 4 divide 32.
- 4 é divisor de 32.
- 32 é divisível por 4.

Essas são as diferentes formas de se referir a um mesmo fato.

Dizemos que um número natural é divisível por outro quando a divisão do primeiro pelo segundo é exata (resto igual a zero).

Pretendemos agora encontrar o número de divisores de um número natural. Vamos montar uma tabela com alguns desses números e os seus divisores. Esses divisores serão obtidos efetuando a divisão entre eles.

NÚMERO	DIVISORES	NÚMERO DE DIVISORES
1	1	1
2	1,2	2
3	1,3	2
4	1,2,4	3
5	1,5	2
6	1,2,3,6	4
7	1, 7	2
8	1,2,4,8	4
9	1,3,9	3
10	1,2,5,10	4

Observando a tabela anterior temos que:

• O número 1 é divisor de qualquer número.
• Apenas o número 1 só tem ele como divisor.
• Todo número é divisor dele mesmo ou todo número é múltiplo dele mesmo.
• Se um número é divisor de outro, e este é divisor de um terceiro, o primeiro número é divisor do terceiro; ou se um número é divisor de outro, é divisor de qualquer múltiplo desse outro.
• Os números que possuem apenas dois divisores (ele mesmo e a unidade) são chamados números **primos**.
• Os números que possuem mais de dois divisores são chamados números **compostos**.

Observações.

• O número zero tem uma infinidade de divisores.
• O número zero não é nem primo e nem composto.
• Qualquer número natural pode ser escrito como produto de outros números.
• Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou pode ser decomposto num produto de fatores primos.
• O número 1 é considerado **especial,** não é primo nem composto (tem apenas um divisor).
• O único número primo par é o 2.

Crivo de Erastósteles

Eratóstenes de Cyrene

Astrônomo, escritor e poeta, Eratóstenes nasceu em Cyrene (atual Shahhat, na Líbia), provavelmente em 276 a.C.

Porém, passou a maior parte de sua vida de trabalho em Alexandria, onde acabou por se tornar o segundo bibliotecário da grande biblioteca local.

De seus estudos sobre aritmética, sua contribuição foi estabelecer um método seguro para a determinação dos números primos, método esse que ficou conhecido como o "crivo de Eratóstenes".

http://www.projetozk.ufjf.br/base_p/ensaios/ensaio3/ant_eratostenes.htm

O Crivo de Eratóstenes é um método simples e prático de se encontrar números primos até um certo valor limite, criado por Eratóstenes.

Para se obter números primos menores do que um determinado número natural n. Devemos construir uma tabela contendo os primeiros n números naturais.

Tabela com os 100 primeiros números naturais.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Para determinar os números primos nesta tabela, basta seguir os seguintes passos.

1. Antes de iniciar, lembramos que 1 não é um número primo.

2. Marcamos o número 2, que é o primeiro número primo e eliminamos todos os múltiplos de 2 que encontrarmos na tabela (números em azul).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

3. Marcamos o número 3 e eliminamos todos os múltiplos de 3 que encontrarmos na tabela (números com o fundo cinza).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4. Determinamos o próximo número primo, que será o próximo número não marcado da tabela e eliminamos todos os múltiplos desse número primo que encontrarmos na tabela.
5. Continuamos o processo, sempre voltando ao passo anterior, com o próximo número primo.
6. Os números que não foram eliminados são os números primos.
A seguir, mostramos os números primos menores do que 100, obtidos pelo crivo de Erastóstenes.

P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97}

Reconhecimento de um número primo

Para saber se um número é primo, dividimos esse número pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11 etc. até que tenhamos

• Um quociente exato. Nesse caso, podemos afirmar que o número é **composto.**
• Um quociente aproximado, menor ou igual ao divisor. Nesse caso, podemos afirmar que o número é **primo**.

Por exemplo. O número 161 é um número primo? Para sabermos vamos dividir esse número por 2, 3, 5, 7, 11 etc. e analisar a resposta em cada caso, até que um dos dois casos citados anteriormente ocorra.

(161 : 2)? (161 : 3)? (161 : 5)? (161 : 7)?

1 6 1 | 2	1 6 1 | 3
0 1 | 8 3	0 1 1 | 5 3
	2

1 6 1 | 5	1 6 1 | 7
0 1 1 | 3 2	0 2 1 | 2 3
1	0

Na divisão do número 161 por 2, 3 e 5 não temos uma divisão exata, mas por 7 sim. Logo, podemos concluir que o número 161 é um número composto.

As próximas regras vão facilitar nosso trabalho, sabendo-as não é necessário efetuarmos as divisões, como feitas anteriormente. Elas nos dizem se um número é divisível por 2, 3, 5, 7, 11, ...

Antes de enunciá-las vejamos como ficaria a solução desse mesmo problema.

• (161 : 2)? Temos que 161 não é divisível por 2, porque termina em 1.
• (161 : 3)? Temos que 161 não é divisível por 3, porque a soma dos valores absolutos dos algarismos é 8 e 8 não é divisível por 3.
• (161 : 5)? Temos que 161 não é divisível por 5, porque não termina nem em 0, nem em 5.

• (161 : 7)? Temos que 161 é divisível por 7. Portanto, 161 não é um número primo.

Por exemplo. Vamos verificar se o número 113 é um número primo.

• O número 113 não é divisível por 2, porque termina em 3.
• O número 113 não é divisível por 3, porque 1+1+3=5 e 5 não é divisível por 3.
• O número 113 não é divisível por 5, porque não termina nem em 0, nem em 5.
• O número 113 não é divisível por 7.

$$\begin{array}{r|l} 113 & 7 \\ \cline{2-2} 7 & 16 \\ 43 & \\ 1 & \end{array}$$

A divisão é não-exata e o quociente (16) é maior que o divisor (7). Continuamos verificando se é divisível ou não pelo próximo número primo. Mas vamos aos critérios de divisibilidade para facilitar nosso trabalho.

Critérios de divisibilidade

Anteriormente, montamos uma tabela onde os divisores de um número natural foram obtidos efetuando a divisão entre eles. Mas perguntamos: "existe uma outra maneira de decidirmos se um número natural é divisível por outro sem precisar efetuar a divisão entre eles?"

Vamos conhecer alguns critérios de divisibilidade.

DIVISIBILIDADE POR 2. Todo número natural será divisível por **dois se for par**. Um número natural é divisível por 2 se o seu ultimo algarismo for divisível por 2, isto é, quando ele termina em 0, 2, 4, 6 ou 8, ou seja, quando for par.

Por exemplo: O número 16 é divisível por 2? Sim, pois 16 é par.
Todo múltiplo de 10 é divisível por 2.
De fato, 50 : 2 = 25.

DIVISIBILIDADE POR 3. Todo número natural será divisível por três se a soma dos valores absolutos dos algarismos for também divisível por 3.

Por exemplo: O número 15 é divisível por 3? Sim, pois 1 + 5 = 6 (6 é divisível por 3).
O número 62 124 é divisível por 3? Sim, vejamos

Há duas maneiras para resolvermos este problema.

• Ou dividimos 62 124 por 3.

```
6 2 1 2 4 | 3
0 2 1     | 2 0 7 0 8
    0 2 4 |
      0   |
```

Como o resultado da divisão é exata, então 62 124 é divisível por 3.

• Ou utilizamos a regra dada.

Precisamos calcular soma dos valores absolutos dos algarismos do número 62 124. Isto é, 6 + 2 + 1 + 2 + 4 = 15. Devemos agora, dividir por 3 a soma obtida.

```
1 5 | 3
0   | 5
```

Logo, o número 62 124 é divisível por 3. Veja que 15 também é divisível por três (1+ 5= 6 e 6 : 2= 3).

DIVISIBILIDADE POR 4. Todo número natural será divisível por quatro se os seus dois últimos algarismos formam um número divisível por 4, ou quando o número termina em 00.

Por exemplo: O número 4312 é divisível por 4?
Sim, pois 12 é divisível por 4.
Todo múltiplo de 100 é divisível por 4.
Todo número terminado em 00 é divisível por 4.
O número 3 588 é divisível por 4.
Sim, pois 88 é divisível por 4.

DIVISIBILIDADE POR 5. Todo número natural será divisível por cinco se o algarismo das unidades for 0 ou 5.

Por exemplo: O número 75 é divisível por 5?
Sim, pois termina com o algarismo 5.
O número 165 é divisível por 5?
Sim, pois termina com o algarismo 5.Veja:

165 termina em 5. 165 é divisível por 5.

1 6 5	5
1 5	3 3
0	

3 040 termina em 0. 3 040 é divisível por 5.

3 0 4 0	5
0 4 0	6 0 8
0	

DIVISIBILIDADE POR 6. Todo número natural será divisível por seis quando for divisível por 2 e por 3. Ou será divisível por seis se é par e a soma de seus algarismos é divisível por 3.

Por exemplo: O número 756 é divisível por 6?
Sim, pois 756 é par e a soma de
seus algarismos: 7+5+6=18 é divisível por 3.

7 5 6	6
1 5 0	1 2 8
3 6	
0	

O resultado de 756 : 6 = 128 é exato.

Todo múltiplo de 6 é divisível por ambos: 2 e 3. De fato, 12 ÷ 2 = 6; 12 ÷ 3 = 4; 18 ÷ 2 = 9; 18 ÷ 3 = 6.

7 5 6	2
1 5 0	3 7 8
1 6	
0	

7 5 6	3
1 5 0	2 5 2
0 6	
0	

O número 756 é divisível por 2 e 3, como podemos ver nas divisões anteriores.

DIVISIBILIDADE POR 7. Todo número natural será divisível por sete se o dobro do último algarismo, subtraído do número sem o último algarismo, resultar um número divisível por 7. Se o número obtido ainda for grande, repete-se o processo até que se possa verificar a divisão por 7.

Por exemplo: O número 1 092 é divisível por 7? Sim, vejamos o uso da regra citada para a divisibilidade por 7.

1092	Número dado
109	Número sem o último algarismo
4	Dobro do último algarismo
109 - 4 = 105	Subtração do número sem o último algarismo com o dobro do último algarismo
105	Repetir o processo
10	Número sem o último algarismo
10	Dobro do último algarismo
10-10=0	Subtração do número sem o último algarismo com o dobro do último algarismo

Também podemos verificar a divisibilidade de 1092 por 7 da seguinte maneira.

Vamos decompor 1 092 em parcelas divisíveis por 7: 7, 14, 21, 42, 490, ...

$$1\,092 = 490 + 490 + 70 + 42$$

Logo, 1 092 é divisível por 7 (cada parcela da decomposição é divisível por 7)

DIVISIBILIDADE POR 8. Todo número natural será divisível por oito quando os três últimos algarismos formam um número divisível por 8 ou quando termina em 000.

Por exemplo: O número 45128 é divisível por 8?
Sim, pois, 128 dividido por 8 dá 16.

O número 10000 é divisível por 8?
Sim, pois, 10000 dividido por 8 dá 1250.

O número 100000 é divisível por 8?
Sim, pois, 128 dividido por 8 dá 12500.

```
1 0 0 0 0 | 8
0 2 0     | 1 2 5 0
  4 0
    0 0
```

```
1 0 0 0 0 0 | 8
0 2 0       | 1 2 5 0 0
  4 0
    0 0 0
```

DIVISIBILIDADE POR 9. Todo número natural será divisível por nove quando a soma de seus algarismos é divisível por 9.

Por exemplo: O número 1935 é divisível por 9?
Sim, pois 1+9+3+5 = 18 que é divisível por 9.

O número 729 é divisível por 9?
Sim, pois 7 + 2 + 9 = 18 que é divisível por 9.

DIVISIBILIDADE POR 10. Todo número natural será divisível por dez se o algarismo das unidades for zero.

Por exemplo: O número 5420 é divisível por 10?
Sim, pois termina em 0 (zero).

Observação. Considerando os números naturais que são divisíveis por 10, encontramos 0, 10, 20, 30, 40, 50, ...

DIVISIBILIDADE POR 11. Um número é divisível por 11 se a soma dos algarismos de ordem par S_{pares} menos a soma dos algarismos de ordem ímpar $S_{impares}$ é um número divisível por 11.

Como um caso particular, se $S_{pares} - S_{ímpares} = 0$ ou se $S_{ímpares} - S_{pares} = 0$, então o número é divisível por 11.

Por exemplo.

O número 87 549 é divisível por 11? Sim, vejamos o uso da regra citada para a divisibilidade por 11.

8 7 5 4 9	Número dado
5ª 4ª 3ª 2ª 1ª	ordens
9 + 5 + 8 = 22	$S_{ímpares}$
4 + 7 = 11	S_{pares}
22 – 11= 11	$S_{ímpares} - S_{pares}$
11	Número divisível por 11
Logo, 87 549	É divisível por 11

O número 1353 é divisível por 11? Sim, vejamos:

1 3 5 3	Número dado
4ª 3ª 2ª 1ª	ordens
3 + 3 = 6	$S_{ímpares}$
5 + 1 = 6	S_{pares}
6 – 6= 0	$S_{ímpares} - S_{pares}$
0	Número divisível por 11
Logo, 1353	É divisível por 11

DIVISIBILIDADE POR 13. Um número é divisível por 13 se o quádruplo do último algarismo, somado ao número sem o último algarismo, resultar um número divisível por 13. Se o número obtido ainda for grande, repete-se o processo até que se possa verificar a divisão por 13. Este critério é semelhante àquele dado antes para a divisibilidade por 7, apenas que no presente caso utilizamos a soma ao invés de subtração.

Por exemplo.

O número 16562 é divisível por 13? Sim, vejamos

16562	Número dado
1656	Número sem o último algarismo
4 x 2 = 8	Quatro vezes o último algarismo
1656 + 8 = 1664	Soma do número sem o último algarismo com quatro vezes o último algarismo
1664	Repetimos o processo
166	Número sem o último algarismo
4 x 4 = 16	Quatro vezes o último algarismo
166 + 16 = 182	Soma do número sem o último algarismo com quatro vezes o último algarismo
182	Repetimos o processo
18	Número sem o último algarismo
4 x 2 = 6	Quatro vezes o último algarismo
18 + 6 = 26	Soma do número sem o último algarismo com quatro vezes o último algarismo
26 : 13 = 2	É divisível por 13
Logo, 1656 : 13	De fato, 1 6 5 6 2 | 1 3 3 5 | 1 2 7 4 9 6 5 2 0

DIVISIBILIDADE POR 16. Um número é divisível por 16 se o número formado pelos seus quatro últimos algarismos é divisível por 16.

Por exemplo: O número 54096 é divisível por 16?
Sim, pois 4096 dividido por 16 resulta 256.

Esses critérios nos serão úteis e facilitarão muito nosso trabalho na busca do mmc e mdc, conceitos que serão definidos a seguir.

Euclides de Alexandria, matemático, grego, provou, há 2300 anos, que **há infinitos números primos**. E qualquer número inteiro maior do que 1 ou é primo ou pode ser decomposto em um produto de números primos.

Verificando algumas dessas propriedades

Existem dois modos de introduzir os critérios de divisibilidade, num o professor fornece as regras, em outro, procura dar uma justificativa para a regra.

Não apresentaremos uma justificativa para todas elas, mas gostaríamos que vocês tentassem buscar essas justificativas. Para isso vamos levá-los a descobrir algumas delas, e o conceito a ser tratado a seguir será imprescindível.

Propriedades dos restos

Dividindo-se a **soma dos restos** das parcelas de uma adição, o **resto** é o mesmo que se **dividirmos a soma das parcelas pelo mesmo número**, propriedade necessária para qualquer tentativa de explicação dos critérios da divisibilidade.

Por exemplo, consideremos o número 184. Este número pode ser reescrito como 30 + 45 + 69 + 40 = 184.

30 + 45 + 69 + 40 = 184	Quantas vezes o sete se repete
30 = 7 + 7 + 7 + 7 + 2	(4 x 7) temos 4 setes
45 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 3	(6 x 7) temos 6 setes
69 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 6	(9 x 7) temos 9 setes
40 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 5	(5 x 7) temos 5 setes
30 + 45 + 69 + 40 = 184 = (24 x 7) +2 + 3 + 6 + 5	Em 184 temos 24 setes
+2 + 3 + 6 + 5= 16 = 7 + 7 + 2	
Reescrevendo 184 184 = (24 x 7) + 16 184 = (24 x 7) + (7 + 7 + 2) 184 = (26 x 7) + 2	

Logo, concluímos que 184 tem 26 setes (24+2) e ainda mais 2, logo se dividirmos 184 por 7 acharemos 26 e sobra 2; mas 2 é o mesmo da divisão da soma dos restos.

$$\begin{array}{r|l} 184 & 7 \\ \cline{2-2} 44 & 26 \\ 2 & \end{array}$$

A propriedade que acabamos de tratar é útil para **justificativas dos critérios**, mas também para as aplicações nas provas de adição, de onde poderá ser induzida a prova para outras operações.

• Para o critério da **divisibilidade por 10** a explicação é possível, uma vez que os alunos já conhecem que multiplicando-se um número por 10 sempre acrescenta-se um algarismo 0; portanto, os múltiplos de 10 possuem o algarismo 0 no final.

Por exemplo, 10 x 10 = 100; 100 x 10 = 1000; 1000 x 10 = 10000.

Todo número natural terminado em 0 é divisível por 10.

• Para o critério da **divisibilidade por 2 (ou por 5)** , o aluno precisa saber que:

Todo número pode ser decomposto numa parcela terminada em 0 e em outra parcela constituída só do algarismo das unidades.
Por exemplo, o número for 12 pode ser escrito 10 + 2
Em seguida, devemos apresentar para ele que a primeira parcela é divisível por 2 (ou por 5) pois se 2 (ou 5) é divisor de 10, e 10 é divisor daquela parcela, então 2 é divisor da parcela (transitividade).

Por exemplo, se o número for 12 = 10 + 2, onde 10 : 2 = 5 (divisão exata) ou 10 : 10 = 1 (divisão exata), logo 2 é divisor de 10.

E com a propriedade da soma dos restos devemos apresentar para ele que o resto vai ser igual ao resto da segunda parcela, pois a primeira não deixa resto, de onde o aluno deve perceber que só a segunda parcela é que interessa; portanto um número é divisível por 2 (ou por 5) se o valor do algarismo das unidades é divisível por 2 (ou por 5), ou em caso contrário, o resto é o mesmo e daí tirar critérios particulares.

Por exemplo, se o número for 12 = 10 + 2, onde 2 : 2 = 1 (divisão exata), logo 12 é divisor de 2.

Outros exemplos.

O número 125 é divisível por 5?	
120 + 5 = 125	Uma parcela terminada em 0 e outra em unidades
120 : 10 = 12	120 é divisível por 10
5 : 5 = 1	5 é divisível por 5
Sim, o número 125 é divisível por 5.	

```
1 2 5 | 5
  2 5 | 2 5
    0 |
```

O número 455 é divisível por 5?	
450 + 5 = 125	Uma parcela terminada em 0 e outra em unidades
450 : 10 = 45	450 é divisível por 10
5 : 5 = 1	5 é divisível por 5
Sim, o número 455 é divisível por 5.	

```
4 5 5 | 5
  0 5 | 9 1
    0 |
```

Todo número natural terminado em 0 ou em 5 é divisível por 5.
Todo número natural par é divisível por 2.

• Para o critério da **divisibilidade por 9,** devemos saber que: "Todo número constituído de um algarismo e vários algarismos zeros, quando dividido por 9 fornece para resto o valor daquele algarismo".

Observe as seguintes divisões.

3 0 0 0 | 9	2 0 0 | 9
3 0 | 3 3 3	2 0 | 2 2
3 0	2
3	

5 0 | 9	1 6 | 9
5 | 5	7 | 1

3 2 5 6 | 9
5 5 | 3 6 1
1 6
7

Queremos saber se 3256 é divisível por 9. Vejamos.

3256 = 3000 + 200 + 50 + 2	
3000 : 9 = 333 + 3	Resto 3
200 : 9 = 22 + 2	Resto 2
50 : 9 = 5 + 5	Resto 5
2	Resto 2
Soma dos restos: 3 + 2 + 5 + 6 = 16	
16 : 9 é um e sobra resto 7.	
Logo, 32 56 : 9 é 361 e sobra resto 7.	

Outro exemplo.
Queremos saber se 842 é divisível por 9. Vejamos

842 = 800 + 40 + 2	
800 : 9 = 88 + 8	Resto 8
40 : 9 = 4 + 4	Resto 4
2	Resto 2
Soma dos restos: 8 + 4 + 2 = 14	
14 : 9 é um e sobra resto 5.	
Logo, 842 : 9 é 93 e sobra resto 5.	

```
8 0 0 | 9
  8 0 | 8 8
    8 |
```

```
8 4 2 | 9
  3 2 | 9 3
    5 |
```

Conclusão.

O resto da divisão por 9 de cada número é igual ao resto da divisão da soma dos valores de seus algarismos.

• Para o critério da **divisibilidade por 3**, devemos saber que vale a transitividade. Que se 3 é divisor de 9, 3 é divisor dos múltiplos de 9, e portanto o critério é mesmo que o apresentado para o critério da divisibilidade por 9.

Outro modo de perceber a divisibilidade por 3. Um número é divisível por 3 quando a **soma de seus algarismos (dividendo)** for divisível por 3. Veja as divisões a seguir.

```
5 2 2 | 3
2 2   | 1 7 4
  1 2 |
    0 |
```

```
1 7 2 8 | 3
  2 2   | 5 7 6
    1 8 |
      0 |
```

```
4 7 4 | 3
1 7   | 1 5 8
  2 4 |
    0 |
```

No número 522, a soma de seus algarismos é 5+2+2 = 9 é divisível por 3. Logo, 522 é divisível por 3.

No número 1728, a soma de seus algarismos é 1+1+2+8 = 12 é divisível por 3. Logo, 1728 é divisível por 3.

No número 474, a soma de seus algarismos; 4+7+4 = 15 é divisível por 3. Logo, 474 é divisível por 3.

Outro modo de perceber a divisibilidade por 9.

Um número é divisível por 9 quando a **soma de seus algarismos (dividendo)** for divisível por 9. Veja as divisões a seguir.

```
5 2 2 | 9
  7 2 | 5 8
    0 |
```

```
1 7 2 8 | 9
  8 2   | 1 9 3
    1 8 |
      0 |
```

No número 522, a soma de seus algarismos é 5+2+2 =9 é divisível por 9. Logo, 522 é divisível por 9.

No número 1728, a soma de seus algarismos é 1+1+2+8 =12 é divisível por 9. Logo, 1728 é divisível por 9.

• Para o critério da **divisibilidade por 4**, devemos saber que todo número que terminar em 12 será múltiplo de 4.
Por exemplo, sabemos que 32 é divisível por 4.

```
5 3 2 | 4
1 3   | 1 3 3
  1 2 |
    0 |
```

```
1 2 3 2 | 4
  0 3   | 3 0 8
    3 2 |
      0 |
```

```
1 0 2 3 2 | 4
  2 2     | 2 5 5 8
    2 3   |
      3 2 |
        0 |
```

Sabemos que 32 é divisível por 4 e, das divisões feitas anteriormente, percebemos que qualquer número colocado à esquerda deste número (32) será divisível por 4.

• Para o critério da **divisibilidade por 8**, devemos saber que todo número que termina em 000 ou quando os três últimos algarismos desse número formam um múltiplo de 8.

Por exemplo, sabemos que 344 é divisível por 8.

```
5 3 4 4 | 8
  5 4   | 6 6 8
    6 4
      0
```

```
1 3 4 4 | 8
  5 4   | 1 6 8
    6 4
      0
```

```
1 2 3 4 4 | 8
  4 3     | 1 5 4 3
    3 4
      2 4
        0
```

Sabemos que 344 é divisível por 8 e das divisões feitas anteriormente percebemos que qualquer número colocado à esquerda deste número (344) será divisível por 8.

Propriedades do produto dos restos

Consideremos a multiplicação de 9 x 10 = 90.

9 x 10 = 90	
9 : 7 é 1 e resto 2	Resto 2
10 : 7 é 1 e resto 3	Resto 3
Produto dos restos: 2 x 3 = 6	
90 : 7 é 12 e sobra resto 6.	

```
9 0 | 7
2 7 | 1 2
  6 |
```

Só lembrando que: **Dividendo = divisor x quociente + resto.**

Observação. Podemos concluir que para verificarmos uma divisão aplica-se a regra do produto dos restos combinada com a regra da soma dos restos.

Lista de Exercícios I

1) Qual é o primeiro número primo par? Há outros?

2) Qual é o primeiro número primo ímpar?

3) Quantos números primos terminam em 5?

4) Pense dois números primos consecutivos, qual a diferença entre eles?

5) Classifique os números abaixo em primos ou compostos.

a)	5	b)	15	c)	20
d)	13	e)	17	f)	23
g)	25	h)	18		

6) Quais os divisores de um número primo?

7) Verifique se são números primos ou se são números compostos.

a)	84	b)	117	c)	100
d)	157	e)	735	f)	211

8) Verifique quais dos números seguintes são números primos:

a)	63	b)	101	c)	241
d)	289				

9) Escreva três números compostos que sejam maiores que 100 e divisíveis por 6.

10) Escreva três números primos menores que 100.

11) Escreva três números compostos maiores do que 100 e menores do que 200.

12) Dentre os números que você escreveu no exercício anterior, existe algum número divisível por 3? Quais são eles?

13) O número 1 é primo? Por quê?

14) Escreva os números 9 e 50 como soma de dois números primos.

15) Escreva o número 30 como produto de números primos.

16) Qual é o menor número primo com dois algarismos diferentes?

17) Considere o número natural expresso por $26 - 1$. Esse número é primo?

18) Sabendo que o número x representa o quadrado de 11 e o número y representa o dobro de 11, o número expresso por $x + y$ é um número primo?

19) O número natural n é expresso por $42 + 52$. O número n é primo?

Capítulo II

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Consideremos os múltiplos de 24 e 30.

24: 0, 24, 48, 72, 96, 120,...
30: 0,30,60,90,120,150,...

O **menor múltiplo comum** de 24 e 30 é o menor número, fora o zero, que é múltiplo comum de 24 e 30. Observando os múltiplos de 24 e os de 30 listados anteriormente, percebemos que 120 é o número procurado.
Indicamos o menor múltiplo comum com o símbolo: mmc.
Logo, mmc (24,30) = 120

Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número, diferente de zero, que é múltiplo de cada um desses números.

MMC e decomposição em fatores primos

Qual é o mmc (6,20)? Como podemos encontrá-lo?

Basta encontrarmos os múltiplos de 6 e os de 20 e verificar dentre os dois grupos qual é o menor número, diferente de zero, que é múltiplo de cada um desses números.

Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 64,...
Múltiplos de 20: 20, 40, 60, 80,...
Menor múltiplo comum entre 6 e 20: 60

Assim, encontramos o mmc (6,20) que é 60.

Há outra maneira de encontrar esse número? Sim. Vamos usar a decomposição em fatores primos.

Decompor um número em produto é indicar uma multiplicação que dá como resultado aquele número.

Primeiro método – processo da decomposição simultânea

Neste processo decompomos todos os números ao mesmo tempo, num dispositivo como mostra a figura ao lado. O produto dos fatores primos que obtemos nessa decomposição é o m.m.c. desses números. Ao lado vemos o cálculo do m.m.c.(15, 24, 60)

Portanto, m.m.c.(15,24,60) = 2 x 2 x 2 x 3 x 5 = 120

15	24	60	2
15	12	30	2
15	6	15	2
15	3	15	3
5	1	5	5
1	1	1	$2^3 . 3 . 5 = 120$

Vamos fatorar esses dois números.

6	20	2	
3	10	2	
3	5	3	
1	5	5	
1	1	$2^3 . 3 . 5 = 60$	

Decomposição em fatores primos

Vamos fazer um segundo exemplo. Decompor o número 120.

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	$2^3.3.5 = 120$

Decomposição em fatores primos

O **mmc** entre dois ou mais números é formado por todos os fatores primos da decomposição dos números, sendo que os fatores comuns entram no mmc com os maiores expoentes a que estiverem elevados.

Segundo método - árvore

A decomposição de um número também pode ser feita na forma de "árvore". Vamos ao método.

MÉTODO - ÁRVORE

A forma fatorada de um número natural é obtida através de uma operação denominada decomposição em fatores primos, que consiste em:

1º Passo.
Inicialmente dividir o número dado pelo seu menor divisor primo.

2º Passo.
A seguir, dividir o quociente obtido pelo seu menor divisor primo.

3º Passo.
Proceder desta forma, daí por diante, até obter o quociente 1.

Vamos analisar algumas decomposições "em árvore" do número 30.

30	30	30
2 x 15	3 x 10	5 x 6
2 x 3 x 5	3 x 2 x 5	5 x 2 x 3

Logo, 30 = 2 x 3 x 5 = 3 x 2 x 5 = 5 x 2 x 3.

Observe que se trocarmos a ordem dos fatores, o produto não fica alterado.

Vamos decompor o número natural 72 em fatores primos e escrever a sua forma fatorada completa.

72	2	→	72 : 2 = 36	2 é o menor divisor primo de 72
36	2	→	36 : 2 = 18	2 é o menor divisor primo de 36
18	2	→	18 : 2 = 9	2 é o menor divisor primo de 18
9	3	→	9 : 3 = 3	3 é o menor divisor primo de 9
3	3	→	3 : 3 = 1	3 é o menor divisor primo de 3
1				

Então:

$$72 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}_{\text{todos os fatores primo}} = \underbrace{2^3 \times 3^2}_{\text{forma fatorada completa}}$$

Lista de exercícios II

1) Decomponha o número 48 num produto de:

a) dois fatores b) três fatores
c) somente fatores primos

2) Decomponha os números a seguir em um produto de números primos:
a) 28 b) 24 c) 36 d) 52
e) 72 f)100

3) Decomponha em fatores primos os números a seguir pelo dispositivo de árvores.
a) 64 b) 100 c) 125 d) 135 e) 284 f) 343
g) 360 h)1 000

4) Um número natural x está representado por $3 \times 10 \times 11^2$. Esta multiplicação indica a fatoração completa do número x?

