PROJETO

Newton

Caderno de Exercícios

Cálculo II

3

editAedi
Assessoria de Educação a Distância • UFPA

José Miguel Martins Veloso

Caderno 3: Exercícios de Cálculo II

1ª Edição

editAedi
Assessoria de Educação a Distância • UFPA

2017

Todo conteúdo deste trabalho, exceto quando houver ressalva, é publicado sob a licença **Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional**

Copyright © 2017 Editora EditAEDI Todos os direitos reservados.
Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, por qualquer processo, sem a permissão expressa dos editores.

REITOR
Emmanuel Zagury Tourinho

CONSELHO EDITORIAL

Presidente:
Dr. José Miguel Martins Veloso

Diretora:
Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz

Membros do Conselho:
Dra. Ana Lygia Almeida Cunha
Dr. Dionne Cavalcante Monteiro
Dra. Maria Ataide Malcher

REVISÃO
Edilson dos Passos Neri Junior

CAPA
Giordanna De Gregoriis

DIAGRAMAÇÃO
Manoel Dione de Oliveira Silva
Erick Rodolfo Souza Trindade

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

_____
Veloso, José Miguel Martins
Caderno 3 de Exercícios: cálculo II / José Miguel Martins Veloso.
- Belém: AEDI/UFPA, 2017

ISBN E-book: 978-85-65054-49-2

1. Cálculo diferencial e integral
2. Exercícios de cálculo
3. Projeto Newton
_____

Caderno de Questões - Cálculo II

Sumário

Curvas 4
Tópicos abordados nos exercícios . . . 4
Métodos e Técnicas . . . 5
Enunciado dos Exercícios . . . 6
Sugestões . . . 9
Respostas . . . 10

Funções de várias variáveis 22
Tópicos abordados nos exercícios . . . 22
Métodos e Técnicas . . . 23
Enunciado dos Exercícios . . . 24
Sugestões . . . 26
Respostas . . . 27

Diferenciabilidade 37
Tópicos abordados nos exercícios . . . 37
Métodos e Técnicas . . . 38
Enunciado dos Exercícios . . . 39
Sugestões . . . 42
Respostas . . . 43

Integrais múltiplas 58
Tópicos abordados nos exercícios . . . 58
Métodos e Técnicas . . . 59
Enunciado dos Exercícios . . . 60
Sugestões . . . 61
Respostas . . . 62

Aplicações 70
Tópicos abordados nos exercícios . . . 70

Métodos e Técnicas 71
Enunciado dos Exercícios 73
Sugestões 75
Respostas 76

Curvas

Plano

Tópicos	4
Métodos e Técnicas	5
Enunciados	6
Dicas	9
Respostas	10

Tópicos abordados nos exercícios.

- O espaço $\mathbb{R}^n$ e suas propriedades;
- Vetores, norma, produto escalar e produto vetorial;
- Equação de retas, planos e esferas;
- Limite e continuidade de funções vetoriais;
- Derivada e integral de funções vetoriais;
- Reta tangente e comprimento de curva.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Geometria plana e espacial;
- Geometria analítica;
- Limite e continuidade de funções de uma variável;
- Derivação e integração de funções de uma variável.

Métodos e Técnicas

Cálculo componente a componente e otimização.

- Utilizando as regras imediatas de limite, derivada e integral, efetuam-se os cálculos em cada componente nos seguintes exercícios.

Exercícios 1.13, 1.14, 1.15 e 1.16

- Utiliza-se o teste da segunda derivada para determinar o mínimo da função f, nas seguintes questões.

Exercício 1.9

Enunciado dos Exercícios

●○○○ **1.1** Faça o que se pede:

(a) Qual a distância do ponto $A = (-3, 2, 1)$ ao plano $x = 1$?

(b) Encontre o centro e raio da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 8y - 7z = \frac{63}{2}.$$

●○○○ **1.2** Responda:

(a) O que é a superfície $(x-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$?

(b) O que é a superfície $x^2 = z^2$ o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$?

(c) Qual é a interseção das duas superfícies? Desenhe ambas.

●●○○ **1.3** Um cupim se move sobre um cubo unitário limitado pelas paredes $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ do ponto $A = (3/10, 7/10, 1)$ para o ponto $B = (1, 7/10, 4/10)$. Calcule o comprimento da trajetória mais curta que passa sobre duas faces.

1.4 Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e a diagonal de uma de suas faces (com uma extremidade comum).

●●○○ **1.5** Mostre que se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores não nulos, então $\vec{c} = |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ divide o ângulo ente $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ao meio.