5) Qual é a forma fatorada completa do número 1 000?

6) Decomponha em fatores primos ou escreva a forma fatorada completa de cada um dos seguintes números:

a) 50	b) 108	c) 196	d) 256
e) 306	f) 1 089	g) 99	h) 132
i) 234	j) 440	k) 686	l) 4 320

8. Escreva o número natural cuja forma fatorada completa é:

a) $2^3 \times 7 \times 11^2$
b) $5 \times 7^2 \times 17$
c) $3^2 \times 5^2 \times 13$
d) $2^3 \times 11 \times 13$

7) Ao decompor o número natural 3 500 em fatores primos, você obtém $2^m \times 5^n \times 7^p$. Nessas condições, calcule:

a) os valores dos expoentes m, n e p
b) o valor da expressão m x n x p

8) A forma fatorada completa do número natural 1 440 é $25 \times y^2 \times 5$. Qual é o fator que você deve colocar no lugar da letra y?

9) A forma fatorada de um número é $7^2 \times 11 \times 13$. Qual é esse número?

Capítulo III

MÁXIMO DIVISOR COMUM

O **máximo divisor comum** entre dois ou mais número, desde que não sejam ambos nulos, é o maior número entre os divisores comuns aos dois.

Vamos escrever.

Todos os divisores de 18: 1,2,3,6,9,18
Todos os divisores de 12: 1,2,3,4,6,12
Todos os divisores comuns de 18 e de 12: 1,2,3,6
Maior divisor comum entre 18 e 12: 6

Indicamos o maior divisor comum com o símbolo: **mdc.**
Logo, mdc (18,12) = 6

Encontrando os divisores de um número Método

Vamos encontrar os divisores de 18.

1° Passo. Fatoramos o número 18 e colocamos um traço ao lado dos fatores primos.

18	2
9	2
3	3
1	

2° Passo. Uma linha acima desse novo traço coloca-se o sinal de multiplicação e ao seu lado o número 1.

	x	**1**
18	2	
9	2	
3	3	
1		

3° Passo. Efetuamos o produto de 2 pelo número que está na linha acima dele.

	x	**1**
18	2	2
9	2	
3	3	
1		

4° Passo. Efetuamos o produto de 3 pelos números que estão na linha acima dele, à direita do traço. E continuamos esse processo.

	x	**1**	
18	2	2	
9	2	3	6
3	3	9	18
1			

5° Passo. Extraímos da tabela os divisores do número 18 que são os números colocados à direita da segunda linha vertical feita. São eles: 1, 2, 3, 6, 9 e 18.

Encontrando a quantidade de divisores de um número

Como encontrar a quantidade de divisores de um número natural? Devemos proceder do seguinte modo.

1° Passo. Fatoramos o número.

18	2
9	3
3	3
1	$2 \cdot 3^2$

2° Passo. Tomamos os expoentes de cada fator primo e somamos 1 a cada um deles. Multiplicamos os resultados.

Os expoentes são 1 e 2. Somando 1 a cada um deles, obtemos 2 e 3, que multiplicados resulta 6.

3° Passo. Obtenção da resposta. Produto é a quantidade de divisores do número.

O número 18 tem 6 divisores.

Outros exemplos.

1. Vejamos se o número $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ é divisível por 5?
Sim, o número $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ é divisível por 5, pois 5 é um dos fatores de $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

2. Vejamos se o número $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ é divisível por 10?
Sim, o número $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ é divisível por 10, pois 2 e 5 são fatores de $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ e $10 = 2 \cdot 5$.

3. Vejamos se o número $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ é divisível por 25?
Não, o número $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ não é divisível por 25, pois 5^2 não é fator de $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ e $25 = 5^2$.

Observação.

Número primo é uma expressão usada apenas para um número; e **números primos entre si** é uma expressão que compara dois ou mais números.

Por exemplo. Os números 25 e 32 não são primos, mas 25 e 32 são números primos entre si, porque o único divisor comum entre eles é o número um.

O mdc entre dois números primos entre si é igual a um.

Lista de exercícios III

1. Determine todos os divisores de:
a) 40 b) 72 c) 180

2. Determine:

a) todos os divisores de 36
b) todos os divisores de 60
c) todos os divisores de 108
d) os divisores comuns de 36 e 60
e) os divisores comuns de 36 e 108
f) os divisores comuns de 60 e 108
g) os divisores comuns de 36, 60 e 108

3. Observe as respostas que você escreveu no exercício anterior. Responda:

a) Qual é o maior divisor comum de 36 e 60?
b) Qual é o maior divisor comum de 45 e 30?
c) Qual é o maior divisor comum de 50, 30 e 18?
d) Qual é o maior divisor comum de 36 e 108?
e) Qual é o maior divisor comum de 60 e 108?
f) Qual é o maior divisor comum de 36, 60 e 108?

4. A forma fatorada de um número é $2 . 3^2 . 5 . 7$. Sem calcular esse número, responda:

a) Esse número é divisível por 7? Por quê?
b) Esse número é divisível por 11? Por quê?
c) Esse número é divisível por 14? Por quê?
d) Esse número é divisível por 49? Por quê?
e) Escreva dois divisores desse número, maiores do que 50.

5. A forma fatorada de um número é $25 . 5 . 11^2$.

a) Esse número é divisível por 11? Por quê?
b) Esse número é divisível por 32? Por quê?
c) Esse número é divisível por 55? Por quê?
d) Esse número é divisível por 25? Por quê?
e) Escreva três números que sejam divisores de $25 . 5 . 11^2$.

6. A afirmação é falsa ou verdadeira?

a) Todo número natural divisível por 8 é sempre divisível por 4.
( )

b) Todo número natural divisível por 8 é sempre divisível por 2.
( )

c) Todo número natural divisível por 4 é sempre divisível por 8.
( )

d) Todo número natural divisível ao mesmo tempo por 2 e por 4 é sempre divisível por 8. ( )

Referências

Matemática hoje é feita assim 5 / Antonio José Lopes Bigode. – São Paulo: FTD, 2000.

Matemática idéias e desafios 5ª / Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga – São Paulo: Editora Saraiva, 1997.

Matemática Pensar e Descobrir, 5/ José Ruy Giovanni, José Ruy Giovanni Jr. – São Paulo: FTD,

MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Disciplina

INSTRUMENTAÇÃO PARA PESQUISA
E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA II

Módulo 3

POLINÔMIOS

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
Heloisa Laura Queiroz Gonçalves da Costa
Henrique Mongelli

Capítulo I

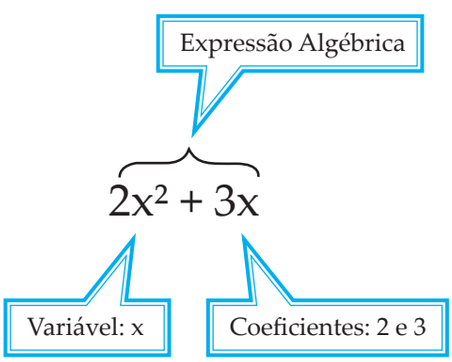
INTRODUÇÃO

Expressões algébricas são aquelas que contém números e letras.

Variáveis são as letras das expressões algébricas que representam um número real e que de princípio não possuem um valor definido.

Valor numérico de uma expressão algébrica é o número que obtemos substituindo as variáveis por números e efetuamos suas operações.

Exemplo.



Se na expressão $2x^2 + 3x$, substituirmos $x = 1$, obteremos $2 + 3 = 5$. E 5 é o valor numérico da expressão em questão.

Monômio

Um **monômio em uma variável real** é um produto de um número real por uma potência de expoente natural dessa variável. Num monômio os números e letras estão ligados apenas por produtos. Se considerarmos a variável $x \in \Re$ e as potências de x: 1, x, x^2, ..., x^n, $x \in \aleph$, são monômios em x; 2, -5x, $-5x^2$, $\sqrt{3}\,x$,...

Um monômio tem **duas partes**, à parte dos coeficientes e a parte literal. Por exemplo.

Dizemos que **dois monômios são semelhantes** quando têm a mesma parte literal, incluindo seus expoentes.

Por exemplo.

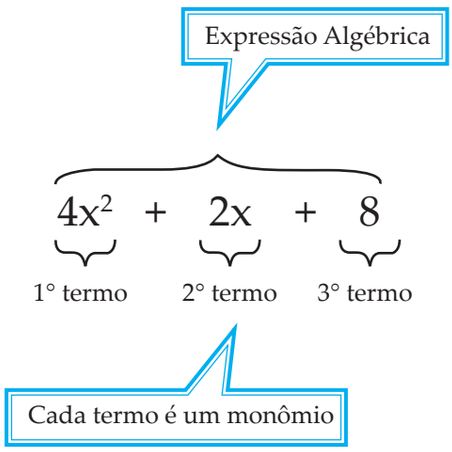
1. $5\,a^2b$ é semelhante a $3\,a^2b$.
2. $\sqrt[3]{8}\,ax$ é semelhante a $\frac{1}{3}\,ax$.
3. 8 e 2x não são semelhantes.

Observações.

1. Quando substituímos as variáveis de um monômio por números reais, obtemos um número real, isto é, um monômio é uma representação de um número real. Por exemplo. Consideremos o monômio $\frac{1}{3}x^2$. Substituindo x = 2, temos $\frac{1}{3}2^2 = \frac{1}{3}4 = \frac{4}{3}$

2. Os monômios são expressões algébricas de um só termo.

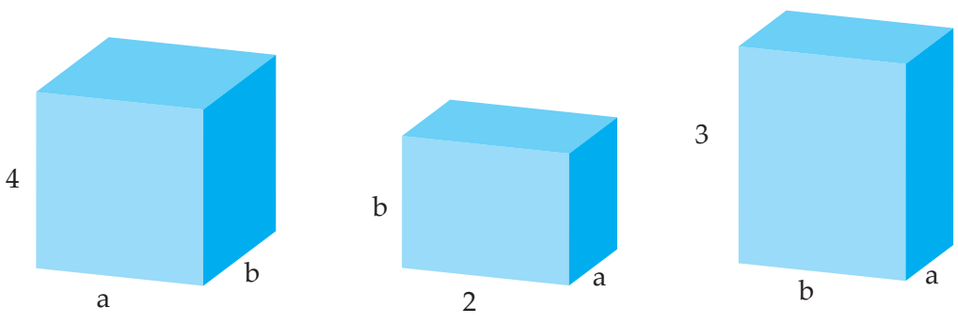
3. Cada monômio que compõe uma expressão algébrica é um termo da expressão algébrica. Por exemplo.



Operações com monômios

Adição e subtração de monômios

Considere as três caixas de papelão dadas a seguir.



Calcule o volume total das três caixas dadas, lembrando que volume do paralelepípedo é V = a.b.c, isto é, comprimento vezes a largura vezes altura.

Vamos calcular o volume de cada um dos paralelepípedos separadamente.

$V_1 = 4\ ab$, $V_2 = 2\ ab$ e $V_3 = 4\ ab$

Queremos determinar o volume das três caixas, então temos que somar os três volumes encontrados anteriormente. Assim,

$V_t = V_1 + V_2 + V_3 = 4ab + 2ab + 4ab = 10\ ab$

Na expressão acima, percebemos que para determinarmos a soma ou subtração de expressões algébrica, basta somar ou subtrair os termos semelhantes.

Outros exemplos.

1. $6x + 3x - 2x = 7x$
2. $5x^2 + 4x^2 = 9x^2$
3. $4ab - 2ab + 5ab = 7ab$
4. $2\,x^3\,y^2\,z + 3x^3\,y^2\,z = 5x^3\,y^2\,z$
5. $(x^3 + 2\,y^2 + 1) - (\,y^2 - 2\,) = x^3 + 2\,y^2 + 1 - y^2 + 2 = x^3 + y^2 + 3$
6. $3x + 2y - x = 2x + 2y$

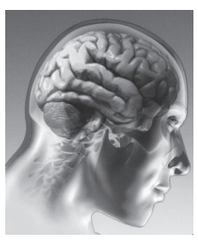
Perceba que só somamos monômios que apresentam termos semelhantes.

Quando uma expressão algébrica apresenta monômios semelhantes podemos simplificá-la, adicionando ou subtraindo os coeficientes e mantendo a parte literal.

Multiplicação de monômios

Vamos iniciar a multiplicação de monômios resolvendo a seguinte situação-problema.

Pedro Henrique ao fazer um cartaz para a aula de ciências percebeu que a medida do comprimento do papel retangular era dobro da largura e ficou curioso em encontrar a área utilizada na confecção do cartaz. Você pode ajudá-lo a encontrar essa área?



É bem fácil. Sabemos que a área de um retângulo é igual ao comprimento vezes a largura do papel, ou seja, A = c x l. Se considerarmos x o comprimento então 2x é largura do papel. Assim,

$$A = x \cdot 2x = 2.\underbrace{x \cdot x}_{\text{Produto de potência de mesma base}} = 2 \cdot x^2$$

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Neste caso, multiplicamos o monômio que representa o comprimento pelo monômio que representa o monômio da largura do terreno. Desta forma, para determinarmos a multiplicação de expressões algébrica, basta multiplicarmos os coeficientes numéricos e, depois as partes literais, empregando as regras convenientes.

Por exemplo.

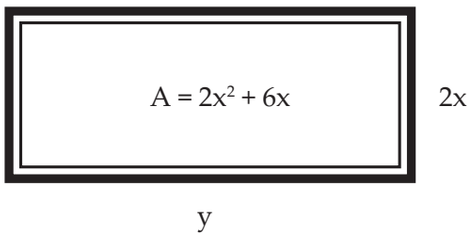
1. $6x \cdot 3x = 18x^2$
2. $5x^2 \cdot 4x^2 = 20x^4$
3. $(4ab - 2ab) \cdot 5ab = 20\,a^2\,b^2 - 10\,a^2\,b^2 = 10\,a^2\,b^2$
4. $(2\,x^3\,y^2\,z) \cdot (3x^3\,y^2\,z) = 6x^6\,y^4\,z^2$
5. $(x^3 + 2\,y^2 + 1) \cdot (y^2 - 2) = x^3\,y2 - 2\,x^3 + 2\,y^4 - 4y^2 + y^2 - 2y^2 - 2 = x^3y2 - 2\,x^3 + 2\,y4 - 5y^2 - 2$
6. $3x \cdot (2y - x) = 6xy - 3xy$

Divisão de monômios

Vamos observar a seguinte situação-problema.

Queremos comprar um terreno retangular, dele sabemos a sua área $A = 2x^2 + 3x$ e a medida de um de seus lados é x. Precisamos saber a medida do outro lado, para assim efetuar sua compra. Como podemos encontrar essa medida?

Vamos fazer o desenho do terreno e nele colocar os dados que nos foram fornecidos e vamos representar por y, a medida do lado que queremos encontrar.



Sabemos que a área de um terreno retangular é dada por A = b . h, logo substituindo o valor da área que conhecemos e o valor da altura, vamos a busca do outro lado deste retângulo.

A = b . h	Fórmula da área do retângulo
$2x^2 + 6x = y \cdot 2x$	⇒ vamos isolar o y (medida do lado que queremos encontrar) e vamos supor que $2x \neq 0$.
$\frac{2x^2 + 6x}{2x} = y$	⇒ como 2x estava multiplicando o y no segundo membro, ele passa para o primeiro membro dividindo $2x^2+6x$.
$\frac{2x^2}{2x} + \frac{6x}{2x} = y$	⇒ vamos reescrever o numerador, separando-o em dois termos ($2x^2$ e 3x), mas cada um dividido por x.
$\frac{2x.x}{2x} + \frac{3 \cdot 2x}{2x} = y$	⇒ vamos trocar x^2 por x. x e 6 = 2 . 3.
$\frac{2}{2} \cdot \frac{x}{x} \cdot x + 3 \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{x}{x} = y$	⇒ sabemos que x/x = 1, 2/2 = 1, vamos efetuar essa troca.
1 . x + 3 . 1 = y	⇒ arrumando essa expressão.
x + 3 = y	⇒ o outro lado mede x +3.

Da tabela tiramos que:

• Da passagem da linha 3 para a linha 4, dividimos cada termo da expressão algébrica ($2x^2+6x$) pelo monômio (2x);
• Das linhas 6 e 7 da tabela anterior, percebemos que para determinarmos a divisão de uma expressão algébrica por monômios, basta dividirmos os coeficientes numéricos e, depois as partes literais, empregando as regras convenientes.

Outros exemplos.

1. $6x : 3x = \frac{6x}{3x} = \frac{6}{3} \cdot \frac{x}{x} = 2 \cdot 1 = 2$

2. $5x^2 : 4x^2 = \frac{5x^2}{4x^2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \frac{5}{4}$

3. $(4ab - 2ab) : 5ab = \frac{4ab - 2ab}{5ab} = \frac{4ab}{5ab} - \frac{2ab}{5ab} = \frac{4}{5} \cdot \frac{ab}{ab} - \frac{2}{5} \cdot \frac{ab}{ab} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} =$

$= \frac{2}{5}$ ou

$(4ab - 2ab) : 5ab = 2ab : 5ab = \frac{2ab}{5ab} = \frac{2}{5}$

4. $(2\,x^3\,y^2\,z) : (3x^3\,y^2\,z) = \frac{2\,x^3\,y^2\,z}{3\,x^3\,y^2\,z} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3\,y^2\,z}{x^3\,y^2\,z} = \frac{2}{3}$

5. $3x : (2y - x) = \frac{3x}{2y - x}$ CUIDADO!!!! Já esta na forma simplificada.

Não temos mais nada a fazer.

6. $(2y - x) : 3x = \frac{2y - x}{3x} = \frac{2y}{3x} - \frac{x}{3x} = \frac{2y}{3x} - \frac{1}{3}$

7. $(3x + 1) : (2y - x) = \frac{3x + 1}{2y - x} = \frac{3x}{2y - x} + \frac{1}{2y - x}$

8. $3x + 1 : (2y - x) = 3x + \frac{1}{2y - x}$

9. $(3x + 1) : 2y - x = \frac{3x + 1}{2y} - x = \frac{3x}{2y} + \frac{1}{2y} - x$

ATENÇÃO!

Observe bem os exemplos 11, 12. No 11 temos um monômio no numerador e uma subtração de monômios no denominador, não podemos fazer nada, mas já no exercício 12 temos o inverso, uma subtração de monômios no numerador e um monômio no denominador, logo podemos abri-lo em dois termos, cada um dividido por 3x.

Já nos exemplos 13, 14 e 15 preste muita atenção. Veja como a colocação de parênteses muda o exercício.

Capítulo II

POLINÔMIO

Introdução de polinômios

Quando introduzimos a adição ou subtração de monômios, encontramos o volume total das três caixas dadas e este volume foi expresso por $V_t = V_1 + V_2 + V_3 = 4ab + 2ab + 4ab = 10ab$ temos neste caso uma adição de monômios resultando num **monômio**.

Vamos supor que tivéssemos uma certa área dada por $A(x) = x^2 + 2x$, esta expressão já esta simplificada, então esta soma pode ser chamada de **binômio** pois apresenta dois termos.

E se tivéssemos agora a situação $P(x) = 3x^2 + \frac{2}{3}xy + 1$, como esta expressão algébrica esta na sua forma simplificada, podemos chamá-la de **trinômio**, pois apresenta três termos.

E se uma expressão algébrica tivesse mais de 3 termos, como poderíamos chamá-la? Vamos considerar a expressão $P(x) = 3x^2 + \frac{2}{3}xy^2 + y - 3$. Neste caso vamos chamá-la de polinômio. Quando uma expressão algébrica apresenta 4 ou mais termos a chamamos de **polinômio.**

Polinômio é uma adição ou subtração algébrica de monômios.

Observe que os monômios também são um tipo de polinômios, porém, com um único termo.

Assim vamos definir Polinômio formalmente.

Definição

Uma função polinomial ou simplesmente polinômio, é toda função definida pela relação:

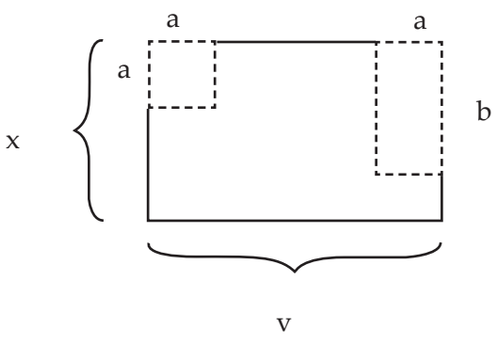
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} . x^{n-1} + a_{n-2} . x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Onde:

a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0 são números reais chamados coeficientes.
$n \in IN$
$x \in C$ (números complexos) é a variável.

Vejamos a seguinte situação-problema.

Maria pegou um papel e recortou dois pedaços para fazer um trabalho escolar de artes. Observe os cortes feitos no papel por Maria e de acordo com a imagem, responda qual é o polinômio que representa a área do pedaço de papel que sobrou?



De acordo com a imagem, percebemos que o comprimento vale y e a largura vale x. A área total é x . y. Mas Maria tirou do total um quadradinho de área a2 e depois um retângulo de área ab. Reescrevendo essa situação. Área que sobrou: $xy - a^2 - ab$

Resposta. $xy - a^2 – ab$. Esta expressão ($xy - a^2 – ab$) que representa a área que sobrou da atividade feita por Maria, nada mais é do que um polinômio, ou se preferir, um trinômio.

Grau de um polinômio

Grau de um polinômio é o expoente máximo que ele possui. Se o coeficiente $a_n \neq 0$ do polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} . x_{n-1} + a_{n-2} . x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, então o expoente máximo n é dito grau do polinômio e indicamos gr(P) = n.

Exemplos.

a) $P(x) = -3$ ou $P(x) = -3.x^0$ é um polinômio de grau zero ou também dito polinômio constante, ou seja, gr(P)=0.

b) $P(x) = 4x - 1/2$ é um polinômio do 1º grau, isto é, gr(P) = 1.

c) $P(x) = 3x^3 + 7x^2$ é um polinômio do 3º grau, ou seja, gr(P) = 5.

d) Se P(x) = 0, não se define o grau do polinômio.

Lembre-se!

Valor numérico

O **valor numérico** de um polinômio P(x) para x = a, é o número que se obtém substituindo x por a e efetuando todas as operações indicadas pela relação que define o polinômio.

Exemplo.

Se $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$, o valor numérico de P(x), para x = 2, é:

$P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

$P(2) = 2^3 + 2.2^2 + 2 - 1$

$P(2) = 8 + 8 + 2 - 1$

$P(2) = 17$

Se P(a) = 0, o número a é chamado raiz ou zero de P(x).

Exemplo.

$P(x) = x^2 - 4x + 3$

$P(1) = 1 - 4 + 3$

$P(1) = -3 + 3$

$P(1) = 0$

Logo, dizemos que 1 é raiz ou zero desse polinômio.

Polinômios iguais

Dois polinômios P(x) e Q(x) são iguais ou idênticos quando assumem valores numéricos iguais para qualquer valor comum atribuído à variável x. Indicamos P(x) ≡ Q(x).

Será que o polinômio P(x) = (x-1) (x-1) é congruente ao polinômio $Q(x) = x^2 - 2x + 1$?
Sim, vejamos, para x = 2.

P(x) = (x-1) (x-1)	$Q(x) = x^2 - 2x + 1$
P(2) = (2-1) (2-1)	$Q(2) = 2^2 - 2.2 + 1$
P(2) = (1) (1)	Q(2) = 4- 4 + 1
P(2) = 1	Q(2) = 1

Logo , podemos dizer que P(x) ≡ Q(x).

Portanto, a condição para que dois polinômios sejam iguais ou idênticos é que os **coeficientes dos termos correspondentes sejam iguais.**

Confira se é verdadeiro.
Um polinômio é dito identicamente nulo se tem todos os seus coeficientes nulos.

Exemplo.
1) Sabendo-se que $x^2 - 2x + 1 \equiv a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x + 1)$, calcular a,b e c.

Temos dado uma igualdade polinomial, e sabemos pela condição de igualdade para que dois polinômios sejam iguais é necessário que os coeficientes dos termos correspondentes sejam iguais.

Para encontrarmos o valor de a, b e c, devemos em primeiro lugar eliminar os parênteses do segundo membro, veja.

x2 - 2x + 1 ≡ ax2 + ax + a + bx2 + bx + cx + c

Agora devemos somar ou subtrair os termos semelhantes. Sabemos ainda que o coeficiente da variável x do primeiro membro quando não aparece é igual a 1.

$x^2 + 1x + 1 \equiv ax^2 + ax + a + bx^2 + bx + cx + c$

$1x^2 + 1x + 1 \equiv (a + b)\, x^2 + (a + b + c)\, x + (a + c)$ (Igualando)

$1 = a + b$

$1 = a + b + c$

$1 = a + c$

Para encontrarmos o valor de a, b e c, tendo as 3 equações acima, devemos montar um sistema de 3 equações e 3 incógnitas.

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+b+c=1 \\ a+c=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+b+c=1 \\ a+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 1-b+b+c=1 \\ 1-b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 1+c=1 \\ -b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ c=0 \\ -b+c=0 \end{cases} \Rightarrow$$

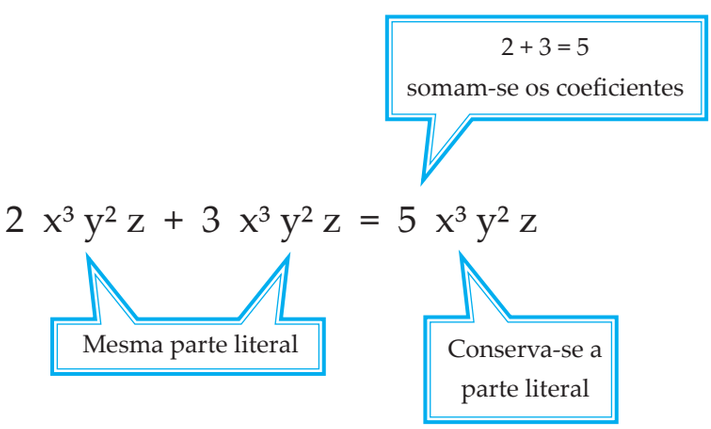
$$\Rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ c=0 \\ -b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=0 \\ b=0 \end{cases}$$

Resposta.

Temos como solução da igualdade polinomial, a = 1, b = 0 e c = 0.

Adição e subtração de polinômios

Adicionamos ou subtraímos polinômios da mesma maneira que fizemos para monômios, ou seja para determinarmos a soma ou subtração de polinômios, basta somarmos ou subtrairmos os termos semelhantes. Assim,



Quando uma subtração de polinômios é sugerida, deve-se tomar muito cuidado na ora de resolver o exercício, pois muitas vezes devemos lembrar das regras dos sinais. Por exemplo, vamos considerar a seguinte subtração.

$(4x^7 + 5y^6 + 4) - (5y^2 - 2x - 3) = 4x^7 + 5y^6 + 4 - 5y^2 + 2x + 3 =$
$= 4x^7 + 5y^6 - 5y^2 + 2x + 4 - 3 =$
$= 4x^7 + 5y^6 - 5y^2 + 2x + 1$

Outros exemplos.

1. $6x + 3x = 8x$
2. $5x^2 + 4x^2 = 9x^2$
3. $(4ab - 2ab) + 5ab = 4ab - 2ab + 5ab = 7ab$
4. $(2 x^3 y^2 z) + (3x^3 y^2 z) = 5 x^3 y^2 z$
5. $(x^3 + 2 y^2 + 1) - (y^2 - 2) = x^3 + 2 y^2 + 1 - y^2 + 2 = x^3 + y^2 + 3$
6. $3x - (-2y - x) = 3x + 2y + x = 4x + 2y$

Multiplicação e divisão de polinômios

Multiplicação de polinômio por um monômio

Na multiplicação de um **polinômio por um monômio**, basta empregarmos a propriedade distributiva.

Exemplos.

1) $a (x + y) = ax + ay$

2) $\sqrt{2}\,(x + 2\sqrt{3}) = \sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,\sqrt{3} = \sqrt{2}\,x + 2\sqrt{6}$

3) $x (x^2 + y) = x^3 + xy$

Multiplicação de polinômios

Na multiplicação de **polinômios** também utilizamos a propriedade distributiva.
Na multiplicação de **dois polinômios** multiplicamos cada termo de um deles por todos os termos do outro e, a seguir, reduzimos os termos semelhantes.

Exemplos.

1) (a+b) (x+y) = ax + ay + bx + by

2) (x+1) (x+2) = x2+ 2x+x+2 = x2+ 3x+2

Vejamos outro modo de efetuarmos a multiplicação de dois polinômios ordenados em uma variável.

Dispositivo prático

Vamos efetuar a multiplicação de $(x^2 + 2x + 3)$ por $(x - 2)$.

x^2	$+2x$	$+3$	
	x	-2	
x^3	$+2x^2$	$+3x$	
	$-2x^2$	$-4x$	-6
x^3		$-x$	-6

Logo, $(x^2 + 2x + 3)(x - 2) = x^3 - x - 6$.

Definindo

Sejam dados dois polinômios P(x) e D(x), com D(x) não nulo. Efetuar a divisão de P(x) por D(x) é determinar dois polinômios Q(x) e R(x), que satisfaçam as duas condições a seguir.

1ª) P(x) = Q(x) . D(x) + R(x)
2ª) *gr (R)* < *gr (D)* ou R(x) = 0

P(x) | D(x)
R(x) Q(x)

Onde nessa divisão, dizemos que
P(x) é o dividendo.
D(x) é o divisor.
Q(x) é o quociente.
R(x) é o resto da divisão.

Se na divisão de P(x) por D(x) tivermos R(x) = 0 dizemos que **a divisão é exata**, ou seja, P(x) é divisível por D(x) ou D(x) é divisor de P(x).

Se D(x) é divisor de P(x) $\Leftrightarrow$ R(x) = 0

Observação: Na divisão de polinômios utilizamos o mesmo dispositivo prático utilizado na divisão euclidiana dos números naturais.

Exemplos.

1) $4x^2 : 2x = \frac{4x^2}{2x} = 2x$ ou

$4x^2$	$2x$
$-4x^2$	$2x$
0	

2) $(6x^3 - 8x) : 2x = 3x^2 - 4$ ou

$6x^3$	$-8x$	$2x$	
$-6x^3$		$3x^2$	-4
0	$-8x$		
	$+8x$		
	0		

3) $(x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2)\,(x^2 - 2x + 1) = x^2 - 3x + 1$ ou

x^4	$-5x^3$	$+9x^2$	$-7x$	$+2$	x^2	$-2x$	$+1$
$-x^4$	$+2x^3$	$-x^2$			x^2	$-3x$	$+2$
0	$-3x^3$	$+8x^2$	$-7x$				
	$+3x^3$	$-6x^2$	$+3x$				
	0	$+2x^2$	$-4x$	$+2$			
		$-2x^2$	$+4x$	$+2$			
			0				

4) $(x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1)\,(x^2 + 3x - 2) =$
$= (x^2 + 3x - 2)\,(x^2 - 2x + 1) + (2x + 1)$ ou

x^3	$+0x^2$	$+0x$	-8	x	-2	
$-x^3$	$+2x^2$			x^2	$+2x$	$+4$
0	$+2x^2$	$+0x$				
	$-2x^2$	$+4x$				
	0	$4x$	-8			
		$-4x$	$+8$			
			0			

Observações.

•Para efetuar a divisão dos polinômios, devemos ordená-los em ordem crescente, em relação à variável.

•Se o polinômio dividendo não é completo, devemos completá-lo acrescentando os termos que faltam com coeficiente zero.

•O grau do resto é, no máximo, uma unidade inferior ao grau do divisor.

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio ax+b é igual a **P(-b/a)**.

Verifique que (–b/a) é a raiz do divisor (ax = b).

De fato, substituindo x = (–b/a) no divisor temos: ax + b =
= a (–b/a) + b = -b + b = 0

Exemplo.

1) (x2 + 5 x -1) : (x + 1) = ?
Vamos encontrar a raiz do divisor, que no caso é: (x + 1).

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Pelo teorema do resto sabemos que o resto é igual a P(-1):

$P(-1) = (-1)^2 + 5.(-1) - 1 \Rightarrow P(-1) = -5 = R(x)$

Solução. R(x) = -5.

Teorema de D'alembert

Um polinômio P(x) é divisível pelo binômio ax + b se P(-b/a) = 0

Exemplo.

1) Determinar o valor de p, para que o polinômio
$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - px + 2$ seja divisível por (x - 2).

Se P(x) é divisível por x - 2, então P(2) = 0.

P(2) = 0 ⇒ 2.8 + 5.4 - 2p + 2 = 0 ⇒ 16 +20 -2p +2 = 0 ⇒ p = 19
Resposta. Para p = 19, o polinômio P(x) é divisível por x-2.

Divisão de um polinômio pelo produto (x-a) (x-b)

Vamos supor que temos que resolver o seguinte problema.

Calcular o resto da divisão do polinômio P(x) pelo produto (x-a) (x-b), sabendo-se que os restos da divisão de P(x) por (x-a) e por (x-b) são, respectivamente, r_1 e r_2.

Do problema tiramos os seguintes dados.

a é a raiz do divisor x-a, portanto **P(a) = r_1** (I)
b é a raiz do divisor x-b, portanto **P(b) = r_2** (II)
P(x) = (x-a) (x-b) Q(x) + R(x) (III)

Sabemos que o resto da divisão de P(x) por (x-a) (x-b) é no máximo do 1º grau, pois o divisor é do 2º grau; logo:

$$R(x) = cx + d$$

De (III) vem:

$$P(x) = (x-a)\,(x-b)\,Q(x) + cx + d$$

Fazendo:

$x = a \Rightarrow P(a) = r_1 = c(a) + d$ (IV)
$x = b \Rightarrow P(b) = r_2 = c(b) + d$ (V)

Das equações I, II, III, IV e V temos:

Basta resolvemos o sistema anterior, para encontrarmos os valores de c e d, obtendo assim o valor do resto.

$$\begin{cases} ca + d = r_1 \\ cb + d = r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = r_1 - ca \\ d = r_2 - cb \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = d \Rightarrow r_2 - cb = r_1 - ca \Rightarrow r_2 - r_1 = cb - ca \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 - r_1 = c(b-a) \Rightarrow c = \frac{r_2 - r_1}{b-a} \text{ ou } c = \frac{r_1 - r_2}{a-b}$$

Substituindo $c = \frac{r_2 - r_1}{b - a}$ em $d = r_1 - ca$, teremos:

$$d = r_1 - ca \Rightarrow d = r_1 - a\left(\frac{r_1 - r_2}{a - b}\right) \Rightarrow d = r_1\left(\frac{a - b}{a - b}\right) - a\left(\frac{r_1 - r_2}{a - b}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{r_1(a - b) - a(r_1 - r_2)}{a - b} \Rightarrow d = \frac{r_1 a - r_1 b - ar_1 + ar_2}{a - b} \Rightarrow d = \frac{r_1(a - b - a) + r_2 a}{a - b}$$

$$\Rightarrow d = \frac{ar_2 - br_1}{b - a}$$

Observações:

1ª) Se P(x) for divisível por (x-a) e por (x-b), temos:

P(a) = r_1 =0

P(b) = r_2 =0

Portanto, P(x) é divisível pelo produto (x-a)(x-b), pois:

$$R(x) = \frac{r_1 - r_2}{a - b} + \frac{ar_2 - ar_1}{a - b} = 0 + 0 = 0$$

2ª) Generalizando, temos:

Se P(x) é divisível por n fatores distintos (x-a_1), (x-a_2),..., (x-a_n) então P(x) é divisível pelo produto (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n).

Exemplo.

1) Um polinômio P(x) dividido por x dá resto 6 e dividido por (x-1) dá resto 8. Qual o resto da divisão de P(x) por x(x-1)?

Resolução:

Como P(x) dividido por x dá resto 6 e dividido por (x-1) dá resto 8, sabemos então que:

0 é a raiz do divisor x, portanto **P(0) = 6** (eq. 1)

1 é a raiz do divisor x-1, portanto **P(1) = 8** (eq. 2)

E para o divisor x(x-1) temos **P(x) = x(x-1) Q(x) + R(x)** (eq. 3)

O resto da divisão de P(x) por x(x-1) é no máximo do 1º grau, pois o divisor é do 2º grau; logo: R(x) = ax+b

Da (eq. 3) vem:

$$P(x) = x(x-1)\,Q(x) + ax + b$$

Fazendo:

$$x = 0 \Rightarrow P(0) = a(0)+b \Rightarrow P(0) = b \qquad \text{(eq. 4)}$$
$$x = 1 \Rightarrow P(1) = a(1)+b \Rightarrow P(1) = a+b \qquad \text{(eq. 5)}$$

Das equações 1, 2, 4 e 5 temos:

$$\begin{cases} b = 6 \\ a + b = 8 \end{cases}$$

Logo, b = 6 e a = 2.

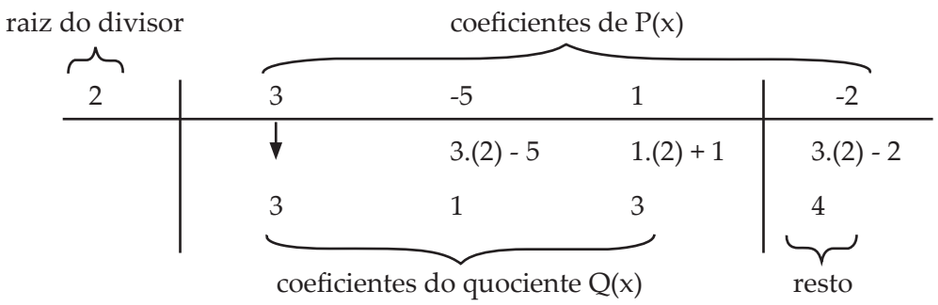
Agora achamos o resto: R(x) = ax+b = 2x+6

Resposta. R(x) = 2x+6.

O Dispositivo de Briot-Ruffini

Serve para efetuar a divisão de um polinômio P(x) por um binômio da forma (ax+b).

Exemplo.
1) Determinar o quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por (x - 2).



Observe que o grau de Q(x) é uma unidade inferior ao de P(x), pois o divisor é de grau 1.
Resposta. $Q(x) = 3x^2 + x + 3$ e R(x) = 4.

Para a resolução desse problema seguimos os seguintes passos:
1º) Colocamos a raiz do divisor e os coeficientes do dividendo ordenadamente na parte de cima da "cerquinha".

2º) O primeiro coeficiente do dividendo é repetido abaixo.

3º) Multiplicamos a raiz do divisor por esse coeficiente repetido abaixo e somamos o produto com o 2º coeficiente do dividendo, colocando o resultado abaixo deste.

4º) Multiplicamos a raiz do divisor pelo número colocado abaixo do 2º coeficiente e somamos o produto com o 3º coeficiente, colocando o resultado abaixo deste, e assim sucessivamente.

5º) Separamos o último número formado, que é igual ao resto da divisão, e os números que ficam à esquerda deste serão os coeficientes do quociente.

Decomposição de um polinômio em fatores

Vamos analisar dois casos:

1º CASO. O polinômio é do 2º grau.

De uma forma geral, o polinômio de 2º grau $P(x) = ax^2 + bx + c$ que admite as raízes r_1 e r_2 pode ser decomposto em fatores do 1º grau, da seguinte forma:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = a\,(x - r1)\,(x - r2)}$$

Exemplos.

1) Fatorar o polinômio $P(x) = x^2 - 4$.
Fazendo $x^2 - 4 = 0$, obtemos as raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = -2$.
Logo: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

2) Fatorar o polinômio $P(x) = x^2 - 7x + 10$.
Fazendo $x^2 - 7x + 10 = 0$, obtemos as raízes $r_1 = 5$ e $r_2 = 2$.
Logo: $x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$.

2º CASO. O polinômio é de grau maior ou igual a 3.

Conhecendo uma das raízes de um polinômio de 3º grau, podemos decompô-lo num produto de um polinômio do 1º grau por um polinômio do 2º grau e, se este tiver raízes, podemos em seguida decompô-lo também.

Exemplo.

1) Decompor em fatores do 1º grau o polinômio $2x^3 - x^2 - x$.

$2x^3 - x2 - x = x \cdot (2x^2 - x - 1)$ colocando x em evidência

Fazendo $x \cdot (2x^2 - x - 1) = 0$, obtemos: $x = 0$ ou $2x^2 - x - 1 = 0$.

Uma das raízes já encontramos. Que é, $x = 0$.

As outras duas saem da equação:

$2x^2 - x - 1 = 0$, $r_1 = 1$ e $r_2 = -1/2$.

Portanto, o polinômio $2x^3 - x^2 - x$, na forma fatorada é:

$2x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1/2)$.

Generalizando.

Se o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ admite n raízes r_1, r_2,..., r_n, podemos decompô-lo em fatores da seguinte forma:

$$\mathbf{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = a_n (x - r_1)(x - r_2) ... (x - r_n)}$$

Observações.

1) Se duas, três ou mais raiz forem iguais, dizemos que são raízes duplas, triplas, etc.

2) Uma raiz r_1 do polinômio P(x) é dita raiz dupla ou de multiplicidade 2 se P(x) é divisível por $(x - r_1)^2$ e não por $(x - r_1)^3$.

Capítulo III

FATORAÇÃO

Observe o polinômio $x^2 - 4x$, ele pode ser reescrito como $x^2 - 4x = x \cdot x - 4 \cdot x$, percebemos que a variável x aparece nos dois termos, ou seja, dizemos que x é o fator comum aos dois termos do polinômio. Logo, podemos colocar esse fator comum em evidência. Assim,

$x^2 - 4x = x \cdot x - 4 \cdot x = x \cdot (x - 4)$

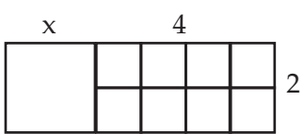
Na verdade, o que fizemos foi escrever o polinômio como um produto, ou seja, a fatoração transformou o polinômio $x^2 - 4x$ em um produto. Dizemos que $x \cdot (x - 4)$ é a forma fatorada de $x^2 - 4x$.

Podemos dizer então, que

Fatorar é transformar equações algébricas em produtos de duas ou mais expressões, chamadas fatores.

Exemplos.

1. (Aplicação) Qual é a área do retângulo a seguir?



A área do retângulo é o produto da base pela altura, logo a área é dada por $2 \cdot (x + 4)$, podemos escrever $2 \cdot (x + 4) = 2x + 8$.

2. $ax + ay = a.(x + y)$ → forma fatorada

↳ fator comum a

Existem vários casos de fatoração.

1º CASO. **Fator comum em evidência**

Quando os termos da expressão apresentam fatores comuns.

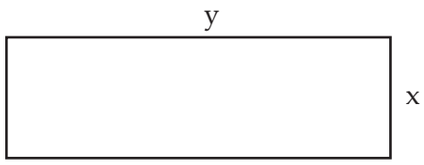
Observe o polinômio ax + ay, nele percebemos que ambos os termos apresentam o fator a em comum. Assim, colocando o fator comum em evidência, temos:

$ax + ay = a . (x + y)$

Polinômio fator comum a

Forma Fatorada

(Aplicação) O perímetro do retângulo dado pode ser escrito de duas maneiras 2x + 2y ou 2 (x + y).



Na expressão 2 (x+ y), que é a forma fatorada de 2x+ 2y, observamos que o número 2 (fator comum) aparece destacado, ou seja, dizemos que o 2 foi colocado em evidência.

Exemplos.

a) $bx + by - bz = b . (x + y - z)$. O fator comum é b.

b) $(a + b) x + (a + b) y = (a + b) . (x + y)$. O fator comum é (a + b).

c) $2x^2 - 4xy = 2x . (x - 2y)$. O fator comum é 2x.

d) $2x^2 - 6x^2y = 2x^2 . (1 - 3y)$. O fator comum é $2x^2$.

2º CASO. **Fatoração por agrupamento**

Consiste em aplicar duas vezes o caso anterior em alguns polinômios especiais.

Como por exemplo, no polinômio ax + ay + bx + by percebemos que os dois primeiros termos possuem em comum o fator a, e os dois últimos termos possuem em comum o fator b. Logo, podemos colocar o fator comum a em evidência e o fator b em evidência.

Colocando esses termos em evidência, temos a . (x + y) + b . (x + y)

Mas, observando este novo polinômio,vemos que ele possui o termo (x + y) em comum e também podemos colocá-lo em evidência.

Assim, temos (x + y) . (a + b).

Ou seja, podemos escrever então ax + ay + bx + by = (x + y) . (a + b)

Exemplos.

a) $x^4 + x^3 + 2x + 2 = (x^4 + x^3) + (2x + 2) = x^3(x + 1) + 2(x + 1) =$
$= (x + 1)(x^3 + 2)$

b) $6x^3 + 4x^2 + 9x + 6 = 2x^2(3x + 2) + 3(3x + 2) = (2x^2 + 3)(3x + 2)$

3º CASO. **Fatoração por diferença de quadrados**

Consiste em transformar as expressões em produtos da soma pela diferença, simplesmente extraindo a raiz quadrada de cada quadrado.

Exemplos.

1. Consideremos o polinômio $x^2 - 9$ pode ser reescrito como $(x - 3)(x + 3)$.
Logo, $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

2. Consideremos o polinômio $a^2 - b^2$ pode ser reescrito como $(a - b)(a + b)$.
Logo, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

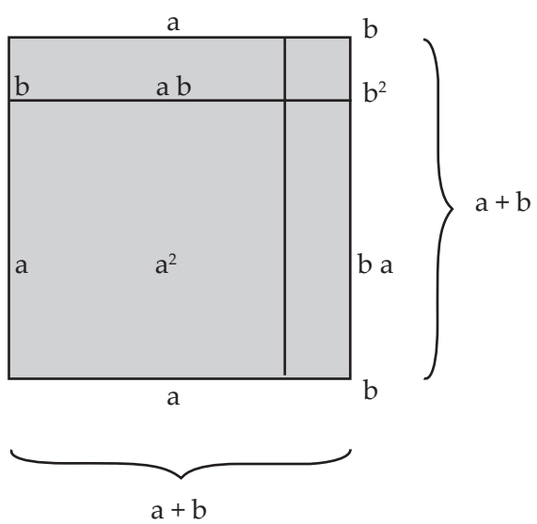
3. Consideremos o polinômio $16a^2 - 1^2$ pode ser reescrito como $(4a - 1)(4a + 1)$.

Logo, $16a^2 - 1^2 = (4a - 1)(4a + 1)$.

4º CASO. **Fatoração do trinômio quadrado perfeito**

O trinômio que se obtém quando se eleva um binômio ao quadrado chama-se trinômio quadrado perfeito.

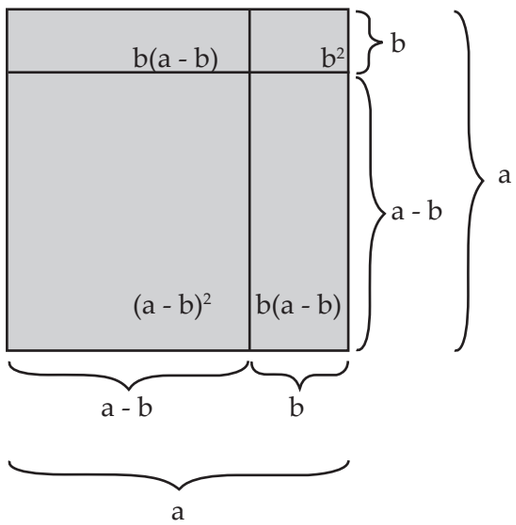
Por exemplo.
Os trinômios $(a^2 + 2ab + b^2)$ e $(a^2 - 2ab + b^2)$ são trinômios quadrados perfeitos e são obtidos quando se eleva $(a + b)$ e $(a - b)$ ao quadrado, respectivamente. Assim, o quadrado do soma é
$(a + b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$. Geometricamente, isto pode ser visto na figura a seguir.



Algebricamente, temos $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$. Utilizando a propriedade distributiva chegamos a: $a^2 + 2.a.b + b^2$.

Resumindo. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, isto é, "quadrado da soma é o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo".

O quadrado da **diferença** é $(a - b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2)$. Geometricamente, isto pode ser visto na figura a seguir.



Algebricamente, temos

$(a - b)^2 = a^2 - 2(a - b)b - b^2 = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Podemos fazer isto em geral, para quaisquer números ou letras.

Resumindo. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, isto é, "quadrado da diferença é o quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo".

Nem todo trinômio é um **trinômio quadrado perfeito**, para que um trinômio seja quadrado perfeito ele deve obedecer as seguintes condições:

- Dois termos são quadrados perfeitos.
- O outro termo é duas vezes o produto das raízes quadradas dos outros dois.

Por exemplo.

1. $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$. Observe que nesta expressão x^2 e 49 são quadrados perfeitos e $14x$ é duas vezes o produto das raízes quadradas dos outros dois.
Podemos transformar $(a - b)^2$ em $(a^2 - 2ab + b^2)$ ou vice-versa? Sim, por exemplo.

2. Consideremos o seguinte trinômio $4x^2 - 12xy + 9y^2$, temos que

$$\begin{array}{ccc} 4x^2 & -12xy & +9y^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{4x^2} & & \sqrt{9y^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2x & & 3y \end{array}$$

Assim, $4x^2 - 12xy + 9y^2$ pode ser reescrito como $(2x - 3y)(2x - 3y)$.
Logo, $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)(2x - 3y)$.

3. Consideremos o polinômio fatorado $(x - 1) . (x - 1)$, temos que, pela propriedade distributiva, $(x - 1) . (x - 1) = x^2 - x - x + 1 =$
$= x^2 - 2x + 1$,
Assim, $(x - 1) . (x - 1)$ pode ser reescrito como $x^2 - 2x + 1$.
Logo, $(x - 1) . (x - 1) = x^2 - 2x + 1$.

4. Consideremos o polinômio $x^2 - 10x + 25$, mostre que
$x^2 - 10x + 25 = (x - 5) . (x - 5) = (x - 5)^2$.

5. Consideremos o polinômio $x^2 + 6x + 9$, mostre que
$x^2 + 6x + 9 = (x - 3) . (x - 3) = (x - 3)^2$.

Observação. Somente os números quadrados perfeitos possuem como raiz quadrada um número natural.

Exemplos.

a) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2$

b) $25x^4 - 100y^2 = 25(x^4 - 4y^2) = 25(x^2 + 2y)(x^2 - 2y)$

5º CASO. Fatoração da soma de dois cubos

Observe a multiplicação a seguir.
$(a + b) . (a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$

Propriedade Distributiva

Logo, $a^3 + b^3 = (a + b) . (a^2 - ab + b^2)$

6º CASO. **Fatoração da diferença de dois cubos**

Observe a multiplicação a seguir.

$(a - b) . (a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

Propriedade Distributiva

Logo, $a^3 - b^3 = (a - b) . (a^2 + ab + b^2)$

7º CASO. **Fatoração por artifício**

Seja dado o seguinte polinômio $x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4$, queremos saber se é possível fatorá-lo.

Bom, podemos fatorá-lo sim, desde que utilizemos a propriedade "se adicionarmos e subtrairmos ao mesmo tempo um mesmo termo num polinômio ele não se altera". Por exemplo, seja o polinômio dado x, se adicionarmos e subtrairmos -1 dele ele não se altera, de fato, $x = x + 1 - 1 = x$.

Mas no caso do polinômio proposto, devemos adicionamos e subtraímos ao mesmo tempo o termo $4x^2y^2$. Veja.

$(x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4 + 4x^2y^2) - 4x^2y^2 = x^4 + 8x^2y^2 + 16y^4 - 4x^2y^2$
$= (x^2 + 4y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 4y^2 + 2xy)\ (x^2 + 4y^2 - 2xy)$

Obtemos assim, um trinômio quadrado perfeito $x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4 = (x^2 + 4y^2 + 2xy)\ (x^2 + 4y^2 - 2xy)$.

Faça agora este exemplo: $x^5 + x + 1$. Sugestão. Somar e subtrair x^2.

Olha é **importante observar** que nem todo polinômio é **redutível**, isto é, são polinômios ditos **irredutíveis**.

PESQUISA: Façam uma pesquisa sobre polinômios irredutíveis.

MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Disciplina

INSTRUMENTAÇÃO PARA PESQUISA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA II

Módulo 4

ÁLGEBRA

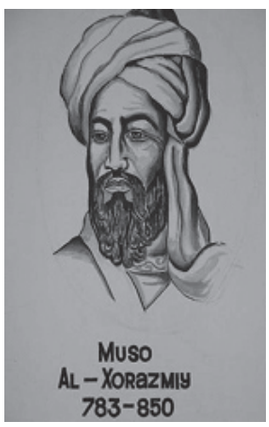
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
Heloisa Laura Queiroz Gonçalves da Costa
Henrique Mongelli

Capítulo I

EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E SISTEMAS

Sentenças matemáticas

Estamos iniciando nossos estudos de álgebra. Enquanto muitos matemáticos tinham interesse no estudo da Geometria, Diofante foi quem primeiro se dedicou, no século III d.C., ao estudo da álgebra. Álgebra vem da expressão árabe al-djabr, usada em um livro escrito por volta do ano 825, por al-Khwarizmi, matemático que, além da álgebra, introduziu na Europa o sistema de numeração decimal e os algarismos indianos.



Al-Khwarizmi escreveu tratados sobre aritmética, álgebra, astronomia, geografia e sobre o calendário. É possível que tenha escrito um tratado sobre o astrolábio e outro sobre relógios de sol, mas estes dois últimos não chegaram aos nossos dias. Tanto o tratado sobre a aritmética como o sobre a álgebra constituíram o ponto de partida para trabalhos posteriores e exerceram uma forte influência no desenvolvimento da matemática, principalmente da aritmética e da álgebra.

O tratado de **álgebra** escrito por Al-Khwarizmi data de cerca de 830 e tem o título Hisab al-jabr w'al-muqabala, uma possível tradução seria o cálculo por completação (ou restauração) e redução. Al-jabr é a operação que consiste em adicionar termos iguais a ambos os membros da equação de forma a eliminar os termos com coeficiente negativo e al-muqabala a operação que se faz de seguida e que consiste em adicionar os termos semelhantes. Estudou problema tais como as que os homens constantemente necessitam no caso das heranças, partilhas, processos judiciais, e comércio, e em todas os seus negócios com outros, ou quando a medição de terras, a escavação de canais, cálculos geométricos, e outras coisas de várias espécies e tipos estão envolvidos ...

http://www.malhatlantica.pt/mathis/Arabes/Kwarizmi.htm

Na Matemática, com frequência utilizamos expressões em que uma letra é utilizada para quantificar alguma coisa ou identificar algo desconhecido. O uso de letras em Matemática é muito comum e nos auxilia a resolver determinados problemas, a generalizar propriedades aritméticas, a expressar relações entre grandezas. Vamos começar nossas discussões por este último assunto.
Consideremos as seguintes situações-problema.

Situação-problema 1. Um carro gasta 1 litro de gasolina para percorrer 10 quilômetros. Se percorrer 20 quilômetros, gastará 2 litros; se percorrer 30 quilômetros, gastará 3 litros; e assim por diante.

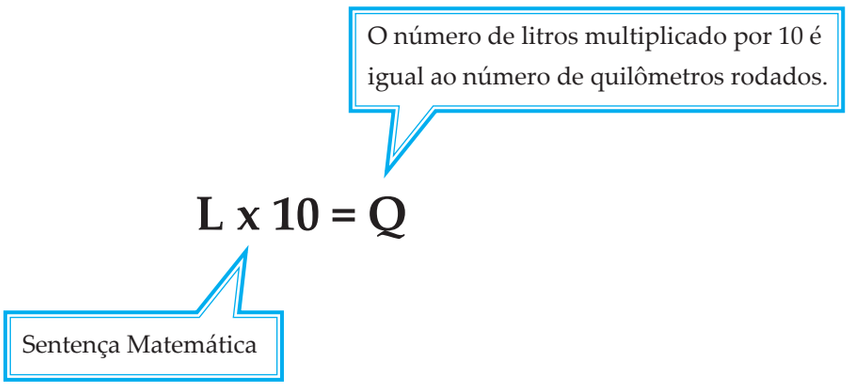
Podemos reescrever esta situação-problema, extraindo os seus dados e organizando-os numa tabela, como mostrado a seguir.

LITROS DE GASOLINA	QUILOMETROS RODADOS
1	10
2	20
3	30
⋮	⋮
30	300

Essas duas quantidades estão relacionadas. Para cada litro de gasolina, o carro percorre 10 quilômetros. Tanto a quantidade de litro de gasolina como a distância percorrida são chamadas de variáveis. Uma variável pode assumir mais de um valor, dependendo do problema. O que precisamos é encontrar uma fórmula que relacione as **variáveis** do nosso problema, que no nosso caso são o número de litros de gasolina e o número de quilômetros rodados.

Observe a tabela anterior.
"Você consegue ver nela uma relação entre a quantidade de litros de gasolina e a quantidade de quilômetros rodados?"

De acordo com o que você deve ter notado, para calcular o número de quilômetros rodados por litro de gasolina, usamos o esquema a seguir.



Na expressão anterior, representamos por L o número de litros de gasolina e por Q o número de quilômetros rodados.

Na sentença matemática L . 10 = Q, se desejamos calcular o número de quilômetros rodados quando tiver consumido 25 litros de gasolina, basta, na expressão dada, substituir L por 25 e assim obter o valor de Q, quantidade de quilômetros rodados.

$$L \cdot 10 = Q$$
$$25 \cdot 10 = Q$$
$$250 = Q$$

Portanto, com 25 litros de gasolina o carro percorreu 250 quilômetros.

Sentenças matemáticas podem ser simples ou abertas. **Simples** quando envolver apenas números, por exemplo 8 + 2 = 10. **Abertas** quando envolvem números e letras, por exemplo, 2 . a = 45.

Vejamos uma nova situação.

Situação-problema 2. Uma empresa produz folhas de papel. A tabela a seguir mostra a quantidade F, de folhas produzidas, em termos do tempo t.

Tempo (min)	0	1	2	3	4	5
Quantidade de folhas	0	300	600	900	1200	1500

Precisamos encontrar uma fórmula que relacione as variáveis do nosso problema, que no nosso caso são o número de folhas produzidas F e o tempo de produção t.

Observando a tabela percebemos que são produzidas 300 folhas por minutos e assim podemos escrever a seguinte sentença matemática que expressa esta relação.

$$F = 300 \cdot t$$

Se por exemplo, queremos saber quantas foram serão produzidas em 8 horas de trabalho, basta fazer:

$$F = 300 \cdot t$$
$$F = 300 \cdot (8 \cdot 60)$$
$$F = 300 \cdot 480$$
$$F = 144.000$$

1 hora = 60 min
8 horas = 8 . 60 min

Portanto, em 8 horas de trabalho a empresa produz 144.000 folhas de papel.

Agora é com você.

Situação-problema 3. A tabela a seguir mostra a posição que um número ocupa.

Posição	1ª	2ª	3ª	4ª	...	nª
Número	1	3	5	7	...	?

Obtenha o termo genérico correspondente à posição n.
Calcule o 25ª termo dessa seqüência.
Obtenha a posição que ocupa o número 421.