●●●○ **1.6** Faça o que se pede:

(a) Encontre um vetor não nulo ortogonal ao plano que contém os pontos $A = (-2, 3, 2)$, $B = (2, 5, 2)$, $C = (4, 2, -1)$.

●○○○

(b) Encontre a área do triângulo ABC.

●●○○ **1.7** Faça o que se pede:

(a) Parametrize a reta perpendicular ao plano que contém $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 4)$ e $C = (4, 5, 6)$ e passando por A.

(b) Encontre a equação $ax + by + cz = d$ do plano contendo os pontos A, B e C.

●●○○ **1.8** Use o volume para determinar se $A = (1, 1, 3)$, $B = (2, -2, 5)$, $C = (4, 2, 1)$ e $D = (2, -2, 6)$ estão no mesmo plano.

●●●○ **1.9** Calcule a menor distância da reta $x = 1 + t,\ y = 1 - 2t,\ z = 3 - t$ para a origem $(0, 0, 0)$.

●●●○ **1.10** Parametrize a reta que contém o ponto $A = (2, 1, 3)$ e que intercepta a reta $x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = 2t$ perpendicularmente.

●●●○ **1.11** Parametrize a curva que é interseção do paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$ e o cilindro cúbico $y = 2 + x^3$.

●●●● **1.12** Duas partículas viajam ao longo das curvas no espaço $r_1(t) = (t, t^2, t^3)$ e $r_2(t) = (1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t)$.

(a) As partículas colidem?

(b) As trajetórias das partículas tem um ponto em comum?

●●●● **1.13** Encontre o ponto de interseção das duas retas tangentes à curva

$$r(t) = (\text{sen}(\pi t), 2\text{sen}(\pi t), \cos(\pi t))$$

nos pontos em que $t = 0$ e $t = 1/2$.

●●●● **1.14** Uma partícula se movendo ao longo da curva $r(t)$ tem a propriedade que $r''(t) = (2, 0, -\cos(2t))$. Sabemos que $r(0) = (1, 2, 1)$ e $r'(0) = (2, 0, 0)$. Calcule a curva $r(t)$.

●●●● **1.15** Calcule o limite, se existir,

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}, \frac{e^t - 1}{t}, \frac{(t+1)^2 - 1}{(t+1)^2 - 3(t+1) + 2}\right).$$

● ● ○ ○

1.16 Faça o que se pede:

(a) Encontre o comprimento da curva

$$r(t) = (t^3, 24t, 6t^2)$$

para $t \in [0, 5]$.

(b) A projeção da curva acima no plano xz é a curva em duas dimensões

$$p(t) = (t^3, 6t^2).$$

Encontre seu comprimento para $t \in [0, 5]$.

Sugestões

1.1 Utilize de completamento de quadrados para determinar o centro e o raio da esfera.

1.2 Resolva o sistema por casos, por exemplo, considere $x = z$.

1.3 Desenvolva as duas faces do cubo num plano e calcule o comprimento do segmento com extremidades nos pontos desenvolvidos.

1.4 Considere o cubo unitário com um vértice na origem do sistema cartesiano ortogonal tridimensional.

1.5 Para $0 \leq \theta \leq \pi$ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ use $\cos(\theta) = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

1.6 A área de um paralelogramo gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é dada por $\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$.

1.7 Recorde a interpretação do produto vetorial entre dois vetores.

1.8 O volume de um paralelepípedo gerado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é a norma do produto misto entre esses vetores.

1.9 Defina $f(t)$ como o quadrado da distância do ponto $(1 + t, 1 - 2t, 3 - t)$ ao ponto $(0, 0, 0)$.

1.10 O plano que contém A e perpendicular à r será muito útil.

1.11 Faça $x = t$.

1.12 As partículas colidem se houver um instante t tal que $r_1(t) = r_2(t)$. E, as trajetórias têm um ponto em comum se a equação $r_1(t_1) = r_2(t_2)$ possuir solução.

1.13 Uma equação da reta tangente a uma curva r em t_0 é $\alpha(t) = r(t_0) + tr'(t_0)$.

1.14 Integre diretamente a função vetorial e use as condições iniciais.

1.15 L'Hospital no primeiro limite.

1.16 Aplique a fórmula do comprimento L de uma curva r em $[a, b]$, $L = \displaystyle\int_a^b \|r'(t)\| dt$.

Respostas

1.1 Faça o que se pede:

(a) Qual a distância do ponto $A = (-3, 2, 1)$ ao plano $x = 1$?