Lista de exercícios I

Situação-problema 1. Descubra os números que, colocados no lugar das letras, tornam as igualdades a seguir verdadeiras.

a) $x + 3 = 5$
b) $y - 5 = 5$
c) $x \cdot 2 = 6$
d) $f : 5 = 25$

Situação-problema 2. Utilizando apenas símbolos matemáticos escreva as seguintes sentenças.

a) Qual é o número que adicionado a 8 dá 15?
b) O dobro de um número é igual a oito.
c) Um número somado com três é igual a 125.
d) Um número subtraído de 5 é igual a 65.

Situação-problema 3. Se representarmos certo número natural por x, então:

a) O dobro desse número é:
b) O triplo desse número é:
c) O triplo desse número mais dois é:
d) A metade desse número é:
e) A quinta parte desse número mais cinco é:
f) O consecutivo desse número é:

Situação-problema 4. Dados os itens a seguir, escreva a sentença matemática correspondente.

a) $2x - 1 = 12$
b) $- 3 = 10$
c) $3 . x - 7 = 17$
d) $4 - 2x = 35$

Observação. Nas situações-problema 3 e 4, percebemos a importância de aprender a transcrever expressões da linguagem comum para a linguagem algébrica e vice-versa.

Situação-problema 5. Sabendo-se que a letra n representa um número natural, escreva a linguagem algébrica dos itens a seguir.

a) Representa números pares.
b) Representa números ímpares.
c) Representa o antecessor do número n.
d) Representa o sucessor do número n.
e) Representa números naturais múltiplos de 5.
f) Representa números naturais múltiplos de 6.
g) Representa um quinto desse número.
h) Representa um quarto desse número mais 2.
i) Representa o triplo do quadrado de um número.
j) Representa o dobro do quadrado de um número.

k) Representa o dobro do cubo de um número.
l) Representa a diferença entre o quadrado de um número e 1.
m) m adicionado a quatro é maior do que seis.

Situação-problema 6. Marcos tem no bolso de seu paletó certa quantia. Vamos chamá-la de x. No bolso esquerdo ele tem R$ 2,00 a mais que no direito. Como devemos escrever matematicamente, a quantia que Marcos tem no bolso esquerdo e a quantia total que ele tem nos dois bolsos.

Igualdades

Qualquer sentença matemática que utilize o símbolo (=) recebe o nome de igualdade. E toda igualdade é formada de duas partes, separadas pelo símbolo de igual.

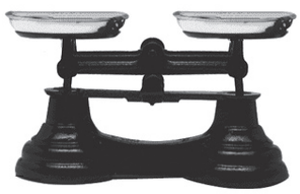
Por exemplo.
"O dobro de um número mais três é igual a vinte e cinco" – Linguagem comum

$$2x + 3 = 25 \text{ – Linguagem algébrica}$$

Primeiro termo dessa igualdade:
o dobro de um número mais 3, ou (2x + 3).

Segundo termo dessa igualdade: vinte e cinco.

Numa igualdade estamos procurando o valor de x que torna o primeiro membro exatamente igual ao segundo membro. É muito comum compararmos uma igualdade com uma balança de dois pratos, como na figura a seguir, em que estamos procurando o equilíbrio dos pesos que estão nos pratos da balança.



O **conjunto universo** de uma igualdade é formado pelos elementos que podem tornar a igualdade verdadeira. O **conjunto solução** de uma igualdade está contido no conjunto universo e é formado pelos elementos que tornam a igualdade verdadeira.

Nos livros didáticos atuais existem muitos exemplos de situações-problema envolvendo uma balança de dois pratos.

Pesquise em livros didáticos ou na Internet, como trabalhar em sala de aula com a balança de dois pratos na resolução de equações. Apresente ainda várias situações-problema. Postam suas atividades no MATERIAL DO ALUNO.

Equação

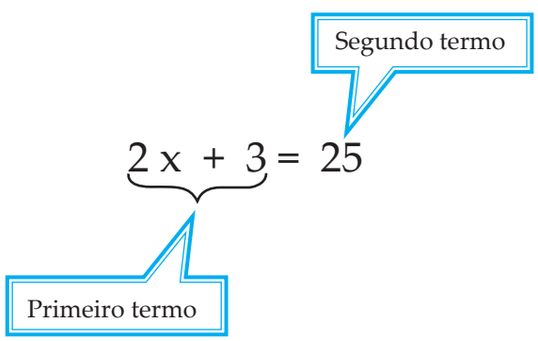
Uma sentença aberta com sinal de igualdade é chamada de equação.

Exemplos.

1. $2x + 4 = 0$
2. $4x^2 + 2x + 2 = 0$
3. $25x5 + 15x^2 + 5 = 0$

Observamos nos exemplos acima que uma equação é formada por uma expressão colocada à esquerda do sinal de igual, chamada de primeiro termo ou primeiro membro, e por outra colocada à direita do sinal, chamada de segundo termo ou segundo membro.

Exemplo.



Resolver uma equação significa encontrar o valor desconhecido, mas para isso é necessário realizar uma espécie de operações que nos conduzam a equações equivalentes cada vez mais simples e que nos permitam, finalmente, determinar os elementos do conjunto verdade ou as raízes da equação. O valor desconhecido é chamado de **raiz** da equação. O conjunto formado por todas as raízes de uma equação, e somente por elas, é denominado **conjunto solução.**

Equação algébrica

Chamamos de **equações algébricas** aquelas equações nas quais a incógnita x está sujeita a operações algébricas como: adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação.

O maior expoente da incógnita em uma equação algébrica é denominado o **grau da equação** e o coeficiente do termo de mais alto grau é denominado **coeficiente do termo** dominante.

Exemplos.

1. Equação do primeiro grau $ax + b = 0$.
2. Equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Equação do quinto grau $a x5 + b x^2 + c = 0$

Definindo.

Uma equação algébrica está em sua **forma canônica**, quando ela pode ser escrita como

$$\mathbf{a^o x^n + a^1 x^{n-1} + ... + a^{n-1} x^1 + a^n = 0}$$

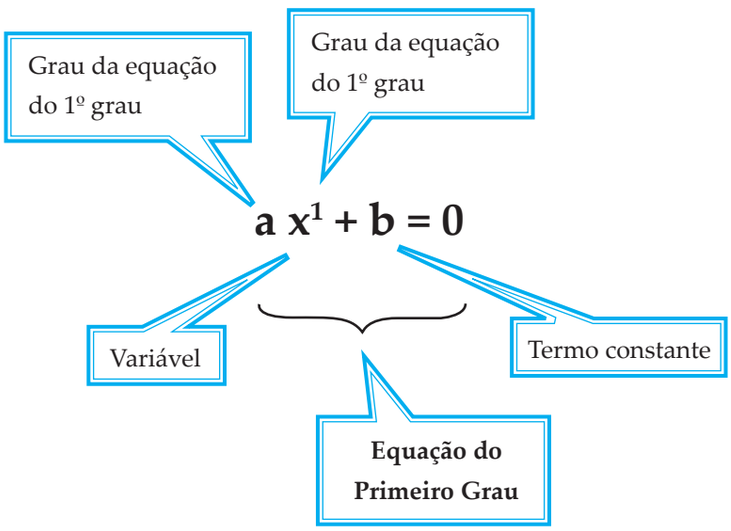
onde n é um número inteiro positivo (número natural).

Passaremos agora a estudar as principais equações algébricas.

Equação do primeiro grau

É toda equação do tipo $ax + b = 0$, com $a \neq 0$. Chamada de **equação do primeiro grau.** Este nome vem do fato de que, nesse tipo de equação, a incógnita ou número desconhecido (x) aparece com expoente 1, ou seja, $x = x^1$.

Uma equação é dita do **primeiro grau** quando pode ser reduzida à forma $\mathbf{a\,x + b = 0}$, sendo a e b números quaisquer e $a \neq 0$.



Exemplos de equações do primeiro grau.

1. $2x = -3$
2. $3x - 5 = 75$
3. $x = 5$
4. $\frac{3x}{5} - 7 = 85$

Operações válidas

1. a – b = c ⇒ a = c + b

Verdade, pois a – b = c ⇒ a – b + b = c + b ⇒ a = c + b
(+b)

2. a : b = c ⇒ a = c . b

Verdade, pois $\frac{a}{b} = c \Rightarrow \frac{a}{b} . b = c . b \Rightarrow \frac{a.b}{b} = c . b \Rightarrow a = c . b$
(xb)

3. a . b = c ⇒ a = c : b

Verdade, pois $\frac{a}{b} = c \Rightarrow \frac{a.b}{b} = \frac{c}{b} \Rightarrow a = \frac{c}{b}$

Redução de uma equação do primeiro grau à forma ax + b = 0

Vejamos, como reduzir uma equação do primeiro grau à forma **a x + b = 0.**

$$3x + 1 = 10$$

$$3x + 1 - 10 = 0$$

$$3x - 9 = 0$$

Equação colocada na forma ax + b = 0

Na equação 3x – 9 = 0, temos que a = 3, b = - 9. E x = 9/3 = 3 é sua solução

Raiz de uma equação do primeiro grau

Resolver uma equação do primeiro grau ax + b = 0, significa encontrar o valor desconhecido x, mas, para isso, é necessário realizar uma série de operações que nos conduzam a equações equivalentes cada vez mais simples e que nos permitam, finalmente, determinar os elementos do conjunto verdade ou as raízes da equação

($x = \frac{-b}{a}$). O valor desconhecido é chamado de raiz da equação. O conjunto formado por todas as raízes de uma equação, e somente por elas, é denominado **conjunto solução da equação.**

Na seqüência, detalharemos as operações necessárias para a resolução de uma equação do primeiro grau e, em seguida, definiremos o que são equações equivalentes.

Vamos resolver a equação do primeiro grau 2x + 3 = 25.

Na equação 2x + 3 = 25, procuramos o valor de x que torne esta igualdade verdadeira. Vamos ver uma maneira de encontrar a **solução de uma equação.**

Primeiro passo. Isolar x.
Para isolar o x, precisamos excluir a parcela (+3) do primeiro termo da igualdade. Sabemos que (+ 3 – 3 = 0), então precisamos somar, de ambos os lados da equação, o valor (-3). Assim, o valor

$$2x + 3 = 25$$
$$2x + 3 - 3 = 25 - 3$$
$$2x + 0 = 22$$
$$2x = 22$$

Segundo passo. Ainda não isolamos x. Quanto vale x se é preciso multiplicá-lo por 2 para obter 25.

Precisamos ficar apenas com a variável x no primeiro termo. Sabemos que (2 : 2 = 1 e 1 . x = x), então precisamos dividir ambos os lados da equação por (2). Assim,

$$2x = 22$$
$$x = 22 / 2$$
$$x = 11$$

Terceiro passo. Verificar a resposta. **A resposta de uma equação** é o valor de x que, ao substituir o valor desconhecido, torna a sentença verdadeira. Substituímos o valor x = 11 na equação dada.

$$2x + 3 = 25$$
$$2 . 11 + 3 = 25$$
$$22 + 3 = 25$$
$$25 = 25 \text{ (verdade)}$$

Quarto passo. Dar a resposta.
Resposta. Para x = 11 a igualdade dada torna-se verdadeira

Veja outras equações resolvidas dessa maneira.

1. 4 + 12 x = 64

$4 + 12x = 64$	Equação dada.	Verificando a resposta.
$-4 + 4 + 12x = 64 - 4$	Adicionar (-4) a ambos os lados da igualdade.	$4 + 12x = 64$, para $x = 5$
$12x = 60$		$4 + 12 . 5 = 64$
$\frac{12}{12}x = \frac{60}{12}$	Dividindo por (12) a ambos os lados da igualdade.	$4 + 60 = 64$
$x = 5$	Resposta da equação.	$64 = 64$ (verdade)

2. $\frac{3}{2}x - 2 = x - 22$

$\frac{3}{2}x - 2 = x - 22$	Equação dada.	Verificando a resposta.
$\frac{3}{2}x - 2 - x = x - 22 - x$	Adicionar (-x) a ambos os lados da igualdade.	$\frac{3}{2}x - 2 = x - 22$, para $x = -40$
$\frac{3}{2}x - x - 2 = -22$		$\frac{3}{2}.(-40) - 2 = -40 - 22$
$\frac{3}{2}x - x - 2 = -22$	Tirando o mínimo de ambos os lados da igualdade.	$-60 - 2 = -62$
$\frac{3x - 2x - 4}{2} = \frac{-44}{2}$	Efetuando a diferença de 3x com 2x.	$-62 = -62$ (verdade)
$\frac{x-4}{2} = \frac{-44}{2}$	Multiplicando por (2) ambos os lados da igualdade.	
$2.\left(\frac{x-4}{2}\right) = 2.\left(\frac{-44}{2}\right)$	Como 2 / 2 = 1 , arrumando a equação de ambos os lados da igualdade.	
$x - 4 = -44$	Adicionado (+4) de ambos os lados da igualdade.	
$x - 4 + 4 = -44 + 4$		
$x = -40$	Resultado da equação.	

É claro, o processo de resolução de uma equação pode ser feito de forma mais direta, mas só devemos passar para este depois de entendido o porque dos passos realizados. Vejamos como ficariam os exemplos feitos anteriormente.

1ª equação	2ª equação	3ª equação
$2x + 3 = 25$	$4 + 12x = 64$	$\frac{3}{2}x - 2 = x - 22$
$2x = 25 - 3$	$12x = 64 - 4$	$\frac{3}{2}x - x = -22 + 2$
$2x = 22$	$12x = 60$	$\frac{3x - 2x}{2} = -20$
$x = \frac{22}{2}$	$x = \frac{60}{12}$	$\frac{x}{2} = -20$
$x = 11$	$x = 5$	$x = = -40$

Das equações resolvidas, observamos que as operações a seguir sempre valem:

•Duas equações são equivalentes quando a resposta de uma é igual à resposta da outra.

Exemplos.

1. $5x = 3$
   $x = 3 / 5$
   } Equações equivalentes

2. $x - 2 = 5$
   $x = 5 + 2$
   $x = 7$
   } Equações equivalentes

• Adicionar ou subtrair um mesmo termo aos dois lados de uma equação, não alteramos a sua resposta.

Exemplo.

1. $5 = 5$ (+ 2) em ambos os lados
   $5 + 2 = 5 + 2$
   $7 = 7$ (verdade)
   } Equações equivalentes

Observação. Partimos de uma igualdade verdadeira, adicionamos (+2) de ambos os lados da igualdade e ela continuou uma igualdade verdadeira. Agora observe a próxima situação.

Exemplo.

$5 = 5$ (+ 2) só no primeiro membro da igualdade
$5 + 2 = 5$
$7 \neq 5$ (falso)

Observação. Partimos de uma igualdade verdadeira, adicionamos (+2) somente de um lado da igualdade e obtivemos uma igualdade falsa, porque só adicionamos (+2) de um lado da igualdade.

• Não alteramos a raiz de uma equação quando multiplicamos ou dividimos os dois lados da igualdade por um mesmo número diferente de zero.

Exemplos.

1. $5 \cdot 2 = 5 \cdot 2$ (x 2) em ambos os lados
   $10 = 10$ (verdade)

2. $6 : 2 = 6 : 2$ (: 2) em ambos os lados
   $3 = 3$ (verdade)

Observação. Partimos de uma igualdade verdadeira, multiplicamos (x 2) ou dividimos (: 2) de ambos os lados da igualdade e ela continuou verdadeira.

Para quaisquer números reais a, b e c, se $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

Para quaisquer números reais a, b e c, se $a = b \Rightarrow a - c = b - c$

Para quaisquer números reais a, b e c, se $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$

Para quaisquer números reais a, b e c, com $c \neq 0$ se $a = b \Rightarrow a : c = b : c$

É muito importante mostrarmos aos alunos onde ele usará esse tipo de cálculo. Vejam as situações-problema descritas na próxima seção.

Aplicações da equação do primeiro grau

Situação-problema 1. Uma tábua de 96 cm foi serrada em dois pedaços, sendo que um deles é duas vezes mais longo que o outro. Quanto mede cada pedaço?

Chamemos o pedaço menor de x e o maior de 2 x. O tamanho da tábua é 96 cm.

Pedaço menor + pedaço maior = 96 cm

$x + 2x = 96$

Resolvendo.

$x + 2x = 96$
$3x = 96$
$x = 96 / 3 = 32$

Logo, o pedaço menor mede x = 32 cm e como o maior é
2. x = 2 . 32 = 64cm.

Situação-problema 2. No final do ano letivo, Denise e Maria resolveram dar aulas particulares e ganharam R$ 110,00 juntos. Acontece que Denise trabalhou bem mais que Maria e por isso vai ganhar uma parte maior desse dinheiro. Denise vai ganhar R$ 20,00 a mais que o dobro do que Maria ganhar. Quanto cada uma vai receber?

Chamamos o quanto Maria vai ganhar de x.
Chamamos o quanto Denise vai receber 2x + 20.
A quantia total a ser dividida é 110.

Maria vai ganhar + Denise vai ganhar = 110

$x + (2x + 20) = 110$

Resolvendo.

$$x + (2x + 20) = 110$$
$$x + 2x + 20 = 110$$
$$3x + 20 = 110$$
$$3x = 110 - 20$$
$$3x = 90$$
$$x = 90 / 3 = 30$$

Logo, Maria vai ganhar R$ 30,00 e Denise vai receber R$ 80,00
(2 . x + 20 = 2 . 30 + 20 = 80) .

Pesquise em livros didáticos situações-problema que podem ser resolvidas após serem expressas por igualdades. Apresente as soluções destas situações-problema. Postam suas atividades no MATERIAL DO ALUNO.

Lista de exercícios II

Situação-problema 1. Resolva as equações dadas, justificando seus passos.

a) $2x + 3 = 17$
b) $7x - 2 = 3x + 5$
c) $5x - 12 = -16$

d) $x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{5}$

e) $\frac{x}{3} + 9 = 45$

f) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{2} + \frac{1}{10} = x$

g) $\frac{2x}{5} - \frac{x}{2} - \frac{1}{10} = 5x$

Situação-problema 2. Resolva as equações dadas, pelo processo prático.

a) $3(x + 1) + 2 = -4 - 5(1 - x)$

b) $(2x - 7)(-3) - 4(2 - x) = -1$

c) $3(x + 1) - (4 + 2x) = -13$

d) $\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{3}x + x$

e) $2x - 2 = 3(x - 1)$

f) $0{,}4(x - 2) = 0{,}1(1 - x)$

g) $2\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{x}{2} = 0$

Situação-problema 3. Joaquim pergunta a Pedro: - Pedro, eu tinha uma certa quantia e gastei R$ 12,50, ficando com R$ 22,50 no bolso. Qual é a quantia que eu possuía?

Situação-problema 4. Em uma caixa há bolas brancas e vermelhas, num total de 360. Se o número de bolas vermelhas é quatro vezes maior que o de bolas vermelhas, qual o número de bolas brancas?

Situação-problema 5. Numa campanha, cada aluno de uma classe de 21 alunos contribuiu com uma mesma quantia. Se o total arrecadado nessa classe foi de R$ 63,00, com quanto cada aluno contribuiu?

Situação-problema 6. Verificar se o número 4 é raiz da equação $9a - 4 = 8 + 6a$.

Situação-problema 7. Verificar se o número – 3 é raiz da equação $2x - 3 = 3x + 2$.

Situação-problema 8. Resolva a equação 2x - 5 = 1 e justifique seus passos.

Situação-problema 9. Resolva a equação $\frac{-3x}{4} = \frac{5}{6}$ e justifique seus passos.

Situação-problema 10. Resolva a equação
2 . (x - 2) - 3 . (1 - x) = 2 . (x - 4) e justifique seus passos.

Capítulo II

INEQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Qualquer sentença aberta que utilizar um dos símbolos a seguir, será chamada de inequação.

$<$	menor
$>$	maior
$\leq$	menor ou igual
$\geq$	maior ou igual

Portanto, uma sentença aberta será chamada de **inequação** se for expressa por uma desigualdade. Resolvemos uma inequação da mesma maneira que feito para uma equação. Nas desigualdades, o objetivo é obter um conjunto de todas os possíveis valores que pode assumir uma ou mais incógnitas na equação proposta.

Propriedades de uma desigualdade

Para quaisquer números reais a, b e c, se $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ e $a - c < b - c$.

Para quaisquer números reais a, b e c, se $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ e $a - c > b - c$.

Para quaisquer números reais a, b e c, se $a < b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$, para $c > 0$.

Para quaisquer números reais a, b e c, se $a < b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$, para $c < 0$.

Para quaisquer números reais a, b e c, se $a < b \Rightarrow a : c = b : c$, para $c > 0$

Para quaisquer números reais a, b e c, se $a < b \Rightarrow a : c = b : c$, para $c < 0$

Observação. Quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo, para obter desigualdades verdadeiras temos de inverter o sinal. Por exemplo

$-1 < 3 \quad (-1)$
$1 < -3$ (FALSO)

Logo, para ser verdadeira devemos trocar o sinal ($1 > -3$).

Consideremos a seguinte situação-problema.

Situação-problema 1. Numa escola vai ser formada uma comissão por professores e alunos para discutir as novas normas de funcionamento desta. O número de professores deve ser maior que o quádruplo do número de alunos. Se há 16 professores, quantos alunos podem fazer parte da comissão?

Seja x o número de alunos, sabemos que:

número de professores > quádruplo do número de alunos

$16 > 4x$

Resolvendo:

$16 > 4x \quad (:4)$
$16 / 4 > x$
$4 > x$

Logo, o número de alunos da comissão deve ser formado por qualquer conjunto com menos de 4 alunos, ou somente por professores.

Vejamos alguns exemplos.

1. $4 + 12x > 64$

$4 + 12x > 64$	Inequação dada.	Verificando a resposta.
$-4 + 4 + 12x > 64 - 4$	Adicionar (-4) ae ambos os lados da desigualdade.	$4 + 12x > 64$, para $x > 5$, consideremos $x = 6$
$12x > 60$		$4 + 12 . 6 > 64$
$12 / 12x > 60 / 12$	Dividir por (12) a ambos os lados da desigualdade.	$4 + 72 > 64$
$x > 5$	Resposta da inequação.	$76 > 64$ (verdade)

2. $\frac{3}{2}x - 2 \geq x - 22$

$\frac{3}{2}x - 2 \geq x - 22$	Inequação dada.	Verificando a resposta.
$\frac{3}{2}x - 2 - x \geq x - 22 - x$	Adicionar (-x) a ambos os lados da desigualdade.	$\frac{3}{2}x - 2 \geq x - 22$, para $x \geq -40$, consideremos $x = -40$
$\frac{3}{2}x - x - 2 \geq -22$		$\frac{3}{2}.(-40) - 2 \geq -40 - 22$
$\frac{3}{2}x - x - 2 \geq -22$	Tirando o mínimo de ambos os lados da desigualdade.	$-60 - 2 \geq -62$
$\frac{3x - 2x - 4}{2} \geq \frac{-44}{2}$	Efetuando a diferença de 3x com 2x.	$-62 = -62$ (verdade)
$\frac{x-4}{2} \geq \frac{-44}{2}$	Multiplicando por (2) ambos os lados da desigualdade.	
$2.\left(\frac{x-4}{2}\right) \geq 2.\left(\frac{-44}{2}\right)$	Como 2 / 2 = 1 , arrumando a equação de ambos os lados da igualdade.	
$x - 4 \geq -44$	Adicionado (+4) de ambos os lados da igualdade.	
$x - 4 + 4 \geq -44 + 4$		
$x \geq -40$	Resultado da equação.	

3. $4 - 12x > 64$

$4 - 12x > 64$	Inequação dada.	Verificando a resposta.
$-12x > 64 - 4$	Adicionar (-4) a ambos os lados da igualdade.	$4 - 12x > 64$, para $x < -5$, consideremos $x = -6$
$-12x = 60$	Multiplicar por (-1) a ambos os lados da desigualdade.	$4 - 12.(-6) > 64$
$12x < -60$	Dividindo por (12) a ambos os lados da igualdade.	$4 + 72 > 64$
$x = -60 / 12$		$76 > 64$ (verdade)
$x < -5$	Resposta da equação.	

Porque trocamos o sinal da inequação, depois de multiplicarmos por (-1) de ambos os lados da desigualdade?

4. 4 (x - 3) - 12 x ≤ 2 (x-2)

$4 (x - 3) - 12 x \leq 2 (x-2)$	Inequação dada.	Verificando a resposta.
$4x - 12 - 12 x \leq 2x - 4$	Propriedade distributiva.	$4 (x - 3) - 12 x \leq 2 (x-2)$, $x \geq \frac{-8}{10}$ consideraremos $x = \frac{-8}{10}$
$-8x \leq 2x - 4 + 12$		$4\left(\frac{-8}{10} - 3\right) - 12\left(\frac{-8}{10}\right) \leq 2\left(\frac{-8}{10} - 2\right)$
$-8x \leq 2x + 8$	Adicionar (-2x) a ambos os lados da desigualdade.	$4\left(\frac{-8}{10} - \frac{-30}{10}\right) + \left(\frac{-96}{10}\right) \leq 2\left(\frac{-8}{10} - \frac{-20}{10}\right)$
$- 8x - 2x \leq 8$		$\left(\frac{-156}{10}\right) + \left(\frac{-96}{10}\right) \leq \frac{-56}{10}$
$-10x \leq 8$ (-1)	Multiplicar por (-1) a ambos os lados da desigualdade.	$\left(\frac{-60}{10}\right) \leq \frac{-56}{10}$
$10x \geq - 8$	Dividir por (10) a ambos os lados da desigualdade.	$- 60 \leq -56$ (-1)
$x \geq \frac{-8}{10}$	Resposta da inequação.	60 > 56 (verdade)

Lista de exercícios III

1. Dê o conjunto solução de cada equação dada.

a) $10x - 40 = 0$ b) $2x + 1 = 11$ c) $4x - 2 = 0$

d) $4x - 6 + x = 3x - 25$ e) $2x - \frac{1}{3} = 3x - 54$ f) $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{3}{4} - 25$

g) $36 = 4z - 16$ h) $\frac{4}{m - 1} = 1 + m$ i) $\frac{s}{2} - 1 = 0$

j) $3 (x - 2) + 1 = 22$ k) $2 (1 - x) - 3 (x + 1) > 82$

2. Dê o conjunto solução de cada inequação dada.

a) $14x - 140 > 2x$ b) $-2x + 5 < 18$ c) $4x - 2(x - 2) > 0$

d) $-x - 5 + 7x < -25$ e) $4x - 2(x - 2) > 0$ f) $-\frac{1}{2}x - 2 \leq \frac{3}{4} - 25$

g) $36 \geq 4z - 16$ h) $\frac{8}{m - 1} < 1 + m$ i) $\frac{s}{2} - 6 \geq 2$

j) $3(x - 2) + 5x \geq 122$ k) $2(1 - x) - 3(x + 1) > 82$

3. Pedro tem 3 anos a menos que Carlos. A soma das idades dos dois é 17 anos. Qual é a idade de cada um?

4. Maria e Josefa colecionam botões. Maria tem o dobro de botões que tem Josefa. Quantos botões têm cada uma, se juntas têm 90 botões?

5. O número de meninas numa classe é 1/4 do número de meninos. Se há e meninas, quantos meninos há na classe?

6. Num sítio há gansos e coelhos. O número de coelhos é 3 unidades a menos que o número de gansos. Um dia, o filho do dono resolveu contar o total de patas e anotou 36 patas. Quantos gansos há no sítio? Quantos coelhos?

Capítulo III

SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Vimos que uma **equação do primeiro grau com uma incógnita** é aquela em que o termo de maior grau na equação esta elevada à potência 1. Este tipo de equação poderá ter mais do que uma incógnita.

Pesquise a definição de **equação do primeiro grau com duas incógnitas.**

Um **sistema de equações do primeiro grau** em duas incógnitas x e y, é um conjunto formado por duas equações do primeiro grau nessas duas incógnitas. **Resolver** este sistema de equações é o mesmo que obter os valores de x e de y que satisfazem simultaneamente a ambas as equações.

Resolução do sistema linear de equações do primeiro grau

Temos vários métodos auxiliares na resolução de uma equação **do primeiro grau** em duas incógnitas x e y . Vejamos alguns destes.

Método da substituição

Consiste em isolar o valor algébrico de uma das variáveis, por exemplo x, e, aplicar o resultado a outra equação.

1º PASSO. Escolhemos uma das variáveis (x ou y) e expressamos uma das variáveis em termos da outra. Isto é, isolando x em função de y da primeira equação.

$$\begin{cases} x+3y=8 \quad (1^a) \\ -3x+6y=1 \quad (2^a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8-3y \quad (1^a) \\ -3x+6y=1 \quad (2^a) \end{cases}$$

2º PASSO. Substituímos x = 8 – 3y na segunda equação e a resolvemos.

$$\begin{cases} x=8-3y \quad (1^a) \\ -3(8-3y)+6y=1 \quad (2^a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8-3y \quad (1^a) \\ -24+9y+6y=1 \quad (2^a) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=8-3y \quad (1^a) \\ -24+15y=1 \quad (2^a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8-3y \quad (1^a) \\ 15y=1+24 \quad (2^a) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=8-3y \quad (1^a) \\ y=\dfrac{25}{15} \quad (2^a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8-3y \quad (1^a) \\ y=\dfrac{25}{15}=\dfrac{5}{3} \quad (2^a) \end{cases}$$

3º PASSO. Substituímos y = 5/3 na primeira equação e a resolvemos.

$$\begin{cases} x=8-3\left(\dfrac{5}{3}\right) \quad (1^a) \\ y=\dfrac{5}{3} \quad (2^a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8-5 \quad (1^a) \\ y=\dfrac{5}{3} \quad (2^a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \quad (1^a) \\ y=\dfrac{5}{3} \quad (2^a) \end{cases}$$

4º PASSO. Dar a resposta do sistema.

Solução. x = 3 e y = 5/3.

5º PASSO. Verificar a validade da resposta, substituindo x = 3 e y = 5/3 no sistema dado.

$$\begin{cases} x+3y=8 \quad (1^a) \\ -3x+6y=1 \quad (2^a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+3.\dfrac{5}{3}=8 \quad (1^a) \\ -3.3+6\dfrac{5}{3}=1 \quad (2^a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+5=8 \quad (1^a) \\ -9+10=1 \quad (2^a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8=8 \quad (\textit{verdade}) \\ 1=1 \quad (\textit{verdade}) \end{cases}$$

Método da adição

Consiste em somar a primeira equação dada à segunda equação. Quando somamos um mesmo número a cada membro da equação, obtemos outra equação com o mesmo conjunto solução da original. Utilizamos este método de forma a eliminar uma das variáveis na equação soma.

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} x + y = 12 \\ -x + y = 6 \end{cases}$

1º PASSO. Somamos a primeira equação à segunda.

$$\begin{cases} x + y = 12 \quad (1^a) \\ -x + y = 6 \quad (2^a) \end{cases}$$

$$x - x + y + y = 12 + 6$$
$$2y = 18$$
$$y = 18 / 2 = 9$$

2º PASSO. Substituímos y = 9 na primeira equação e a resolvemos.

$$x + y = 12 \Rightarrow x + 9 = 12 \Rightarrow x = 12 - 9 \Rightarrow x = 3$$

3º PASSO. Dar a resposta do sistema.

Resposta. x = 3 e y = 9

4º PASSO. Verificar a validade da resposta, substituindo x = 3 e y = 9 no sistema dado.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ -x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 9 = 12 \\ -3 + 9 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 = 12 \quad (\textit{verdade}) \\ 6 = 6 \quad (\textit{verdade}) \end{cases}$$

Método da comparação

Consiste em comparar a primeira equação dada à segunda equação.

Consideremos o sistema: $\begin{cases} x + y = 12 & (I) \\ -x + y = 6 & (II) \end{cases}$

1º PASSO. Isolamos uma das variáveis em ambas as equações. Vamos isolar o x.

$$\begin{cases} x + y = 12 & (I) \\ -x + y = 6 & (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 - y & \\ -x = 6 - y & (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 - y & (I) \\ x = -6 + y & (II) \end{cases}$$

2º PASSO. Vamos comparar esses valores, fazendo x = x.

$\begin{cases} x = 12 - y \\ x = -6 + y \end{cases}$ $\Rightarrow$ x = x $\Rightarrow$ 12 – y = -6 + y $\Rightarrow$ -y – y = -6 – 12 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ -2y = -18 $\Rightarrow$ 2y = 18 $\Rightarrow$ y = 18/2 = 9

3º PASSO. Substituir o valor encontrado para y em qualquer uma das equações iniciais. Vamos substituir y = 9 na equação I.

x = 12 – y $\Rightarrow$ x = 12 - 9 = 3

4º PASSO. Verificar a resposta. Vamos verificar a validade da resposta, substituindo x = 3 e y = 9 no sistema dado.

$$\begin{cases} x = 12 - y & (I) \\ x = -6 + y & (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 12 - 9 & (I) \\ 3 = -6 + 9 & (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3 & (V) \\ 3 = 3 & (V) \end{cases}$$

5º PASSO. Dar a resposta.

A solução do sistema é (3, 9).

Lista de exercícios IV

a) Resolver os sistemas, usando o processo da substituição.

1. $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=8 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5x-y=16 \\ 7x+3y=18 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=-\frac{1}{3} \\ x-\frac{y}{8}=\frac{5}{2} \end{cases}$
5. $\begin{cases} 4x=6-9y \\ 9x=6+4y \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x-y=6 \\ \frac{3x}{4}-\frac{y}{3}=1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} \frac{x-8}{3}-\frac{y}{6}=\frac{1}{6} \\ \frac{x-23}{4}+\frac{y}{6}=\frac{1}{6} \end{cases}$
8. $\begin{cases} x+y=12 \\ 2x+3y=29 \end{cases}$

b) Resolver os sistemas, usando o processo da adição.

1. $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -8x+2y=-10 \\ 10x-2y=11 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 7x+3y=1 \\ x-3y=7 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=8 \end{cases}$
5. $\begin{cases} -x-y=14 \\ x-y=2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{y}{2}=10 \\ x-y=29 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 2x+y=15 \\ 3x-2y=15 \end{cases}$

c) Resolver os sistemas, usando o processo da comparação.

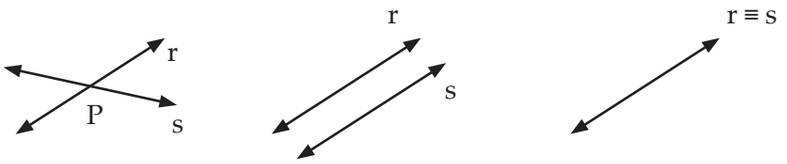
1. $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 2x-3y=-16 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 4x-3y=5 \\ 7x-3y=11 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 12x-5y=-3 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x-5y=17 \\ 5x-7y=31 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{y}{2}=10 \\ x-y=29 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 2x+y=15 \\ 3x-2y=15 \end{cases}$

Soluções através de gráficos

A solução através de um sistema linear de equação do primeiro grau pode ser vista através do esboço do gráfico das duas retas que compõe o sistema linear, pois, um sistema com duas equações de primeiro grau em 2 incógnitas sempre pode ser interpretado como um conjunto de duas retas localizadas no plano cartesiano.

$$\begin{cases} ax + by = c & \text{(Reta 1)} \\ dx + ey = f & \text{(Reta 2)} \end{cases}$$

Essas retas no plano podem ser concorrentes (interceptam num único ponto P), paralelas (sem ponto de interseção) e coincidentes (interceptam-se em infinitos pontos).



Vejamos alguns exemplos para tirarmos algumas conclusões.

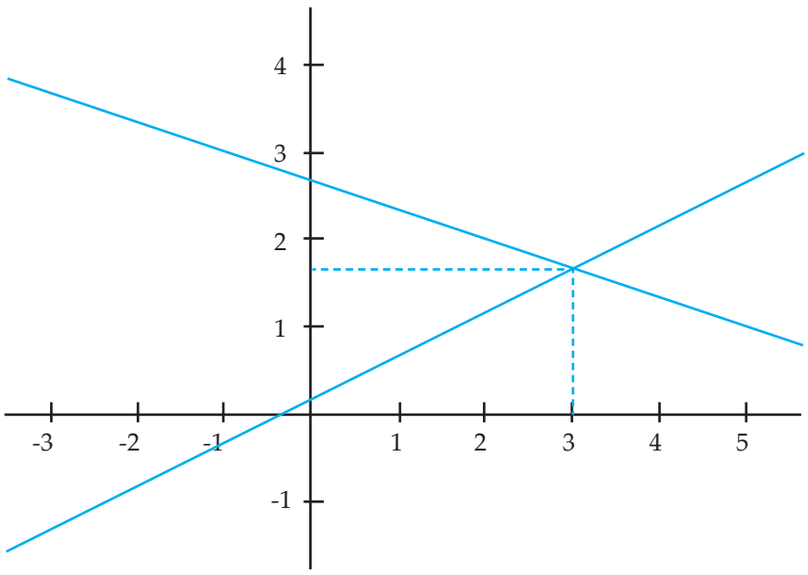
1. Consideremos o seguinte sistema: $\begin{cases} x + 3y = 8 & (1) \\ -3x + 6y = 1 & (2) \end{cases}$

Vamos encontrar sua solução através do gráfico de suas equações.

1º PASSO. Isolar a variável y em ambas as equações.

$$\begin{cases} x + 3y = 8 & (1) \\ -3x + 6y = 1 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 8 - x & (1) \\ 6y = 1 + 3y & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{8 - x}{3} & (1) \\ y = \dfrac{1 + 3x}{6} & (2) \end{cases}$$

2º PASSO. Vamos traças as retas (1 e 2) no mesmo plano cartesiano.



3º PASSO. Dar a resposta.

(3;1,7)

4º PASSO. Verificar a resposta.

$$y=\frac{8-x}{3} \quad e \quad y=\frac{1+3x}{6} \Rightarrow y=\frac{8-x}{3}=\frac{1+3x}{6} \Rightarrow x=3$$

e substituindo x = 3 em $y=\frac{8-x}{3}$, temos y = 1,7.

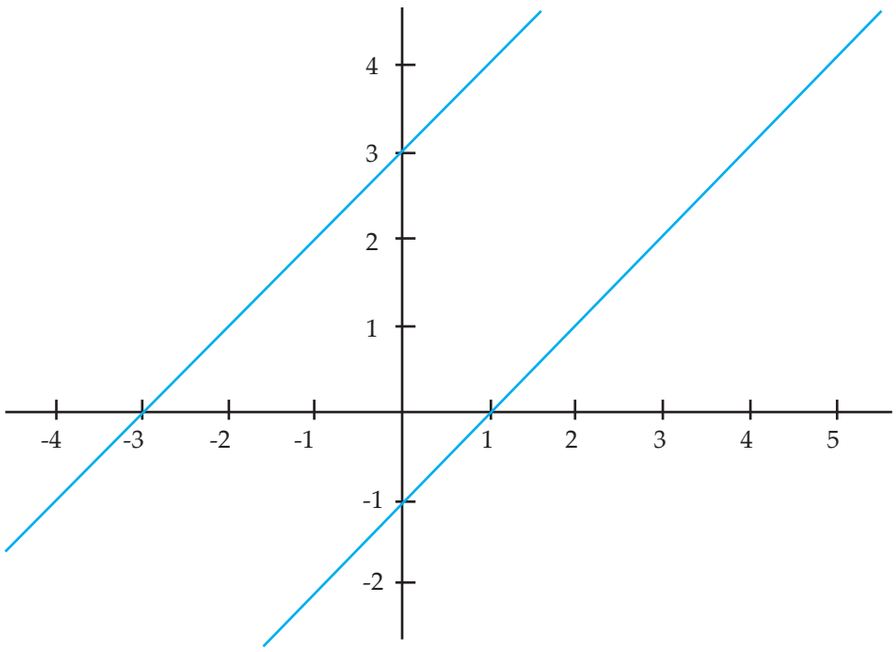
2. Consideremos o seguinte sistema: $\begin{cases} y-1=x & (1) \\ y-3=x & (2) \end{cases}$

Vamos encontrar sua solução através do gráfico de suas equações.

1º PASSO. Isolar a variável y em ambas as equações.

$$\begin{cases} y-1=x & (1) \\ y-3=x & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1 & (1) \\ y=x+3 & (2) \end{cases}$$

2º PASSO. Vamos traças as retas (1 e 2) no mesmo plano cartesiano.



3º PASSO. Dar a resposta.

Sem solução. as retas são paralelas, nunca se interceptam.

4º PASSO. Verificar a resposta.

$y = x - 1$ e $y = x + 3 \Rightarrow y = x - 1 = x + 3 \Rightarrow 0 = 2$ (falso)

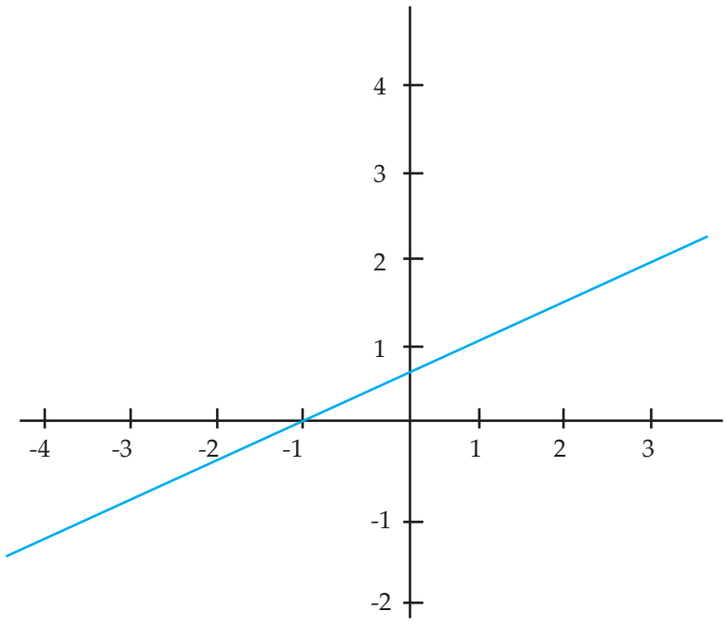
3. Consideremos o seguinte sistema: $\begin{cases} x - 2y = -1 & (1) \\ -2x + 4y = 2 & (2) \end{cases}$

Vamos encontrar sua solução através do gráfico de suas equações.

1º PASSO. Isolar a variável y em ambas as equações.

$$\begin{cases} x - 2y = -1 & (1) \\ -2x + 4y = 2 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y = -1 - x & (1) \\ 4y = 2 + 2x & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1+x}{2} & (1) \\ y = \dfrac{2+2x}{4} & (2) \end{cases}$$

2º PASSO. Vamos traças as retas (1 e 2) no mesmo plano cartesiano.



3º PASSO. Dar a resposta.

As retas são coincidentes. Infinitas soluções.

4º PASSO. Verificar a resposta.

$$y = \frac{1+x}{2} \quad e \quad y = \frac{2+2x}{4} \Rightarrow y = \frac{1+x}{2} = \frac{2+2x}{4} \Rightarrow 0 = 0 \text{ (verdade)}$$

Observando as soluções dos itens 1, 2 e 3 percebemos que

• Se as duas retas traçadas tiverem um ponto comum, isto é, se elas se cruzam num único ponto, este ponto é parte do conjunto solução do sistema.

• Se as duas retas traçadas não tiverem um ponto comum, isto é, se elas são paralelas, o conjunto solução do sistema é vazio.

• Se as duas retas traçadas tiverem infinitos pontos em comum, isto é, se elas coincidentes, o conjunto solução do sistema admite infinitas soluções.

Sistemas indeterminados e sistemas impossíveis

Vamos estudar sistemas que não têm solução e sistemas que apresentam infinitas soluções.

1. Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} x - 2y = 1 \quad (1) \\ x - 2y = 2 \quad (2) \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \quad (1) \\ x - 2y = 2 \quad (2) \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \quad (1) \\ x = 2 + 2y \quad (2) \end{cases} \Rightarrow 2 + 2\,y - 2y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0y = -1 \quad (?)$$

A igualdade 0y = -1 é impossível. Não existe nenhum valor de y que multiplicado por zero resultarem -1.

Solução do sistema: Impossível.

2. Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} x + y = 4 \quad (1) \\ 2x + 2y = 8 \quad (2) \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = 4 \quad (1) \\ 2x + 2y = 8 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \quad (:2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$$

Substituindo y = 4 – x em (2), temos $x + y = 4 \Rightarrow x + 4 - x = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0y = 0$ (V).

A igualdade 0y = 0 ou 0 = 0 é possível. Qualquer que seja o valor atribuído para y que multiplicado por zero resulta zero, assim dizemos que y pode assumir infinitos valores.

Solução do sistema. Possível e indeterminado.

Lista de exercícios V

a) Resolver os problemas abaixo usando sistemas.

1. A diferença entre dois números é 18 e a soma entre eles é 82. Determiná-los.

2. A soma de dois números é 12 e sua diferença é 2. determiná-los.

3. Determine dois números sabendo que a quinta parte de um deles é igual à metade do outro e que a soma dos dois é igual a 28.

4. A população de uma cidade A é o triplo da população da cidade B. Se as duas cidades juntas têm uma população de 100.000 habitantes, quantos habitantes tem a cidade B?

5. A soma de dois números é 36. Determiná-los sabendo que um é o dobro do outro.

6. A soma das idades de dois irmãos é 25 anos. Um é mais novo que o outro 5 anos. Determine suas idades.

7. Um número é formado por dois algarismos cuja soma é igual a 10. Determine esse número sabendo que o algarismo das dezenas supera o outro em 4 unidades.

8. A diferença de dois números é 16. Determiná-los sabendo que um é o triplo do outro.

9. A soma das idades de André e Carlos é 22 anos. Descubra as idades de cada um deles, sabendo-se que André é 4 anos mais novo do que Carlos.

10. Uma casa com 260m^2 de área construída possui 3 quartos de mesmo tamanho. Qual é a área de cada quarto, se as outras dependências da casa ocupam 140m^2?

b) Determinar graficamente a solução de cada sistema.

1. $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x-y=4 \\ 10x-2y=10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x-y=4 \\ x=8-y \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x+3y=1 \\ x-3y=7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ y=2x+4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y=7 \\ y=5-x \end{cases}$

c) Resolva os sistemas usando o processo mais conveniente.

1. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 2 = y + 3 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3(x-1) = y + 1 \\ y - 1 = 2(x+1) \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x + 3y = 1 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

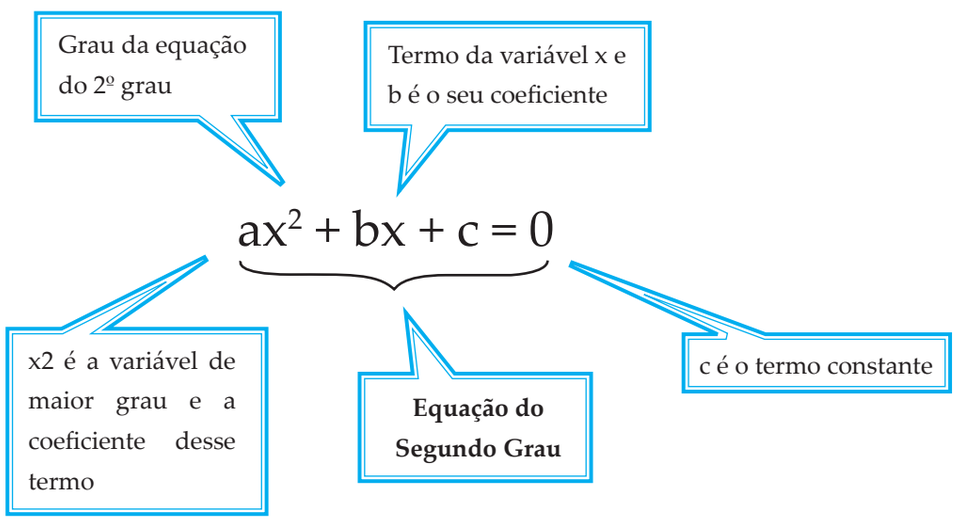
8. $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 5 - x \end{cases}$

Estudamos, anteriormente, a equação do primeiro grau, seus métodos de resolução e algumas aplicações. Agora passaremos a buscar uma maneira de resolver uma equação do segundo grau ou quadrática.

Capítulo IV

EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Uma **equação do segundo grau** na incógnita x é da forma $a x^2 + b x + c = 0$, na qual os números reais a, b e c são os coeficientes da equação, sendo que a deve ser diferente de zero. Essa equação é também chamada de **equação quadrática**, pois o termo de maior grau está elevado ao quadrado.



Encontrar as **raízes** de uma equação do segundo grau nada mais é do que buscar a solução de uma equação do segundo grau. A **fórmula de Bháskara** é a fórmula geral para a resolução de equações do segundo grau.

Um fato curioso da História da Matemática

Esta fórmula não foi descoberta por Bháskara, mas pelo matemático hindu Sridhara, pelo menos um século antes da publicação de Bháskara, fato reconhecido pelo próprio Bháskara. O que aconteceu é que o material construído pelo hindu Sridhara não chegou até nós.

O objetivo dele foi buscar uma forma de reduzir a equação do segundo grau a uma do primeiro grau, através da extração de raízes quadradas de ambos os membros da mesma.

Raiz de uma equação do segundo grau

Como saber se um número é **solução ou raiz** da equação do segundo grau? Devemos obedecer à seguinte seqüência.

- Substituir a incógnita por esse número.
- Determinar o valor de cada membro da equação.
- Verificar a igualdade, sendo uma sentença verdadeira, o número considerado é raiz da equação.

Vamos verificar se o número $x = 1$ é raiz da equação $2x^2 - 4x + 2 = 0$. Basta substituirmos na equação dada o valor $x = 1$. Assim, $1(1)^2 - 4 .1 + 2 = 0 \Rightarrow 1 = 1$ (verdade). Logo, o número 1 é raiz da equação ou seja conjunto solução.

Como resolver uma equação do segundo grau

Resolver uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, significa encontrar o valor desconhecido x, mas para isso é necessário realizar uma série de operações que nos conduzam a equações equivalentes cada vez mais simples e que nos permitam, finalmente, determinar os elementos do conjunto verdade ou as raízes da equação.

O valor desconhecido é chamado de **raiz** da equação. O conjunto formado por todas as raízes de uma equação, e somente por elas, é denominado **conjunto solução da equação.**

Na seqüência detalharemos as operações necessárias para a resolução de uma equação do segundo grau.

Consideremos a equação do segundo grau $ax^2 + b x + c = 0$, com $a \neq 0$ dada.

EQUAÇÃO DO 2º GRAU	JUSTIFICATIVAS
$ax^2 + b\,x + c = 0$	Equação dada.
$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 + (b/a)\,x + c/a = 0$	(: a) com a ≠ 0.
$x^2 + (b/a)\,x = -\,c/a$	Passando o termo c/a para o segundo membro.
$x^2 + (b/a)\,x + (b/2a)^2 = -\,c/a + (b/2a)^2$	Fazendo com que o lado esquerdo da equação seja um quadrado perfeito, para isto, somaremos o quadrado de (b/2 a) a ambos os membros da equação.
$[\,x+(b/2a)\,]^2 = (b^2 - 4ac) / 4a^2$	Simplificando ambos os lados da equação.
$x + (b/2a) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	Extraindo a raiz quadrada de cada membro da equação e observando que a raiz quadrada de todo número real não negativo é também não negativa.
$x = \pm\sqrt{\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}} - \frac{b}{2a}$	Passando (b/2a) para o segundo membro da equação.
$x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$	Arrumando.
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Raízes (2) da equação do 2º grau.

A expressão $x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ nos dá as raízes de uma equação do segundo grau. Ela pode ser reescrita da seguinte forma

$x = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ com $\Delta = b^2 - 4$ a c.

O Δ também é chamado de discriminante.

Exemplos.

1. Vamos resolver a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$.

EQUAÇÃO DO 2º GRAU	JUSTIFICATIVAS
$x^2 - 3x + 2 = 0$	Equação dada.
$a = 1,\ b = -3$ e $c = 2$	Coeficientes da equação.
$x = -\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Fórmula resolutiva.
$x = -\dfrac{(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.2}}{2.1}$	Substituindo os valores de a, b e c.
$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$	Resolvendo.
$x_1 = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$	Primeira raiz.
$x_2 = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$	Segunda raiz.

Temos como solução da equação duas raízes reais: $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.

Verificando:
$x^2 - 3x + 2 = 0$ para $x_1 = 2$
$22 - 3(2) + 2 = 0$
$4 - 6 + 2 = 0$
$0 = 0$ (V)

$x^2 - 3x + 2 = 0$ para $x_2 = 1$.
$1 - 3 + 2 = 0$
$0 = 0$ (V)

2. Vamos resolver a equação $x^2 + 2x + 1 = 0$.

EQUAÇÃO DO 2º GRAU	JUSTIFICATIVAS
$x^2 + 2x + 1 = 0$	Equação dada.
$a = 1,\ b = 2$ e $c = 1$	Coeficientes da equação.
$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Fórmula resolutiva.
$x = -\frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.1}}{2.1}$	Substituindo os valores de a, b e c.
$x = -\frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -\frac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$	Resolvendo.
$x_1 = -\frac{2+0}{2} = -\frac{2}{2} = -1$	Primeira raiz.
$x_2 = -\frac{2-0}{2} = -\frac{2}{2} = -1$	Segunda raiz.

Temos como solução da equação uma única raiz real: $x_1 = x_2 = -1$.

3. Vamos resolver a equação $x^2 + 1 = 0$.

EQUAÇÃO DO 2º GRAU	JUSTIFICATIVAS
$x^2 + 1 = 0$	Equação dada.
$a = 1,\ b = 0$ e $c = 1$	Coeficientes da equação.
$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Fórmula resolutiva.
$x = -\frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4.1.1}}{2.1}$	Substituindo os valores de a, b e c.
$x = -\frac{0 \pm \sqrt{0-4}}{2} = -\frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2}$	Resolvendo.
$x = -\frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2}$	Não existem raízes reais que satisfaçam a equação dada.

Não encontramos nenhum valor de x que satisfaça a equação $x^2 + 1 = 0$.

Observações.

Como percebemos na resolução dos três exercícios anteriores, que uma equação do segundo grau pode ter até 2 raízes reais, sendo assim,

• Na equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ obtivemos duas raízes reais e distintas, que foram $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.
• Na equação $x^2 + 2x + 1 = 0$ obtivemos uma única raiz real, $x_1 = x_2 = -1$.
• Na equação $x^2 + 1 = 0$ não obtivemos nenhuma raiz real.

Estes fatos se devem ao discriminante Δ que pode assumir um valor positivo, ou zero ou um valor negativo.

• Se $\Delta > 0$ então a equação tem duas raízes reais e distintas.
• Se $\Delta = 0$ então a equação tem uma única raiz real ou, equivalentemente, duas raízes reais e iguais.
• Se $\Delta < 0$ então a equação não tem raiz real.

Equação completa do segundo grau

Uma equação do segundo grau é dita **completa**, se todos os coeficientes a, b e c são diferentes de zero.

Exemplos.

1. $4x^2 + 14x + 10 = 0$
2. $x^2 + 2x + 1 = 0$

Observação. A obtenção da solução de uma equação do segundo grau pode ser feita através da soma e produto das raízes, sendo esta equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a = 1$. Se a equação não estiver desta forma deve ser transformada. Por exemplo, na equação $5x^2 - 7x - 6 = 0$, devemos dividi-la por 5.

Na equação $x^2 - 8x + 15 = 0$ seja $s = x_1 + x_2 = 8$ e $p = x_1 . x_2 = 15$.

Através de tentativas obtemos $s = 5 + 3 = 8$ e $p = 5 . 3 = 15$.

Logo, as raízes são $x_1 = 5$ e $x_2 = 3$.

Na equação $\mathbf{x^2 - sx + p = 0}$ a soma das raízes é **s** e o produto é **p**.

Observação. A fórmula de Bhaskara é necessária, pois mesmo conhecendo a soma e o produto das raízes de uma equação do segundo grau, ainda, em alguns casos, é muito difícil de descobri-las. É pura sorte.

Equação incompleta do segundo grau

Uma equação do segundo grau é dita incompleta se b = 0 ou c = 0 ou b = c = 0. Na equação incompleta o coeficiente a é diferente de zero ($a \neq 0$).

Exemplos.

1. $x^2 + 3x = 0$
2. $3x^2 + 27 = 0$
3. $2x^2 = 0$
4. $x^2 = 0$

Resolução de equações incompletas do segundo grau

PRIMEIRO CASO. Vamos trabalhar com equações do tipo $ax^2 = 0$.

Queremos resolver as equações do segundo grau do tipo $ax^2 = 0$, em que b = c = 0.

1º PASSO. Dividir toda a equação por a.

$$ax^2 = 0 \Rightarrow \frac{ax^2}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 = 0$$

2º PASSO. Dar a solução.

A equação possui duas raízes iguais a zero.

SEGUNDO CASO. Vamos trabalhar com equações do tipo $ax^2 + c = 0$.

Queremos resolver as equações do segundo grau do tipo $ax^2 + c = 0$, em que $b = 0$.

1º PASSO. Dividir toda a equação por a.

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow \frac{ax^2 + c}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

2º PASSO. Dar a solução. Neste caso a solução depende dos valores de c e de a.

- Se $\frac{-c}{a}$ for negativo, então não existe solução em R.

- Se $\frac{-c}{a}$ for positivo, a equação terá duas raízes reais com o mesmo valor absoluto (módulo) mas de sinais contrários.

TERCEIRO CASO. Vamos trabalhar com equações do tipo $ax^2 + bx = 0$.

Queremos resolver as equações do segundo grau do tipo $ax^2 + bx = 0$, em que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$.

1º PASSO. Fatorar a equação dada.

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$$

2º PASSO. Encontrar as raízes da equação.

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

3º PASSO. Dar a solução.

A equação tem duas raízes reais $x = 0$ e $x = \frac{-b}{a}$.

Equações fracionárias do segundo grau

As equações do segundo grau que apresentam a incógnita no denominador são chamadas de **equação fracionárias.**

Exemplos.

a) $\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x-3}=0$ b) $\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}=0$ c) $\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{2x}$

Resolução de equações fracionárias do segundo grau

Para resolver uma equação fracionária do segundo grau devemos seguir os seguintes passos.

Vamos resolver a seguinte equação $\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}=0$

1º PASSO. Eliminar os valores de x que anulam os denominadores.

Resolução da Equação	Justificativas dos Passos
$\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}=0$	Equação dada
$\frac{3}{(x-2)(x+2)}+\frac{1}{x-2}=0$	Fatorando $(x^2-4)=(x-2)(x+2)$

2º PASSO. Encontramos o mínimo múltiplo comum de todos os termos dos denominadores das frações, quando for o caso.

Resolução da Equação	Justificativas dos Passos
$\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}=0$	Equação dada
$\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}=0$	Sabemos que $(x^2-4)=(x-2)(x+2)$ E mmc é $(x-4)^2$

Resolução da Equação	Justificativas dos Passos
$\frac{3}{(x-4)^2}+\frac{(x+2)}{(x-4)^2}=\frac{0}{(x-4)^2}$	
$\frac{3+(x+2)}{(x-4)^2}=\frac{0}{(x-4)^2}$	Arrumando a equação
$3+x+2=0$	Eliminando os denominadores ou multiplicando por $(x-4)^2$ de ambos os lados da equação
$x=-2-3=-5$	Solução da equação.

3º PASSO. Verificando a solução.

Substituindo x = -5 na equação $\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}=0$, temos:

$$\frac{3}{(-5)^2-4}+\frac{1}{(-5)-2}=0 \Rightarrow \frac{3}{25-4}+\frac{1}{-5-2}=0 \Rightarrow \frac{3}{21}+\frac{1}{-7}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{21}-\frac{3}{21}=0 \Rightarrow 0=0 \text{ (V)}$$

Logo, x = - 5 é solução da equação.

Lista de exercícios VI

1. Resolver as equações do segundo grau.

a) $4x^2=0$
b) $4x^2-8=0$
c) $4x^2+5=0$
d) $4x^2-12x=0$

2. Resolver as equações incompletas do segundo grau.

a) $x^2+5x=0$ b) $6x^2=0$ c) $-1x^2+8=0$
d) $2x^2+5=0$ e) $150x^2=0$ f) $9x^2-68=0$
g) $x^2=4$ h) $x^2=-4$ i) $x^2=0$
j) $4-x^2=0$ k) $-3=x^2-68$ l) $3x^2-4+15x^2=0$

3. Calcular o discriminante de cada equação e analisar as raízes em cada caso.

a) $x^2 + 9x + 8 = 0$
b) $9x^2 - 24x + 16 = 0$
c) $x^2 - 2x + 4 = 0$
d) $3x^2 - 15x + 12 = 0$
e) $10x^2 + 72x - 64 = 0$
f) $x^2 + 6x + 9 = 0$
g) $3x^2 - x + 3 = 0$
h) $2x^2 - 2x - 12 = 0$
i) $3x^2 - 10x + 3 = 0$
j) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12} = 0$
k) $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{4}{9} = 0$
l) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$
m) $\frac{1}{4}x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$

4. Resolver as equações do segundo grau fracionárias.

a) $x + \frac{6}{x} = -7$
b) $\frac{(x+2)}{(x+1)} = \frac{2x}{(x-4)}$
c) $\frac{(2-x)}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$
d) $\frac{(x+2)}{(x-2)} = -\frac{(x-2)}{(x+2)} + 1$

Capítulo V

EQUAÇÕES BI-QUADRADAS

Equações bi-quadradas são equações de quarto grau na incógnita x. Sua forma geral é $(ax^4 + bx^2 + c) = 0$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

As equações da forma $(ax^4 + bx^2 + c) = 0$ pode ser escrita como uma equação do segundo grau através da substituição da variável x^2 por y.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow a(x^2)^2 + b(x^2) + c = 0 \text{ onde } x^4 = (x^2)^2$$

Na equação dada $(ax^4 + bx^2 + c) = 0$, fazendo a troca de $y = x^2$ obtemos $ay^2 + by + c = 0$. Esta equação pode ser resolvida como uma equação do segundo grau.

$$a(x^2)^2 + b(x^2) + c = 0 \Leftrightarrow ay^2 + by + c = 0$$
$$x^2 = y$$

Aplicamos a fórmula quadrática $y = -\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para obter as soluções y_1 e y_2.
Mas, temos $y_1 = x^2$ ou $y_2 = x^2$.

Cuidado! Pois podemos ter y_1 ou y_2 negativo e não existirá solução real para x.

Exemplo.

1. Vamos resolver a equação bi-quadrada $36 - 13x^2 + x^4 = 0$.

Resolução da Equação	**Justificativas dos Passos**
$36 - 13x^2 + x^4 = 0$	Equação dada
$36 - 13x^2 + x^4 = 0$	Fazendo a troca de $y = x^2$
$36 - 13y + y^2 = 0$	Nova Equação
$y = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Fórmula resolutiva da equação
$y = -\frac{(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4.1.36}}{2}$	Substituindo a = 1, b = -13 e c = 36
$y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2}$	Resolvendo a equação.
$y = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$	Resolvendo a equação.
$y_1 = \frac{13 + 5}{2} = \frac{18}{2} = 9$	Primeira raiz
$y_2 = \frac{13 - 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$	Segunda raiz
$y_1 = 9$ temos $\Rightarrow x^2 = y = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $y_2 = 9$ temos $\Rightarrow x^2 = y = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$	Temos dois valores para y, trocando $y = x^2$
$x = \pm 3$ e $x = \pm 2$	Soluções da equação.

Resposta. S = { 2, -2, 3, -3}.

Capítulo VI

EQUAÇÕES IRRACIONAIS

As equações que possuem a variável sob radical são chamadas de **equações irracionais** em x.

Por exemplos.

1. $\sqrt{x} = 2$
2. $\sqrt{x-2} + x = 5$
3. $\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x-1}$

Observações.

Na solução das equações irracionais, vamos considerar que:

- $\sqrt{a} = +\sqrt{a}$
- $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$
- $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2}$

Elevando-se a uma potência conveniente ambos os membros de uma equação racional, obtém-se uma **equação racional**.

Temos vários casos para analisar.

1º CASO. A equação irracional apresenta apenas um radical.

Vamos resolver a equação irracional $\sqrt{x}+4+2=x$

Resolução da Equação	Justificativas dos Passos	Verificando
$\sqrt{x}+4+2=x$	Equação dada	$\sqrt{x}+4+2=x$ Para x = 4
$\sqrt{x}=x-6$	Isolando o radical num dos membros.	$\sqrt{4}+4+2=4$
$(\sqrt{x})^2=(x-6)^2$	Elevando-se ao quadrado ambos os membros da equação.	2 + 4 + 2 = 4
$x=x^2-12x+36$	Resolvendo a equação.	8 = 4 (F) Portanto, x = 4 não é solução.
$x^2-12x-x+36=0$	Resolvendo a equação.	
$x^2-13x+36=0$	Resolvendo a equação.	$\sqrt{x}+4+2=x$ Para x = 9
$x=-\frac{(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4.1.36}}{2}$	Substituindo a = 1, b = -13 e c = 36	$\sqrt{9}+4+2=9$
$x=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}$	Resolvendo a equação.	3 + 4 + 2 = 9
$x=\frac{13\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{13\pm5}{2}$	Resolvendo a equação.	(V) x = 9 é solução.
$x_1=\frac{13+5}{2}=\frac{18}{2}=9$	Primeira raiz	
$x_2=\frac{13-5}{2}=\frac{8}{2}=4$	Segunda raiz	
x = 4 e x = 9	Possíveis soluções da equação.	

Portanto, x = 9 é solução da equação irracional dada.

2º CASO. A equação irracional apresenta dois radicais.

Vamos resolver a equação irracional $\sqrt{x+7}-3=\sqrt{2x}-4$

Resolução da Equação	Justificativas dos Passos
$\sqrt{x+7}-3=\sqrt{2x}-4$	Equação dada
$\sqrt{x+7}=\sqrt{2x}-4+3$	Isolando um dos radicais.
$\sqrt{x+7}=\sqrt{2x}-1$	Resolvendo a equação.
$(\sqrt{x+7})^2=(\sqrt{2x}-1)^2$	Elevando-se ao quadrado ambos os membros da equação.
$x+7=2x-2\sqrt{2x}+1$	Resolvendo a equação.
$x-2x+2\sqrt{2x}-1+7=0$	Resolvendo a equação.
$-x+2\sqrt{2x}+6=0$	Ainda não é uma equação racional.

Estamos com a equação $-x+2\sqrt{2x}+6=0$, que ainda não é racional, então devemos continuar , no caso vamos repetir todo o processo.

Resolução da Equação	Justificativas dos Passos	Verificando
$-x+2\sqrt{2x}+6=0$	Equação encontrada	$\sqrt{x+7}-3=\sqrt{2x}-4$ Para x = 2
$2\sqrt{2x}=x-6$	Isolando o radical.	$\sqrt{9}-3=\sqrt{4}-4$
$(2\sqrt{2x})^2=(x-6)^2$	Elevando-se ao quadrado ambos os membros da equação.	3 - 3 = 2 - 4
$4.\sqrt{(2x)^2}=x^2-12x+36$	Resolvendo a equação.	0 = -2 (Falso)

$8x = x^2 - 12x + 36$	Resolvendo a equação.	
$x^2 - 12x - 8x + 36 = 0$	Resolvendo a equação.	$\sqrt{x+7} - 3 = \sqrt{2x} - 4$ Para x = 18
$x^2 - 20x + 36 = 0$		$\sqrt{25} - 3 = \sqrt{36} - 4$
$x = -\frac{(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4.1.36}}{2}$	Substituindo a = 1, b = - 20 e c = 36	5 - 3 = 6 - 4
$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 144}}{2}$	Resolvendo a equação.	2 = 2 (verdade)
$x = \frac{20 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{20 \pm 16}{2}$	Resolvendo a equação.	
$x_1 = \frac{20 + 16}{2} = \frac{36}{2} = 18$	Primeira raiz	
$x_2 = \frac{20 - 16}{2} = \frac{4}{2} = 2$	Segunda raiz	
x = 2 e x = 18	Possíveis soluções da equação.	

Portanto, x = 18 é solução da equação irracional dada.

3º CASO. A equação irracional apresenta mais de dois radicais.

Vamos resolver a equação irracional $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+9} = \sqrt{7x+8}$

Resolução da Equação	**Justificativas dos Passos**
$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+9} = \sqrt{7x+8}$	Equação dada.
$(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+9})^2 = (\sqrt{7x+8})^2$	Elevando-se ao quadrado ambos os membros da equação.
$x + 1 + 2\sqrt{x+1} \,.\, \sqrt{2x+9} + 2x + 9 = 7x + 8$	Resolvendo a equação.
$2\sqrt{x+1} \,.\, \sqrt{2x+9} = 7x + 8 - x - 1 - 2x - 9$	Isolando os radicais.

$2\sqrt{x+1}\,.\,\sqrt{2x+9} = 4x-2$	Resolvendo a equação.
$2\sqrt{(x+1)(2x+9)} = 4x-2$	Resolvendo a equação.
$\left(2\sqrt{(x+1)(2x+9)}\right)^2 = (4x-2)^2$	Elevando-se ao quadrado ambos os membros da equação.
$4(x+1)\,.\,(2x+9) = 16x^2 - 16x + 4$	Resolvendo a equação.
$8x^2 + 44x + 36 = 16x^2 - 16x + 4$	Resolvendo a equação.
$-8x^2 + 60x + 32 = 0$	Resolvendo a equação.
$x = -\dfrac{(60) \pm \sqrt{(60)^2 - 4.(-8).32}}{2(-8)}$	Substituindo a = -8, b = 60 e c = 32
$x = \dfrac{60 \pm \sqrt{3600 - 1024}}{-16}$	Resolvendo a equação.
$x = \dfrac{60 \pm \sqrt{2576}}{-16}$	Resolvendo a equação.
$x_1 = \dfrac{60 + 50{,}7}{-16} = \dfrac{110{,}7}{-16} = -6{,}9$	Primeira raiz
$x_2 = \dfrac{60 - 50{,}7}{-16} = \dfrac{9{,}3}{-16} = -0{,}5$	Segunda raiz
x = -0,5 e x = -6,9	Possíveis soluções da equação.

Verificando x = -0,5 e x = -6,9 na equação dada, obtemos x = -6,9 como solução. Confira!

Portanto, x = -6,9 é solução da equação irracional dada.

4º CASO. Vamos resolver a equação irracional $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} = x$

Resolução da Equação	Justificativas dos Passos
$\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} = x$	Equação dada
$\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1}\right)^3 = (x)^3$	Elevando-se ao cubo ambos os membros da equação.
$x^3 + x^2 - 1 = x^3$	Resolvendo a equação.
$x^3 - x^3 + x^2 - 1 = 0$	Isolando os radicais.
$x^2 - 1 = 0$	Resolvendo a equação.
$x = -\frac{0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4.1.(-1)}}{2}$	Substituindo a = 1, b = 0 e c = -1
$x = -\frac{0 \pm \sqrt{4}}{2}$	Resolvendo a equação.
$x = \frac{0 \pm 2}{2}$	Resolvendo a equação.
$x_1 = \frac{0 + 2}{2} = 1$	Primeira raiz
$x_2 = \frac{0 - 2}{2} = -1$	Segunda raiz
x = 1 e x = -1	Possíveis soluções da equação.

Verificando x = -1 e x = 1 na equação dada, obtemos x = -1 e x = 1 como solução. Confira!

Portanto, x = -1 e x = 1 é solução da equação irracional dada.

Resumindo

Como resolver uma equação irracional.

1º Passo: Transformá-la numa equação racional.
2º Passo: Resolver essa equação racional.
3º Passo: Verificar se as raízes são soluções da equação irracional.

Lista de exercícios VII

1. Resolver as seguintes equações bi-quadradas.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
c) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
d) $-x^4 + 18x^2 - 81 = 0$
e) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$
f) $x^4 - 5x^2 + 21 = 0$

2. Resolver as seguintes equações irracionais.

a) $\sqrt{x+3} = 1$
b) $\sqrt{2+x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{7}$
c) $\sqrt{2x^2 - 1} = x$
d) $\sqrt{x^2 - 100} - x = 10$
e) $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x-1} = -2$
f) $\sqrt{7 + \sqrt{4x-1}} = 2\sqrt{2}$

Capítulo VII

INEQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Inequação do segundo grau na variável x é toda inequação que puder ser expressa sob uma das formas:

- $a\,x^2 + b\,x + c > 0$
- $a\,x^2 + b\,x + c < 0$
- $a\,x^2 + b\,x + c \geq 0$
- $a\,x^2 + b\,x + c \leq 0$

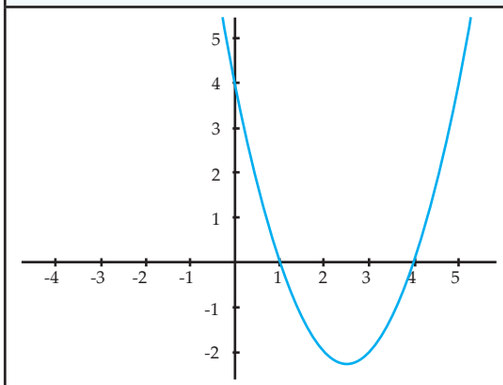
Resolução de uma inequação do segundo grau

Os passos são os mesmos que estudamos na resolução de uma inequação do primeiro grau.

Vejamos alguns exemplos.

1. $x^2 - 5\,x + 4 > 0$

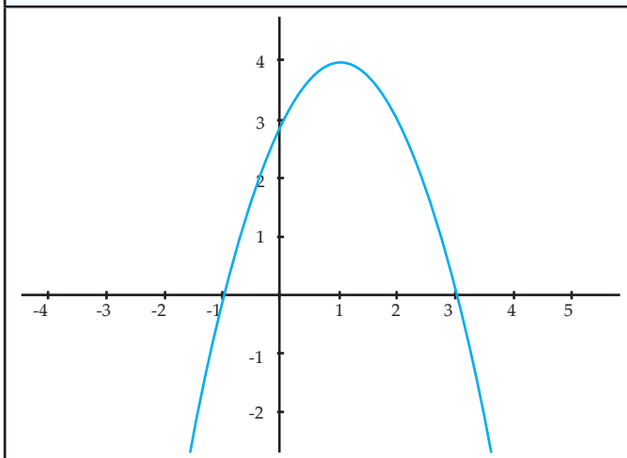
Inequação dada.	**Justificativa**	**Verificando a resposta.**
$x^2 - 5\,x + 4 > 0$	Encontrando o zero da função quadrática.	$x^2 - 5\,x + 4 > 0$, para $x < 1$, consideremos $x = 0$
$x = -\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Fórmula resolutiva da equação	$0 - 0 + 4 > 0$ $4 > 0$ (V)
$x = -\dfrac{(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 41.4}}{2\,.\,1}$	Substituindo a = 1, b = -5 e c = 4 na fórmula.	

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$	Resolvendo.	**x2 - 5 x + 4 > 0,** para x > 4, consideremos x = 5
$x_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$	Primeira raiz.	25 – 25 + 4 > 0 4 > 0 (V)
$x_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$	Segunda raiz.	
	Gráfico	
	Onde x^2 - 5 x + 4 > 0	
x < 1 ou x > 4	Resposta da inequação.	

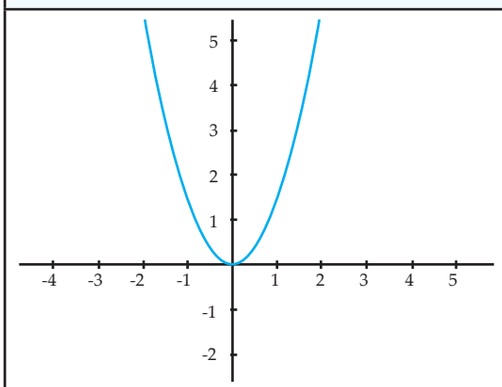
Resposta da inequação: x < 1 ou x > 4

2. $-x^2 + 2x + 3 > 0$

Inequação dada.	**Justificativa**	**Verificando a resposta.**
$-x^2 + 2x + 3 = 0$	Encontrando o zero da função quadrática.	- x2 + 2 x + 3 > 0, para -1 < x < 3, consideremos x = 0
$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Fórmula resolutiva da equação	-0 + 0 + 3 > 0 3 > 0 (V)
$x = -\frac{2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-1).3}}{2 \,.\, (-1)}$	Substituindo a = -1, b = 2 e c = 3 na fórmula.	

$x = -\frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = -\frac{2 \pm \sqrt{16}}{-2} = -\frac{2 \pm 4}{-2}$	Resolvendo.	
$x_1 = \frac{-2+4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$	Primeira raiz.	
$x_2 = \frac{-2-4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$	Segunda raiz.	
	Gráfico	
$-1 < x < 3$	Onde $x^2 - 5x + 4 > 0$	

3. $x^2 > 0$

Inequação dada.	**Justificativa**	**Verificando a resposta.**
$x^2 = 0$	Encontrando o zero da função quadrática.	$x^2 > 0$ para $x < 0$, consideremos $x = -1$
$x_1 = x_2 = 0$	Raízes da equação do 2º .	$(-1)^2 > 0$
	Gráfico.	$1 > 0$ (v)

	Resposta da inequação.	$x^2 > 0$ para $x > 0$, consideremos $x = 1$
$x > 0$ e $x < 0$	Onde $x^2 > 0$.	$(1)^2 > 0$ (v)

Inequação produto

Inequações produto são do tipo $y \cdot y' > 0$, $y \cdot y' < 0$, $y \cdot y' \geq 0$, $y \cdot y' \leq 0$, em que y e y' são polinômios quadráticos.

1º CASO. $y \cdot y' > 0$

Consideremos a inequação $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 8x + 15) > 0$. Uma inequação do tipo produto pode ser decomposta no estudo de dois polinômios quadráticos: $y = x^2 - 6x + 8$ e $y = x^2 - 8x + 15$.

Como estamos procurando quais os valores de x no que tornam o produto de $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 8x + 15)$ positivo? Neste caso, temos que examinar a inequação a partir da seguinte análise:

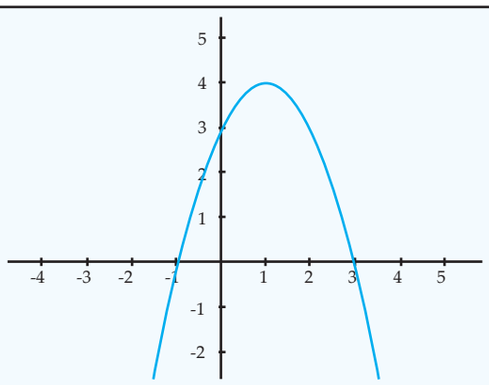
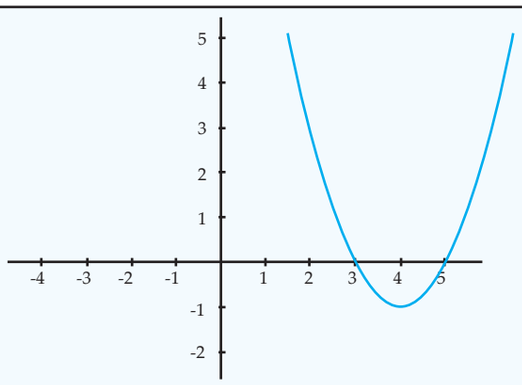
$$y \cdot y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \; ou \; y' > 0 \\ y < 0 \; ou \; y' < 0 \end{cases}$$

Observação. Sabemos que $+ \cdot + > 0$, $- \cdot - > 0$ são os dois casos a analisar.

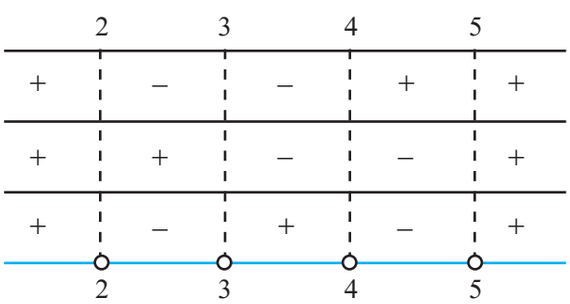
1. Resolvendo $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 8x + 15) > 0$

Vamos considerar $y > 0$ e $y' > 0$.

$x^2 - 6x + 8 > 0$	$x^2 - 8x + 15 > 0$
$x^2 - 6x + 8 = 0$	$x^2 - 8x + 15 = 0$
$x = -\dfrac{(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1).8}}{2 \cdot (1)}$	$x = -\dfrac{(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1).15}}{2 \cdot (1)}$
$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2}$	$x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{8 \pm 2}{2}$

$x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$	$x_1 = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$
$x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$	$x_2 = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$
	
• O sinal (–) indica que os valores de y são negativos entre as raízes. • O sinal (+) indica que os valores de y são positivos para os demais intervalos.	
$x < 2$ ou $x > 4$	$x < 3$ ou $x > 5$

Procuramos os valores de x que satisfazem $x < 2$ ou $x > 4$ e $x < 3$ ou $x > 5$ ao mesmo tempo.



Solução da inequação dada. $x < 2$ ou $3 < x < 4$ ou $x > 5$.

Vamos analisar o quadro solução apresentado anteriormente. Nele temos o estudo de sinais feito da seguinte forma:

Na **1ª linha** anotamos os valores de x que anulam y e os que anulam y'.

Na **2ª linha** anotamos os sinais de y em cada intervalo.
Na **3ª linha** anotamos os sinais de y′ em cada intervalo.
Na **4ª linha** anotamos os sinais de y . y′ em cada intervalo.

Obtemos a resposta. Na verdade estamos interessados nos valores de y e y′ que satisfaçam a equação y .y′>0.

2º CASO. y . y′ < 0

Consideremos a inequação $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 8x + 15) < 0$.

Uma inequação do tipo produto pode ser decomposta no estudo de duas funções quadráticas: $y = x^2 - 6x + 8$ e $y = x^2 - 8x + 15$.

Neste caso temos que examinar a inequação a partir da seguinte análise:

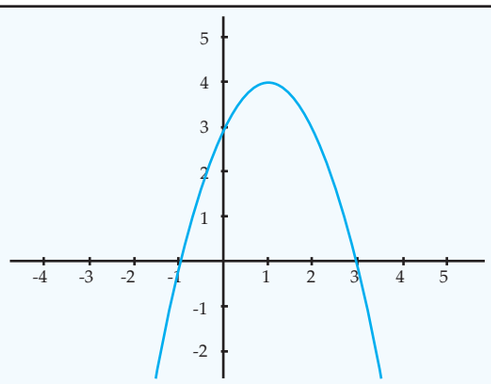
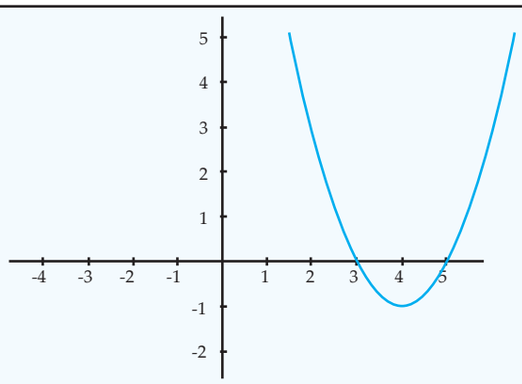
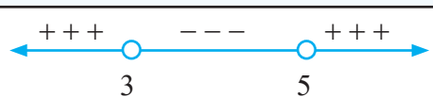
$$y \cdot y' < 0 \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \; ou \; y' > 0 \\ ou \\ y < 0 \; ou \; y' < 0 \end{cases}$$

Observação. Sabemos que + . - < 0 , - . + < 0 são os dois casos a analisar.

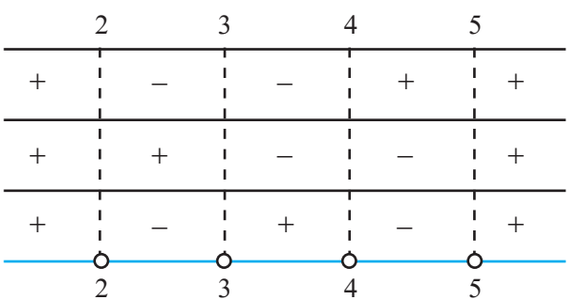
2. Resolvendo $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 8x + 15) < 0$

Vamos considerar y > 0 e y′ > 0.

$x^2 - 6x + 8 < 0$	$x^2 - 8x + 15 < 0$
$x^2 - 6x + 8 = 0$	$x^2 - 8x + 15 = 0$
$x = -\frac{(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1).8}}{2.(1)}$	$x = -\frac{(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1).15}}{2.(1)}$
$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$	$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$
$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$	$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$

$x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$	$x_1 = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$
$x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$	$x_2 = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$
	
	
• O sinal (–) indica que os valores de y são negativos entre as raízes. • O sinal (+) indica que os valores de y são positivos para os demais intervalos.	
$2 < x < 4$	$3 < x < 5$

Procuramos os valores de x que satisfazem $x < 2$ ou $x > 4$ e $x < 3$ ou $x > 5$ ao mesmo tempo.



Obtemos a resposta. Na verdade estamos interessados nos valores de y e y′ que satisfaçam a equação $y \,.y' < 0$.

Solução da inequação dada. $2 < x < 3$ ou $4 < x < 5$.

Inequação quociente

Inequações quociente são do tipo $\frac{y}{y'} > 0,\ \frac{y}{y'} < 0,\ \frac{y}{y'} \geq 0,\ \frac{y}{y'} \leq 0$ em que y e y′ são polinômios quadráticos.

1º CASO. $\frac{y}{y'} \geq 0$

Consideremos a inequação $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 15} \geq 0$, Uma inequação do tipo quociente pode ser decomposta no estudo de duas polinômios quadráticos: $y = x^2 - 6x + 8$ e $y = x^2 - 8x + 15$.

Como estamos procurando quais os valores de x que tornam o quociente de $\frac{y}{y'}$ positivo? Neste caso, temos que examinar a inequação a partir da seguinte análise:

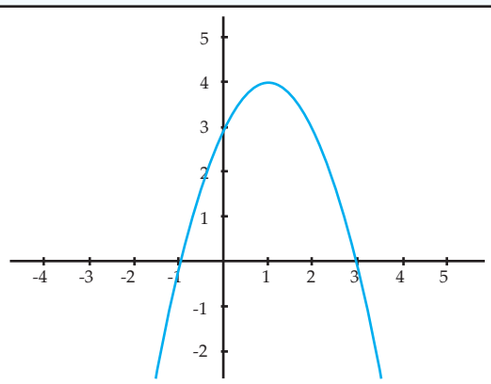
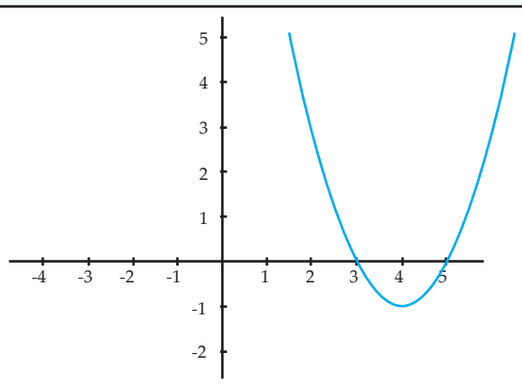
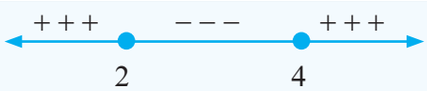
$$\frac{y}{y'} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \ ou \ y' > 0 \\ ou \\ y \leq 0 \ ou \ y' < 0 \end{cases}$$

Observação. Sabemos que + / + > 0 , - / - > 0 são os dois casos a analisar.

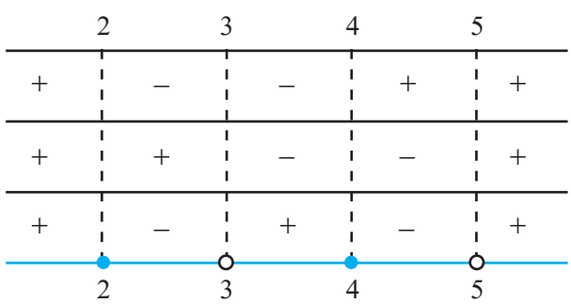
1. Resolvendo $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 15} \geq 0$

Vamos considerar $y \geq 0$ e $y' \geq 0$.

$x^2 - 6x + 8 \geq 0$	$x^2 - 8x + 15 > 0$
$x2 - 6x + 8 = 0$	$x^2 - 8x + 15 = 0$
$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1).8}}{2.(1)}$	$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1).15}}{2.(1)}$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$	$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$
$x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$	$x_1 = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$
$x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$	$x_2 = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$
	
	
• O sinal (–) indica que os valores de y são negativos entre as raízes. • O sinal (+) indica que os valores de y são positivos para os demais intervalos.	
$x \leq 2$ ou $x \geq 4$	$x \leq 3$ ou $x \geq 5$

Procuramos os valores de x que satisfazem $x \leq 2$ ou $x \geq 4$ e $x \leq 3$ ou $x \geq 5$ ao mesmo tempo.



Solução da inequação dada. $x \leq 2$ ou $3 < x \leq 4$ ou $x > 5$.

Observe na solução que os zeros do denominador não pertencem ao conjunto solução.

2º CASO. $\frac{y}{y'} \leq 0$

Consideremos a inequação $\frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 11x + 14} \leq 0$. Uma inequação do tipo quociente pode ser decomposta no estudo de duas funções quadráticas: $y = x^2 + x - 2$ e $y = 2x^2 - 11x + 14$.

Como estamos procurando quais os valores de x no que tornam o quociente de $\frac{y}{y'}$ negativo? Neste caso temos que examinar a inequação a partir da seguinte análise:

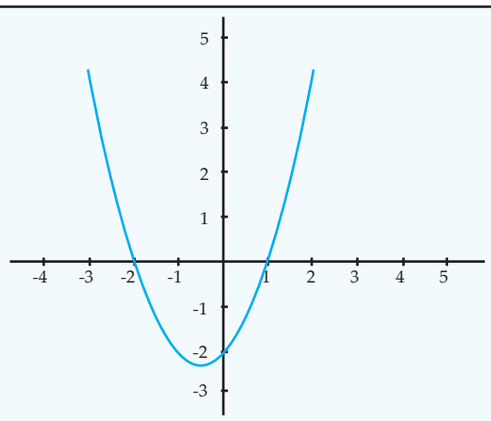
$$\frac{y}{y'} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} y \leq 0 \; ou \; y' > 0 \\ ou \\ y \geq 0 \; ou \; y' < 0 \end{cases}$$

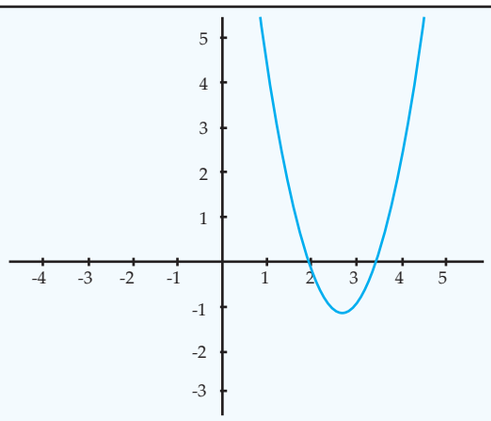
Observação. Sabemos que - / + ≤ 0 , + / - ≤ 0 são os dois casos a analisar.

1. Resolvendo $\frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 11x + 14} \leq 0$

Vamos considerar $y \geq 0$ e $y' \geq 0$.

$x^2 + x - 2 \geq 0$	$2x^2 - 11x + 14 < 0$
$x^2 + x - 2 = 0$	$2x^2 - 11x + 14 = 0$
$x = -\frac{1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1).(-2)}}{2.(1)}$	$x = -\frac{(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(2).14}}{2.(2)}$
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$	$x = \frac{11 \pm \sqrt{121-112}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{11 \pm 3}{4}$
$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$	$x_1 = \frac{11+3}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$
$x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$	$x_2 = \frac{11-3}{4} = \frac{8}{4} = 2$

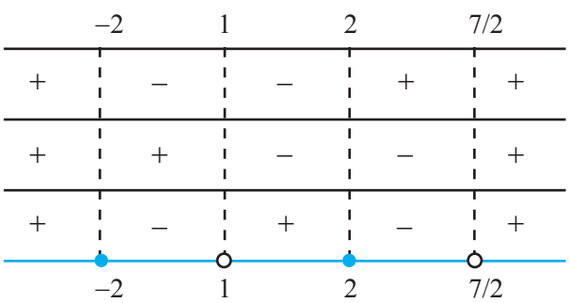




- O sinal (–) indica que os valores de y são negativos entre as raízes.
- O sinal (+) indica que os valores de y são positivos para os demais intervalos.

$x \leq -2$ ou $x \geq 1$	$2 < x < 7/2$

Procuramos os valores de x que satisfazem $x \leq 2$ ou $x \geq 4$ e $x \leq 3$ ou $x \geq 5$ ao mesmo tempo.



Solução da inequação dada. $-2 \leq x < 1$ ou $2 \leq x < 7/2$.

Lista de exercícios VIII

1. Resolva as inequações do segundo grau.

a) $3x^2 - 7x - 6 > 0$ b) $-9x^2 + 6x - 1 > 0$

c) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ d) $(3x^2 - 7x - 6)(-9x^2 + 6x - 1) > 0$

e) $3(x^2 + 4x + 4)(2x^2 - 5x + 3) \leq 0$

f) $(x^2 - 5x + 6)(3x^2 - 5x + 2) > 0$

g) $(x^2 - 4)(2x^2 + 5x + 3) > 0$ h) $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 9) > 0$

i) $(x^2 - 25)(x^2 - 4) \geq 0$ j) $(x^2 - 4x + 4)(2x^2 - 7x + 5) > 0$

k) $\frac{-x^2+3x-2}{x^2-4} \leq 0$

l) $\frac{3x^2-5x+2}{-x^2+5x-6} > 0$

m) $\frac{x^2-6x+9}{3x^2-75} \leq 0$

n) $\frac{x^2-9x+8}{x^2-4x-12} \geq 0$

o) $\frac{6x^2-13x+6}{5x^2+2x} \geq 0$

p) $\frac{x^2+x-2}{3x^2+3x} < 0$

q) $\frac{x^2-1}{-x^2+1} < 0$

r) $\frac{2x^2-5x+2}{-x^2+x+2} < 0$

s) $\frac{x^2+x-2}{-x^2+3x} \leq 0$

Capítulo VIII

SISTEMA LINEAR DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Vimos que uma **equação do segundo grau**, é aquela em que o termo de maior grau na equação está elevado à potência 2. Este tipo de equação poderá ter mais do que uma incógnita.

Um **sistema de equações do segundo grau** em duas incógnitas x e y, é um conjunto formado por duas equações do segundo grau nessas duas incógnitas. **Resolver** este sistema de equações é o mesmo que obter os valores de x e de y que satisfazem simultaneamente a ambas as equações.

Resolução do sistema linear de equações do segundo grau

Temos vários métodos auxiliares na resolução de uma **equação do segundo grau** em duas incógnitas x e y . Podemos utilizar o método da adição, o método da substituição ou o método da comparação. Esses métodos já foram estudados na resolução do sistema linear de equações do primeiro grau e não serão repetidos aqui, a única diferença é que estamos trabalhando com sistemas de equações do segundo grau em duas incógnitas x e y.

Exemplos.

1. Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \quad (I) \\ \underline{x^2 - y^2 = 1 \quad (II)} \end{cases}$ $\Rightarrow$Aplicando o método da Adição, temos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \quad (I) \\ x^2 - y^2 = 1 \quad (II) \end{cases}$$

$$2x^2 + 0y^2 = 6$$

$$x^2 = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Substituindo $x = \sqrt{3}$ na equação (II) temos

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow (\sqrt{3})^2 - y^2 = 1 \Rightarrow 3 - y^2 = 1 \Rightarrow -y^2 = 1 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y^2 = -2 \overset{(-1)}{\Rightarrow} y^2 = 2$$

Substituindo $x = -\sqrt{3}$ na equação (II) temos

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow (-\sqrt{3})^2 - y^2 = 1 \Rightarrow 3 - y^2 = 1 \Rightarrow -y^2 = 1 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y^2 = -2 \overset{(-1)}{\Rightarrow} y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

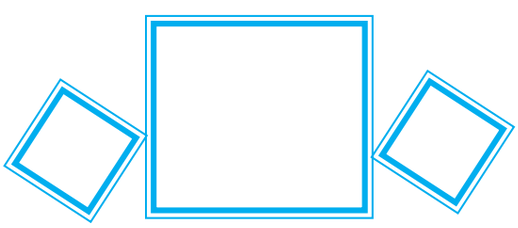
Portanto, temos como solução:

$(\sqrt{3}, \sqrt{2})$; $(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$; $(-\sqrt{3}, \sqrt{2})$; $(-\sqrt{3}, \sqrt{2})$

Verifiquem esta resposta!

Aplicações

Situação-problema 1. A figura dada é formada por três quadrados, sendo dois do mesmo tamanho. Se o perímetro total é de 12 cm e a área total é de 3,375 cm2, quais são as medidas dos lados dos quadrados?



Extraindo os dados do problema.
Seja x: lado dos quadrados menores (em cm) e y: lado do quadrado maior (em cm).

Resolvendo.

P = 12cm = 8x + 4y

A= 3,375 cm² = 2x² + y²

Temos então o seguinte sistema: $\begin{cases} 8x + 4y = 12 \\ 2x^2 + y^2 = 3{,}375 \end{cases}$

Vamos resolvê-lo pelo método da substituição.

$$\begin{cases} 8x + 4y = 12 \\ 2x^2 + y^2 = 3{,}375 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 12 \quad (:4) \\ 2x^2 + y^2 = 3{,}375 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 3{,}375 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 2x^2 + y^2 = 3{,}375 \end{cases}$$

Substituindo y = (3 - 2x) em 2x² + y² = 3,375, temos

$2x^2 + (3- 2x)^2 = 3{,}375 \Rightarrow 2x^2 + 9- 12x + 4x^2 = 3{,}375 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2 - 12x + 9 - 3{,}375 = 0 \Rightarrow 6x^2 - 12x + 9 - 3{,}375 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2 - 12x + 5{,}625 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.6.(5{,}625)}}{12} \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 135}}{12} = \frac{12 \pm \sqrt{9}}{12} = \frac{12 \pm 3}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{12 + 3}{12} = \dfrac{15}{12} = 1{,}25 \\ x_2 = \dfrac{12 - 3}{12} = \dfrac{9}{12} = 0{,}75 \end{cases}$$

Substituindo x_1= 1,25 na equação y = (3 - 2x), obtemos y = 3 – 2 (1,25) = 0,5. Esta resposta não serve, pois y deve ser maior que x.

Então, substituindo x_1= 0,75 na equação y = (3 - 2x), obtemos y = 3 – 2 (0,75) = 1,5. Esta resposta serve. Porquê?

Resposta. O lado do quadrado maior mede 1,5 cm e o lado dos quadrados menores mede 0,75 cm.

Lista de exercícios IX

1. Resolva os sistemas dados a seguir.

1. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 - y = 15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y = 27 \\ x^2 - y = 23 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \dfrac{y}{2} \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 - y = 10 \\ -x^2 - y = -22 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 = 0 \\ 4x^2 - 36 = 0 \end{cases}$

2. Resolva os exercícios dados a seguir.

a) $\sqrt{x+1} = 9$

b) $\sqrt{3x-1} = \sqrt{2x+4}$

c) $\sqrt{2x-1} = x - 3$

d) $x + \sqrt{2} + x = 5$

e) $\sqrt{3x} = 5x - 1$

f) $\sqrt{x} - 2 = x + 1$

g) $\sqrt[3]{x^2 - 7x} = 2$

h) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = \sqrt{2x-1}$

i) $\sqrt[4]{x^2 + x + 4} = 2$

j) $\sqrt{\dfrac{x}{2} - 1} - 3 = 0$

k) $\sqrt{\sqrt{x-4}} = 2$

l) $\sqrt{2\sqrt{x}} = \sqrt{7}$

m) $\sqrt{x\sqrt{x+2}} = 2$

n) $\sqrt{5\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{400}}$

o) $\sqrt{x-6} + 3 = \sqrt{x+9}$

3. Resolva os seguintes problemas do 2º grau.

a) A soma de um número com o seu quadrado é 90. Calcule esse número.

b) A soma do quadrado de um número com o próprio número é 12. Calcule esse número.

c) O quadrado menos o dobro de um número é igual a -1. Calcule esse número.

d) A diferença entre o quadrado e o dobro de um mesmo número 80. Calcule esse número.

e) O quadrado da idade de Vânia subtraído da metade de sua idade é igual a 14 anos. Calcule a idade de Vânia.

f) Um senhor tem um terreno que mede 26 m de comprimento e 16 m de largura. Ele deseja aumentar a sua área para 816m2, acrescentando faixas de mesma largura a um dos lados e aos fundos.

g) Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um canil retangular, com 40 m2 de área. Para cercar os outros três lados, iremos usar uma tela de arame com 18 m de comprimento que será dividia em três pedaços. Quanto deverá medir cada um dos pedaços da tela?

h) Um terreno retangular de ares 875 m2 tem o comprimento excedendo em 10 metros a largura. Quais são as dimensões do terreno?

4. Resolva os exercícios dados a seguir.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 + 3x^2 = 4$ c) $x^4 + 2x^2 + 7 = 0$

d) $x^4 + 4 = -5x^2$ e) $x^4 - 9 = 0$ f) $8x^4 + 7x^2 + 5 = 0$

g) $\frac{1}{x^4} = \frac{6}{x^2} - 8$ h) $x^2 = 2 + \frac{6}{x^2 - 1}$ i) $x^4 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2} = 0$

5. Calcule a soma e o produto das raízes das equações, sem resolvê-las.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $2x^2 - 10x - 12 = 0$ c) $3x^2 - 21x + 9 = 0$

d) $x^2 - 2x - 8 = 0$ e) $3x^2 + 10x + 3 = 0$ f) $9x^2 - 12x - 1 = 0$

6. Sabendo que a soma e o produto das raízes da equação $2x^2 + (2m - 2)x + 1 = 0$ é -3, calcule m.

7. Sabendo que a soma das raízes da equação $x^2 - (2p - 4)x + 36 = 0$ é 12, calcule p.

8. Sabendo que o produto das raízes da equação $x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ é 3, calcule m.

9. Determine $t \in R$ de modo que a equação do 2° grau $x^2 - 10x + t = 0$ não tenha raízes reais.

10. Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $3x^2 - 11x + 5 = 0$, calcule:

a) $x_1 + x_2$ b) $x_1 \cdot x_2$ c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

d) $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$

11. Um grupo de amigos encontrou-se em um bar. Ao ser apresentada a conta de R$ 240,00, quatro deles afirmaram não dispor de dinheiro e com isso cada um dos demais pagou uma quantia adicional de R$ 5,00.

a) quantas pessoas havia no grupo?
b) qual foi a quantia que coube a cada um dos que pagaram?

12. A equação $ax^2 - 4x - 16 = 0$ tem uma raiz cujo valor é 4. A outra raiz é?

13. Para que valores de m a equação $x^2 – (m - 2)x - 9 = 0$ admite raízes simétricas?

14. Sendo a e b as raízes da equação $x^2 + 5x + 2 = 0$, calcule o valor de $(a + 2)(b + 2)$.

15. Num quintal há porcos e frango, num total de 17 cabeças e 54 pés. Qual é o número de porcos e o número de frangos?

16. Na casa de Geraldo tem um jardim de forma retangular com 38m de perímetro. O comprimento desse jardim é 5m maior que sua largura. De acordo com essas informações, resolva as seguintes questões.

a) Escreva uma equação que permita calcular quantos metros têm a largura e o comprimento desse jardim.
b) Calcule a área desse jardim.

17. Diariamente são produzidas 300 peças em uma indústria por certa quantidade de operários. a produção diária dessa indústria passou para 420 peças depois da contratação de mais 30 operários. Quantos operários trabalhavam nessa indústria antes da contratação dos novos operários? E depois da contração?

MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Disciplina

INSTRUMENTAÇÃO PARA PESQUISA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA II

Módulo 5

FUNÇÃO

Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
Heloisa Laura Queiroz Gonçalves da Costa
Henrique Mongelli

Capítulo I

INTRODUÇÃO À NOÇÃO DE FUNÇÃO

Observe a tabela a seguir. Nela temos a distância que uma pessoa percorre em função do tempo de caminhada.

Tempo (min)	15	20	30	45	50	60	80
Distância (m)	1500	2000	3000	4500	5000	6000	8000

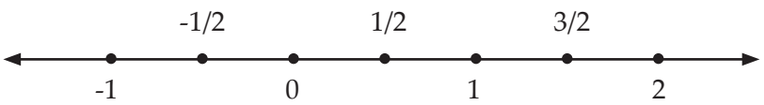
Percebemos na tabela que:

• Há uma correspondência entre o tempo e a distância percorrida.
• Para cada tempo temos uma única distância.
• Se considerarmos que x é o tempo (min) e y é a distância (m) percorrida, temos a relação y =100.x, e dizemos que y é a função de x dada por esta fórmula.
• Na igualdade anterior, para cada valor do tempo temos um único valor para a distância, isto é, a distância percorrida é função do tempo da caminhada.
• Na fórmula, para x = 15 temos y = 100.15 = 1500; para x = 20 temos y = 100.20 = 2000, e assim por diante.

Quando há uma correspondência entre duas grandezas x e y, de forma que para cada valor de x fica determinado um único valor de y, dizemos que y é função de x.

Representação cartesiana

Sabemos que podemos representar os números reais numa reta numerada. Na figura a seguir vemos alguns pontos marcados.



Cada ponto da reta numerada corresponde um número real, e cada número real corresponde a um número da reta.

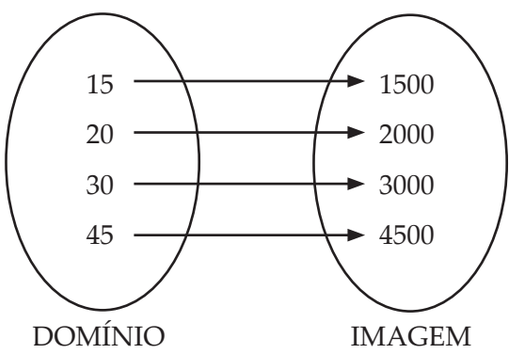
Seja a função y = 100.x, vamos atribuir valores arbitrários para x para obtermos os valores correspondentes para y. Vamos construir a Tabela a seguir.

Valor de x	**Valor de y** **y = 100. x**	**(x, y)**
15	y = 1500	(15, 1500)
20	Y = 2000	(20, 2000)
30	y = 3000	(30, 3000)
45	y = 4500	(45, 4500)

Na Tabela, os valores (15,1500); (20,2000); (30,3000) e (45,4500) são chamamos de pares ordenados (x,y), em que o primeiro elemento do par representa os valores dados para x e o segundo elemento representa os valores obtidos para y.

Dessa forma, a função f pode ser representada por pares ordenados (x,y), nos quais:

• O conjunto formado por todos os elementos dados para x é chamado de domínio da função.
• O conjunto formado somente pelos elementos y que formam par ordenado com todos os elementos dados para x é chamado de imagem da função.



Os pares ordenados podem ser representados num esquema gráfico chamado plano cartesiano,em que:

• Os elementos do conjunto domínio (valores de x) são representados num eixo horizontal.

• Os elementos do conjunto imagem (valores de y) são representados num eixo vertical.

• O eixo horizontal e o eixo vertical interceptam-se no ponto O (zero) e são perpendiculares entre si.

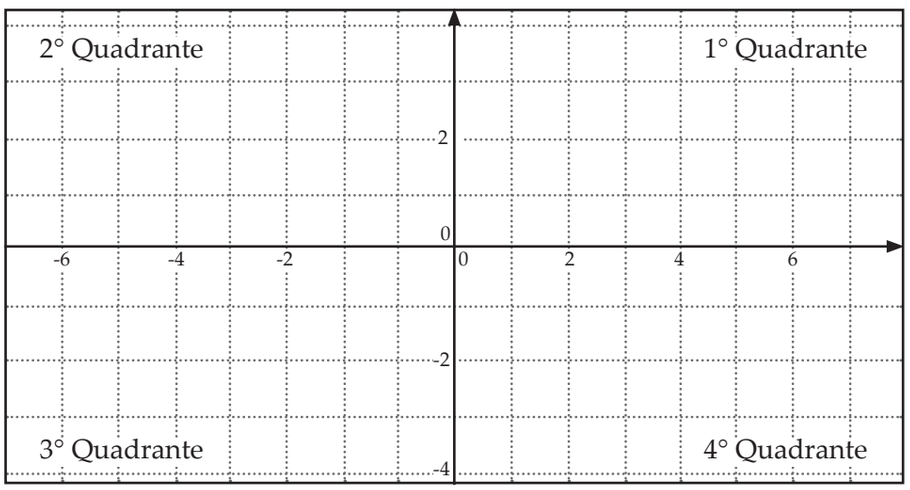
• O eixo horizontal e o eixo vertical dividem o plano cartesiano em quatro quadrantes.

• O par ordenado será representado no plano cartesiano por um ponto P.

• O ponto P é obtido através da interseção de duas retas paralelas aos eixos e que passam por x e y.

• Dado o ponto P = (x, y), dizemos que x e y são as coordenadas desse ponto P; e x é a abscissa de P e y é a ordenada de P.

• O eixo horizontal recebe o nome de eixo das abscissas ou eixo da variável x e o eixo vertical recebe o nome de eixo das ordenadas ou eixo da variável y.



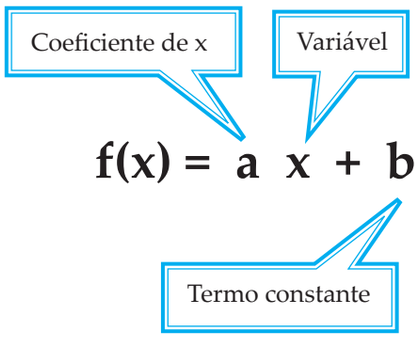
Plano Cartesiano

O plano cartesiano, recebeu esse nome em homenagem a Descartes, que em 1637 teve a idéia de tratar as curvas geométricas por meio de expressões algébricas, originando assim a Geometria Analítica.

Definição de função do primeiro grau

Chama-se **função polinomial do 1º grau** ou **função afim**, a qualquer função f de IR em IR dada por uma lei da forma f(x) = a x + b, em que a e b são números reais dados e a ≠ 0.

Na função afim



Veja alguns exemplos de funções polinomiais do 1º grau.

f(x) = 2x - 7, onde a = 2 e b = - 7
f(x) = 1/2x - 6, onde a = 1/2 e b = - 6
f(x) = 5 - x, onde a = -1 e b = 5
f(x) = x, onde a = 1 e b = 0

Zeros ou raízes da equação do primeiro grau

Chama-se zeros ou raízes da função polinomial do 1º grau f(x) = a x + b , a ≠0, os números reais x tais que f(x) = 0, isto é,

a x + b = 0 $\Rightarrow$ $x = \frac{-b}{a}$

O zero ou a raiz da função afim é a solução da equação do 1º grau a x + b = 0, isto é, $x = \frac{-b}{a}$

Gráficos da função do primeiro grau

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, y = a x + b, com a ≠ 0, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy.

Para construirmos o gráfico de uma função afim, $y = a\,x + b$, com $a \neq 0$, basta construir uma tabela, onde damos valores para x e obtemos os valores de y.

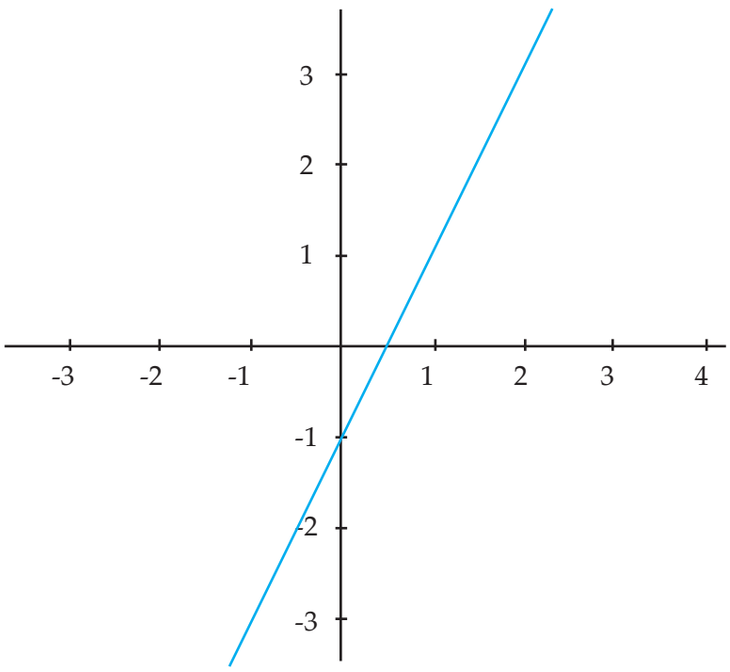
Exemplo:
Vamos construir o gráfico da função $y = 2x - 1$, $a = 2 \neq 0$.

1º MODO

1º PASSO. Basta construir uma Tabela.

2º PASSO. Marcar os pares ordenados obtidos no plano cartesiano.

3º PASSO. Traçar a reta que passa por esses pontos.



2º MODO

Para construir o gráfico da função $y = 2x - 1$, bastam apenas dois pontos. O ponto em que função corta o eixo dos x e em que a função corta o eixo dos y.

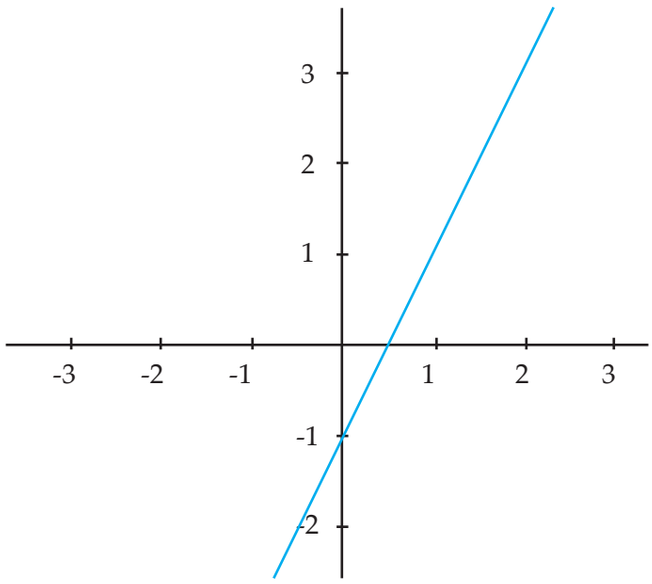
1º PASSO. Encontrar os pontos onde a função corta o eixo dos x e do y.

Para $x = 0$ $y = -1$. Logo, $P = (0, -1)$.

Para y = 0, temos 2x -1 = 0 x = 1/2. Logo, P = (1/2 ,0).

2º PASSO. Marcar estes pontos no plano cartesiano.

3º PASSO. Traçar a reta que passa por esses dois pontos.



Observações.

• O gráfico da função afim y = a x + b é uma **reta**.
• Bastam dois pontos para traçarmos o seu gráfico, o ponto onde a função **corta o eixo dos x** de coordenadas (P = ($\frac{-b}{a}$, 0)) e o ponto onde a função **corta o eixo dos y** (0, b).
• O coeficiente de x, **a**, é chamado **coeficiente angular da reta** e está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo Ox.
• O coeficiente a é a **taxa de variação** da função y = a x + b.
• O termo constante, **b**, é chamado **coeficiente linear da reta**. Para x = 0 temos y = a • 0 + b = b. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy.

Aplicação da função do primeiro grau

Situação-problema 1. Uma fábrica, na produção de caixas de papel, tem um custo fixo de R$ 100 000,00 e mais um custo de R$ 50,00 por unidade produzida. a) Qual é a fórmula do custo y (em reais) para produzir x unidades? b) Qual é o custo para produzir 10 000 unidades?

Solução.

a) y = 100 000 + 50 x
b) y = 100 000 + 50 . 10 000 = 600 000

Resposta. a) y = 100 000 + 50 x e b) R$ 600 000,00.

Situação-problema 2. Para encher o tanque de um automóvel são necessários 52 litros de combustível. O preço de cada litro é R$ 2,10. a) Quanto se paga para encher o tanque, estando ele vazio? b) Qual é a quantia y em reais que se paga quando se colocam x litros do combustível no tanque? c) Qual é a taxa de variação dessa função?

Solução.

a) y = 2,10 x = 52 . 2,10 = 109,20
b) y = 2,10 x
c) y/x = 2,10

Resposta. a) R$ 109,20; b) y = 2,10 x e c) R$ 2, 10 /l

Situação-problema 3. Manoel recebe um salário composto de uma parte fixa de R$ 600,00 e outra variável, que é igual a 0,5 % do total que ele vende no mês. a) Sendo x o total da venda no mês, em reais, qual é o valor do salário mensal? b) Qual é o salário num mês em que ele nada vende? c) Se ele vende R$ 50000,00 no mês, qual é o valor do seu salário?

Solução.

a) y = 600 + 0,005 x
b) y = 600
c) y = 600 + 0,005 . 50000 = 850

Resposta. a) y = 600 + 0,005 x; b) R$ 600,00 e c) R$ 850,00.

Situação-problema 4. Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela a seguir.

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês?
b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois?

Solução.

a) O preço y depende (está em função) do tempo x em minutos.

Então:
Plano A: $y = 0,5x + 35 = 0,5(25) + 35 = 42,50$.
Plano B: $y = 0,8x + 20 = 0,8(25) + 20 = 40,00$.
Plano C: $y = 1,2x = 1,2(25) = 30,00$.

Como podemos observar, o plano C é o mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês.

b) Queremos responder: "a partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois". Sabemos que existe um tempo x onde os planos são iguais, ou seja, existe um x onde:

$0,5x + 35 = 1,2x$ (I)
$0,8x + 20 = 1,2x$ (II)
$0,5x + 35 = 0,8x + 20$ (III)

Resolvendo.

$0,5x + 35 = 1,2x$	$0,8x + 20 = 1,2x$	$0,5x + 35 = 0,8x + 20$
$0,5x - 1,2x = -35$	$0,8x - 1,2x = -20$	$0,5x - 0,8x = 20 - 35$
$-0,7x = -35$	$-0,4x = -20$	$-0,3x = -15$
$x = \frac{35}{0,7}$	$x = \frac{20}{0,4}$	$x = \frac{15}{0,3}$
$x = 50$	$x = 50$	$x = 50$

Concluindo, a partir de 50 minutos de uso mensal, o plano A é mais vantajoso (menor custo) que os outros dois.

Situação-problema 5. Os calçados são medidos por números. A maioria das mulheres usa, por exemplo, nº 35, nº 36 e nº 37 para calçado e a maioria dos homens usa, por exemplo, nº 38, nº 40 e nº 41 para calçado. O número y do calçado depende do comprimento x (em cm) do pé.
A fórmula para calcular o número y do calçado é: $y = (5x + 28) / 4$.
Tomando como base essas informações, responda:

a) Que número calça uma pessoa cujo pé mede 24,8 cm?
b) Que número calça uma pessoa cujo pé mede 20 cm?
c) Quanto mede o comprimento de um pé que calça nº 42?

Solução.
Como o número y do calçado é dado por $y = (5x + 28) / 4$.

a) Para o comprimento x = 24, 8 cm do pé, temos

$y = \frac{(5x + 28)}{4}$
$y = \frac{(5 . 24{,}8 + 28)}{4}$
$y = \frac{152}{4}$
$y = 38$

b) Para o comprimento x = 20 cm do pé, temos

$y = \frac{(5x + 28)}{4}$
$y = \frac{(5 . 20 + 28)}{4}$
$y = \frac{128}{4}$
$y = 32$

Resposta. Para o comprimento x = 20 cm de pé, o número do calçado é 32.

c) Para o número y = 42, temos que encontrar o comprimento x na equação $y = \frac{(5x + 28)}{4}$

Para o número y = 42 de calçado, temos

$y = \frac{(5x + 28)}{4}$
$42 = \frac{(5x + 28)}{4}$
$168 = 5x + 28$
$168 - 28 = 5x$
$x = 140 / 5 = 28$

Resposta. Para o número y = 42 de calçado, o comprimento do pé, é 28 cm.

Lista de exercícios I

1. O gráfico da função f(x) = mx + n passa pelos pontos (4, 2) e (-1, 6). Qual é o valor de m + n?

2. Uma função do 1o grau é tal que f (-1) = 5 e f (3) = -3. Quanto vale f(0) ?

3. A função f é definida por f(x) = ax + b . Sabe-se que f(-1) = 3 e f(1) = 1. Qual é o valor de f(3)?

4. Faça o gráfico das seguintes funções.

a) y = 2x + 3 b) y = 1/2x - 1 c) y = 5x - 4
d) y = 5 – x e) y = 4x - 5 f) y = 4/3x - 5

Definição da função constante

Chama-se **função constante**, a qualquer função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma *f(x) = b*, em que b é um número real.

Como esta função não tem variável x, dizemos que ela não depende do valor de x.

Na função constante:

$$f(x) = b$$

Termo constante

Gráfico da função constante

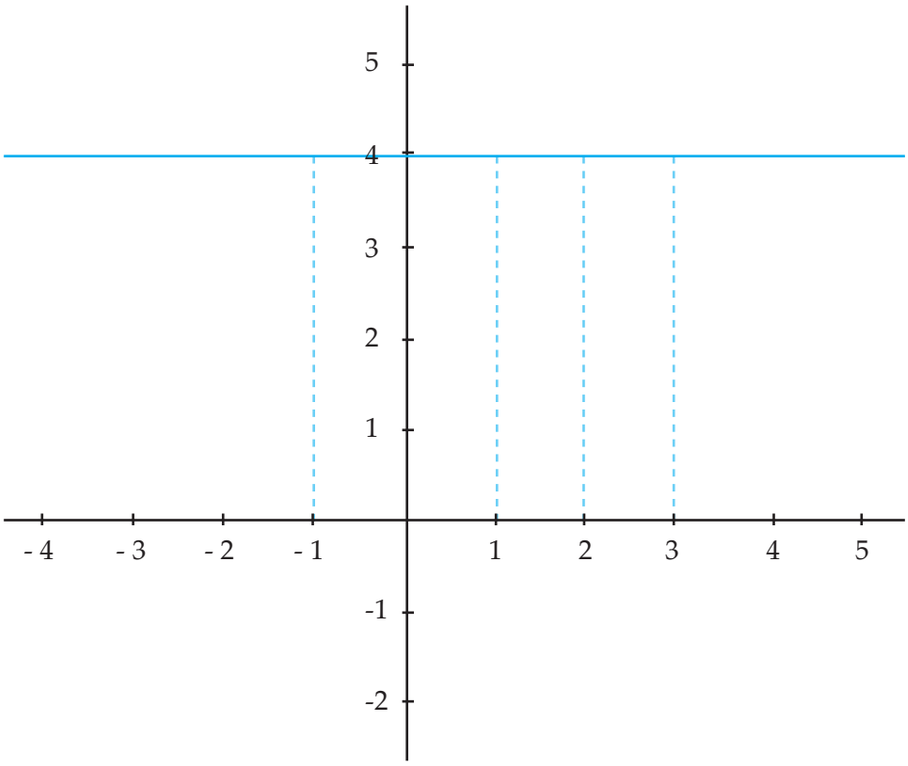
O gráfico da função constante é uma **reta paralela** ao eixo das abscissas.

Vamos desenhar o gráfico da função y = 4.

1º PASSO. Basta construir uma Tabela.

Valor dado para x	Valor obtido para y, onde y = 4	Par ordenado (x, y)
-1	y = 4	(-1, 4)
0	y = 4	(0, 4)
1	y = 4	(1, 4)
2	y = 4	(2, 4)
3	y = 4	(3,4)

2º PASSO. Marcar os pares ordenados obtidos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por esses pontos.



Definição da função do primeiro grau do tipo f(x) = ax

Na função do primeiro grau f(x) = ax + b, quando b = 0 e a ≠ 0, temos a função f(x) = ax. Essa função pode ser **chamada de função linear do primeiro grau**, a qualquer função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma f(x) = a x, onde a é um número real.

Zero ou raiz da equação linear

Chama-se **zero ou raiz** da função linear f(x) = a x , a ≠ 0, os números reais x tais que f(x) = 0, isto é, a x = ⇒ x = 0.

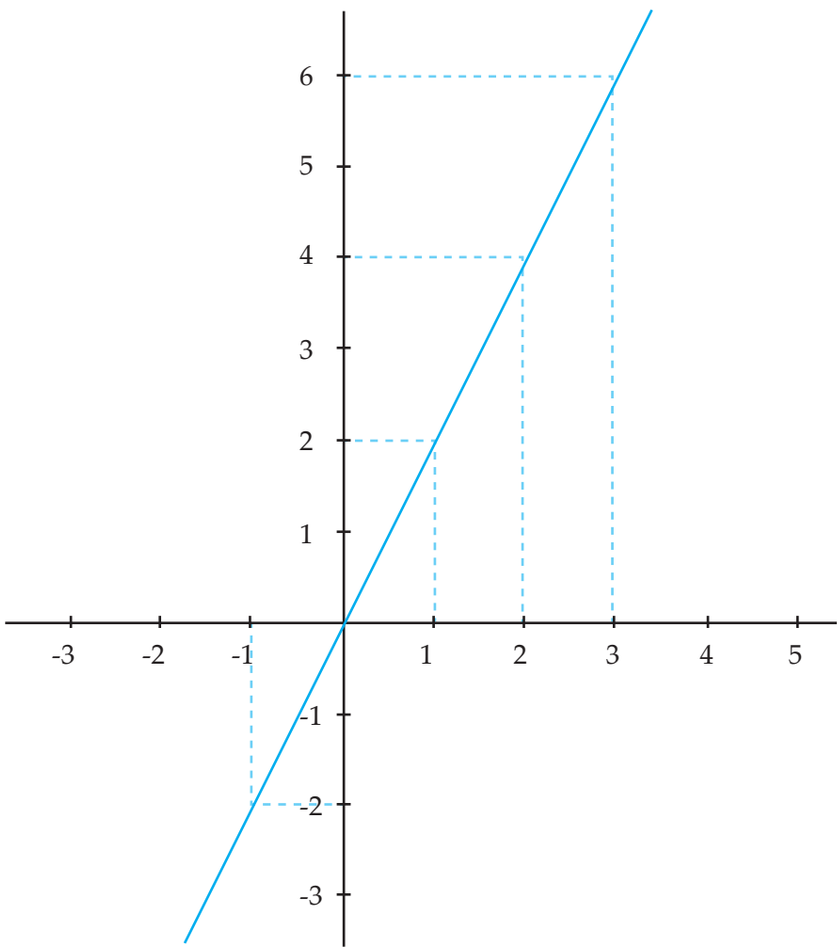
Gráfico da função linear

O gráfico da função linear é uma reta inclinada e que sempre passa pelo ponto (0,0) – origem do plano cartesiano.

1º PASSO. Basta construir uma Tabela.

Valor dado para x	Valor obtido para y, onde y = 2x	Par ordenado (x, y)
-1	y = -2	(-1, -2)
0	y = 0	(0, 0)
1	y = 2	(1, 2)
2	y = 4	(2, 4)
3	y = 6	(3,6)

2º PASSO. Marcar os pares ordenados obtidos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por esses pontos.



Definição de função crescente e decrescente

Uma função é dita **crescente**, quando, à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y aumentam.

Uma função é dita **decrescente**, à medida que aumentando os valores de x, os valores correspondentes de y diminuem.

Para a função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma f(x) = a x + b, onde a e b são números reais dados e a ≠ 0, a função é dita:

- **crescente**, se a > 0.
- **decrescente** , se a <0.
- **constante**, se a = 0.

Gráfico da função crescente e decrescente

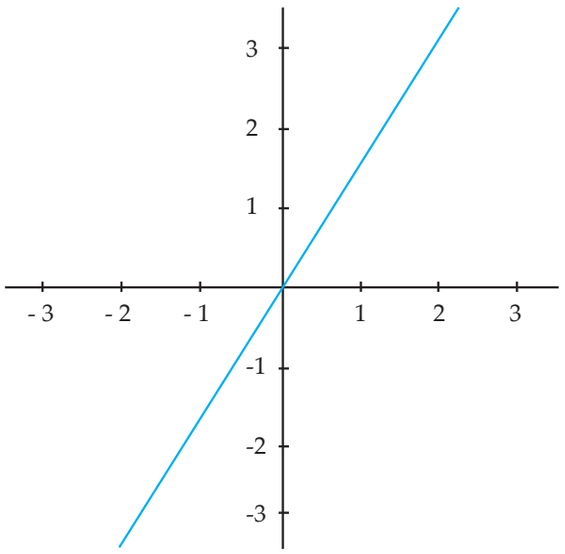
Em ambos os casos, o gráfico é uma reta inclinada em relação aos eixos coordenados.

Exemplo 1.

1º PASSO. Basta construir uma Tabela.

Valor dado para x	Valor obtido para y, onde y = 2x	Par ordenado (x, y)
-1	y = -2	(-1, -2)
0	y =0	(0, 0)
1	y = 2	(1, 2)
2	y = 4	(2, 4)

2º PASSO. Marcar os pares ordenados obtidos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por esses pontos.



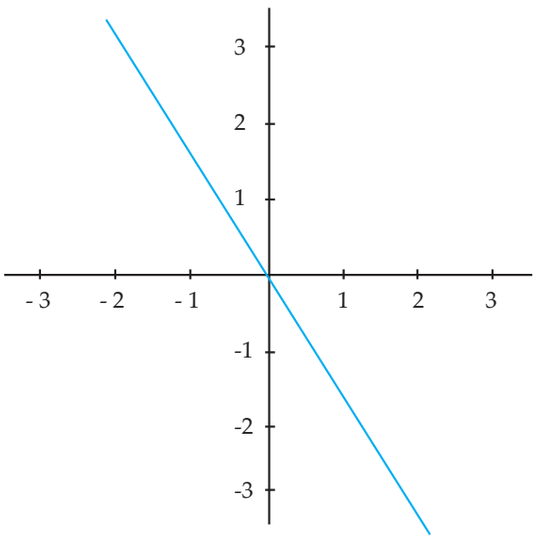
Função crescente

Exemplo 2.

1º PASSO. Basta construir uma Tabela.

Valor dado para x	Valor obtido para y, onde y = -2x	Par ordenado (x, y)
-1	y = 2	(-1, 2)
0	y = 0	(0, 0)
1	y = -2	(1,- 2)
2	y = -4	(2, -4)

2º PASSO. Marcar os pares ordenados obtidos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por esses pontos.



Função decrescente

Lista de exercícios II

1. Faça o gráfico das seguintes funções.

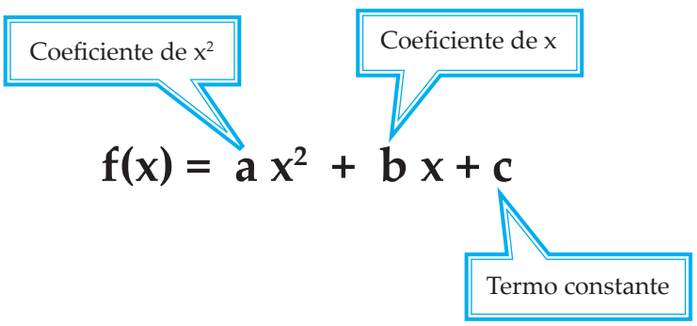
a) $y = 2x$ b) $y = -2$ c) $y = 3x - 3$ d) $y = 4 - 3x$

Capítulo II

DEFINIÇÂO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

Chama-se **função quadrática, ou função polinomial do 2º grau**, qualquer função f de IR em IR dada por uma lei da forma $f(x) = a x^2 + b x + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Na função quadrática



Veja alguns exemplos de funções polinomiais do 2º grau.

1. $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$, onde a = 5, b = - 4 e c = 2.
2. $f(x) = -2x^2 + 16x$, onde a = -2, b = 16 e c = 0.
3. $f(x) = x^2 - 9$, onde a = 1, b = 0 e c = -9.
4. $f(x) = -1/2x^2$, onde a = -1/2 , b = 0 e c = 0.

Concavidade da parábola

Uma parábola pode ter concavidade voltada para cima ou para baixo.

• Se a > 0, então a parábola é côncava para cima.
• Se a < 0, então a parábola é côncava para baixo.

Vértice da parábola

Vértice da parábola é o ponto onde o eixo de simetria corta a parábola.

Observação. Eixo de simetria é a reta que divide o gráfico da função quadrática em duas partes congruentes.

O **vértice da parábola** tem coordenadas $V = (x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, onde $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$; x_v a abscissa do vértice e y_v a ordenada do vértice.

Como podemos determinar o vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$?

Vamos representar por x_v a abscissa do vértice e y_v a ordenada do vértice. Devido à simetria da parábola, os pontos obtidos substituindo x por $x_v + 1$ e por $x_v - 1$ devem ter a mesma ordenada. Então façamos essa substituição na equação seguinte.

$a\,x^2 + b\,x + c = a\,x^2 + b\,x + c$
$a\,(x_v + 1)^2 + b\,(x_v + 1) + c = a\,(x_v - 1)_2 + b\,(x_v - 1) + c$
$a\,(x_v^2 + 2\,x_v + 1) + b\,x_v + b + c = a\,(x_{v2} - 2\,x_v + 1) + b\,x_v - b + c$
$a\,x_v^2 + 2\,a\,x_v + a + b\,x_v + b + c = a\,x_v^2 - 2\,a\,x_v + a + b\,x_v - b + c$
$4\,a\,x_v = -2b$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Substituindo $x_v = \frac{-b}{2a}$ em $y = a\,x^2 + b\,x + c$, obtemos o valor do $y_v = a\,x_v^2 + b\,x_v + c$.

Portanto, $V = (x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, y_v\right)$.

O vértice de uma função quadrática pode ter um **ponto de mínimo ou de máximo.**

• O vértice será um **ponto de mínimo** quando a > 0 (parábola côncava para cima).
• O vértice será um **ponto de máximo** quando a < 0 (parábola côncava para baixo).

Zeros ou raízes da equação quadrática

Chamam-se **zeros ou raízes** da função polinomial do 2º grau $f(x) = a x^2 + b x + c$, $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$, isto é, $a x^2 + b x + c = 0$.

Os zeros ou as raízes da função quadrática são as soluções da equação do 2º grau $a x^2 + b x + c = 0$, as quais são dadas pela chamada **fórmula de Bháskara.**

Fórmula de Bháskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ou $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4 a c$

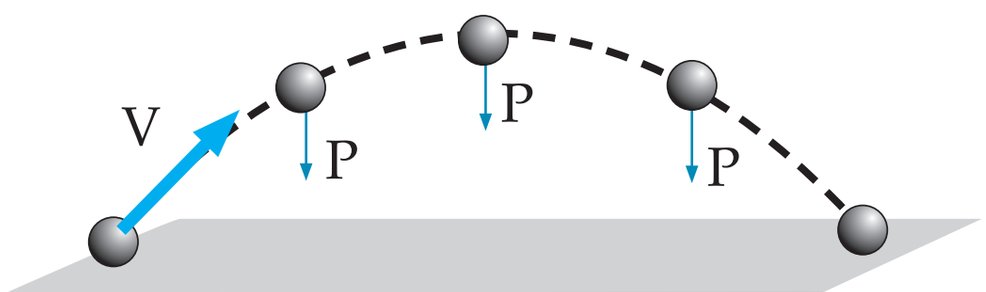
A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o discriminante (Δ).

- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas.
- quando Δ é zero, há só uma raiz real.
- quando Δ é negativo, não há raiz real.

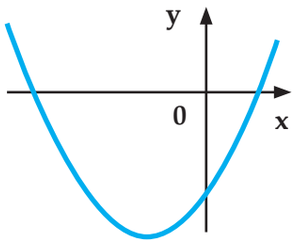
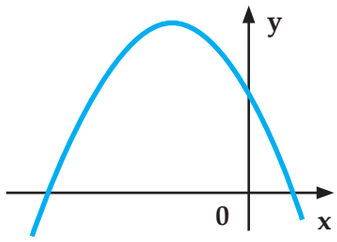
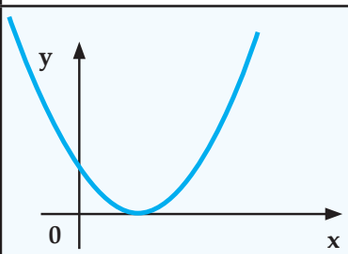
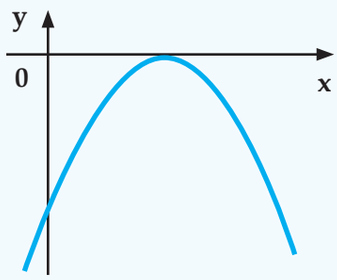
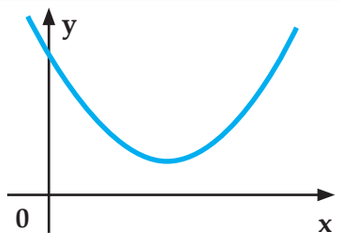
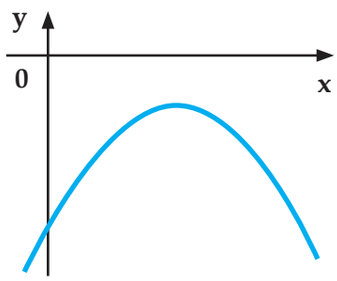
Interseção com os eixos coordenados

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada **parábola**.

Exemplo:



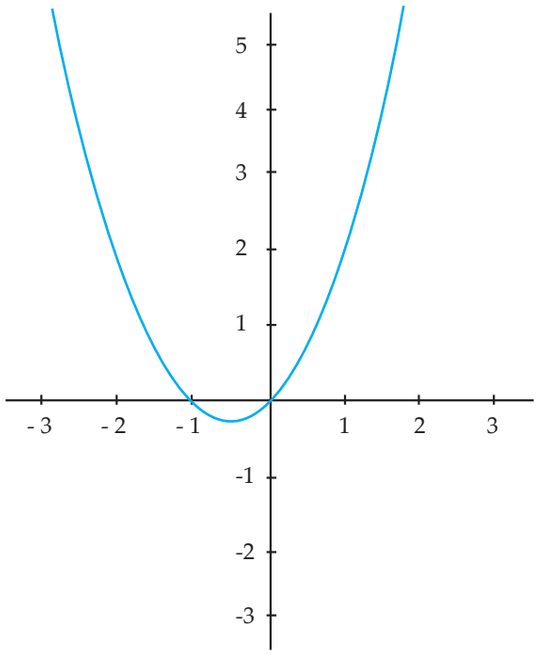
Na próxima tabela, temos representado o gráfico da parábola de acordo com o número de raízes reais, quando existirem.

Se o valor obtido para Δ	Quantidade de raízes	Gráfico quando $a > 0$	Gráfico quando $a < 0$
é positivo	há duas raízes reais e distintas		
é zero	há só uma raiz real		
é negativo	não há raiz real		

Vamos construir o gráfico da função $y = x^2 + x$.

1º PASSO. Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

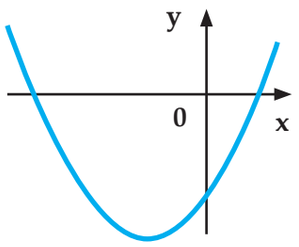
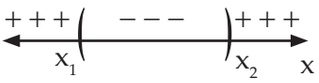
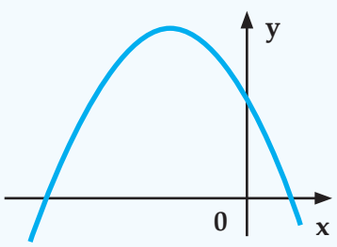
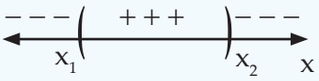
Dados:
a= 1, b= 1 e c = 0
Calculando:
$\Delta = 1 - 4.1.0 = 1$
raízes : $x_1 = 0$ e $x_2 = -1$
Como a = 1 e a > 0. Logo a função é côncava para cima.



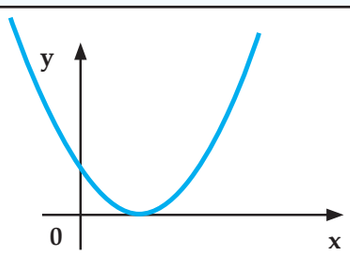
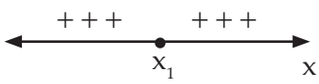
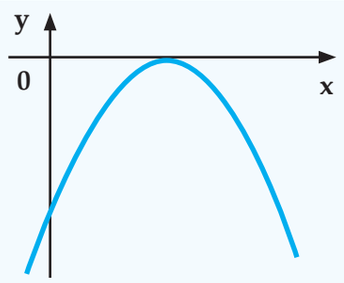
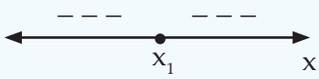
Estudo do sinal

Temos 3 casos para estudar

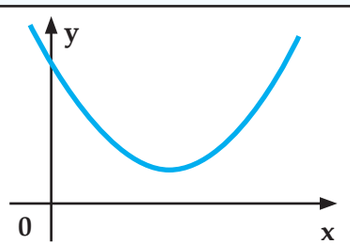
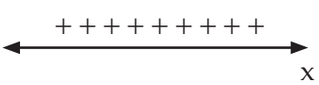
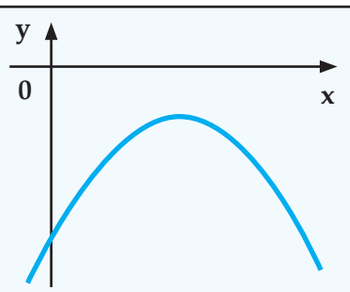
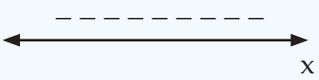
• quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas, então o gráfico da função corta o eixo x nesses dois pontos.

	Gráfico	Estudo do sinal	
$\Delta > 0$ $a > 0$			$f(x) > 0$ para $x < x_1$ e $x > x_2$ $f(x) < 0$ para $x_1 < x < x_2$ $f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$
$\Delta > 0$ $a > 0$			$f(x) > 0$ para $x_1 < x < x_2$ $f(x) < 0$ para $x < x_1$ e $x > x_2$ $f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$

• quando Δ é zero, há só uma raiz real, então o gráfico da função corta o eixo x nesse único ponto.

	Gráfico	Estudo do sinal	
$\Delta > 0$ $a > 0$			$f(x) > 0$ para $x < x_1$ e $x > x_2$ $f(x) = 0$ para $x = x_1$
$\Delta > 0$ $a > 0$			$f(x) < 0$ para $x < x_1$ e $x > x_1$ $f(x) = 0$ para $x = x_1$

• quando Δ é negativo, não há raiz real, então o gráfico da função não corta o eixo x. Neste caso, o gráfico da função estará totalmente acima ou totalmente abaixo do eixo x.

	Gráfico	Estudo do sinal	
$\Delta > 0$ $a > 0$			$f(x) > 0 \ \forall x \in \Re$
$\Delta > 0$ $a > 0$			$f(x) < 0 \ \forall x \in \Re$

Aplicações da função do segundo grau

Lista de exercícios III

1. Para as funções dadas a seguir.

a) y = -3x + 2 b) y = 1/2x - 3 c) y = -3x

d) y = 5 e) y = - x f) y = 1 - 3x

g) y = 1/2x - 3/4 h) y = -1/2x - 3 i) y = 1/2x + 3

a) Estudar o valor de a , quanto à crescimento e decrescimento da função.
b) Determinar o zero da função.
c) Esboçar o gráfico da função.
d) Estudar o sinal da função.

2. Para as funções dadas a seguir.

a) $y = x^2 - 2x - 3$ b) $y = x^2 - 4x - 12$ c) $y = x^2 - 4x + 4$

d) $y = x^2 - x + 3$ e) $y = -x^2 + 4x - 3$ f) $y = 2x^2 - 12x + 18$

g) $y = \frac{-x^2}{2} - x + 4$ h) $y = 4x^2 - x$ i) $y = -x^2 - x - 4$

a) Estudar o valor de a, quanto à concavidade da parábola.
b) Determinar o zero da função.
c) Determinar o vértice.
d) Determinar o eixo de simetria.
e) Determinar ponto de máximo ou ponto de mínimo, conforme o caso.
f) Esboçar o gráfico da função.
g) Estudar o sinal da função.

Lista de exercícios IV

1. Uma bala é atirada de um canhão de brinquedo e descreve uma parábola de equação $y = -3x^2 + 60x$. Determinar a altura máxima atingida pela bala e o alcance do disparo.

2. Deseja-se construir uma quadra de futebol de salão. Um dos lados da quadra faz divisa com um muro e os outros serão cercados com tela de arame com comprimento total de 80m. Quais devem ser as dimensões dessa quadra para que sua área seja máxima?

3. Calcular m em $y = x^2 - 8x + (2m + 1)$ a fim de que o valor mínimo assumido por y seja –12.

4. O custo para se produzir x unidades de um produto é dado por $C = 2x^2 - 100x + 5000$. Qual é o valor do custo mínimo?

5. Uma herança foi dividida entre a viúva, a filha, o filho e o cozinheiro. A filha e o filho ficaram com a metade, distribuída na proporção de 4 para 3, respectivamente. A viúva ganhou o dobro do que coube ao filho, e o cozinheiro R$ 500,00. Calcule o valor da herança.

6. Uma empresa fundada em 1990 tem, para cada ano n de funcionamento, um lucro igual a $L(n) = 100\,000 (- n^2 + 22n)$.

a) Em que período a empresa apresentou lucro crescente?
b) A partir de que ano a empresa terá prejuízo?

7. O lucro mensal de uma empresa é dado por $L(x)= - x^2 + 30 x - 5$, sendo x a quantidade mensal vendida. Qual o lucro mensal máximo possível? Entre que valores deve variar x para que o lucro mensal seja no mínimo igual a 195.

8. Uma bala é atirada de um canhão. A trajetória da bala descreve uma parábola de equação: y = -x 2 + 5x (onde x e y são medidos em hectômetros). Determine, em metros, a altura máxima atingida pela bala. Calcule, em metros, o alcance do disparo.

9. O lucro de uma empresa pela venda diária de x peças, é dado pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 40$. Quantas peças devem ser vendidas diariamente para que o lucro seja máximo?

10. A função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ tem mínimo em que ponto?

11. Qual é o valor máximo da função $f(x) = - x^2 + 2x + 2$.

12. Qual é o maior valor que y pode de assumir na expressão $y = - x^2 + 2x$.

13. Se x e y são as coordenadas do vértice da parábola $y = 3x^2 - 5x + 9$, então x + y é igual a quanto?

14. O ponto (k, 3k) pertence à curva dada por $f(x) = x^2 - 2x + k$. Qual é o valor de k?

15. Qual é o número de pontos comuns aos gráficos das funções $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = - x^2 – 4$?

16. Se $f(x) = x - 3$, qual é o conjunto de valores de x tais que $f(x^2) = f(x)$?

17. Qual é a imagem da função $f: IR \rightarrow IR$, definida por $f(x) = x^2 – 1$?

18. Qual é a imagem da função $f: IR \rightarrow IR$, definida por $f(x) = 3x^2 + 4$?

19. O custo para se produzir x unidades de um produto é dado por $C = 2x^2 - 100x + 5000$. Qual é o valor do custo mínimo?

20. Desenhe os gráficos das funções $f: IR \rightarrow IR$, definidas por $y = f(x)$, $y = f(–x)$, $y = –f(x)$, e $y = –f(–x)$. Em cada gráfico identifique o domínio e a imagem, observando as alterações em comparação ao domínio e imagem de $y = f(x)$.

TAREFA:

Estude no Livro de Fundamentos de Matemática Elementar, a função exponencial, a função logarítmica e as funções trigonométricas.

INSTRUMENTAÇÃO PARA PESQUISA E PRÁTICA
DE ENSINO DE MATEMÁTICA II
Coordenação e registro: Editora UFMS
Projeto gráfico: Lennon Godoi
Editoração eletrônica: Marcos Paulo de Souza
Fotolitos: Cromoarte - Editora e Publicidade Ltda