Solução: A distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano $ax + by + cz + d = 0$ é dado pela fórmula

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

No nosso caso, temos $a = 1,\ b = c = 0,\ d = -1, x_0 = -3,\ y_0 = 2,$ e $z_0 = 1$. Substituindo esses valores diretamente na fórmula, obtemos $\rho = 4$.

(b) Encontre o centro e raio da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 8y - 7z = \frac{63}{2}.$$

Solução: Faremos completamento de quadrados, assim

$$x^2 + y^2 + y^2 - 3x - 8y - 7z = \frac{63}{2}$$

e escrevemos

$$\left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + (y^2 - 8y + 4^2) + \left(z^2 - 7z + \left(\frac{7}{2}\right)^2\right) = \frac{63}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2,$$

daí segue

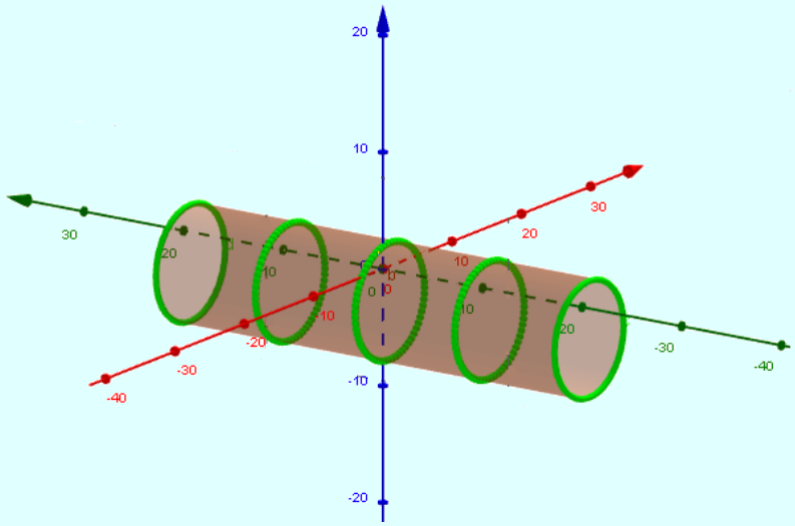
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{62}\right)^2.$$

Agora é fácil verificar que o centro da esfera é $\left(\frac{3}{2}, 4, \frac{7}{2}\right)$ e seu raio é $\sqrt{62}$.

1.2 Responda:

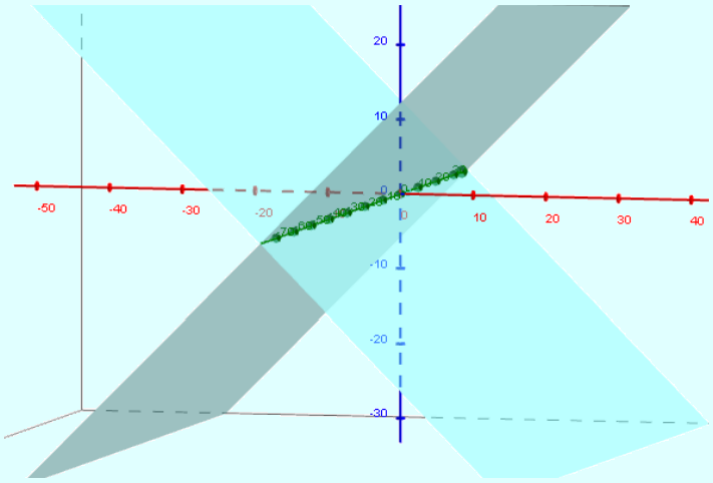
(a) O que é a superfície $(x-1)^2+(z+3)^2=25$ no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$?

Solução: Fazendo a interseção do plano $y=t$ com a superfície $(x-1)^2+(z+3)^2=25$ teremos um círculo de centro $(1,t,-3)$ e raio 5 contido no plano $y=t$. Assim, a superfície em questão é uma união de círculos disjuntos, ou seja, um cilíndro reto tendo como eixo a reta $x=1$, $y=t$, $z=-3$. Como na imagem abaixo:



(b) O que é a superfície $x^2=z^2$ no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$?

Solução: A equação $x^2=z^2$ é equivalente a equação $x^2-z^2=(x-z)(x+z)=0$, cujo o gráfico é a união dos planos $x+z=0$ e $x-z=0$, como na imagem abaixo.



(c) Qual é a interseção das duas superfícies? Desenhe ambas.

Solução: Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 = z^2 \\ (x-1)^2 + (z+3)^2 = 25. \end{cases}$$

Para isso, vamos dividir em casos:

Caso 1. Neste temos $x = z$. Fazendo $z = x$ na segunda igualdade do sistema, obtemos a equação do segundo grau $(x-1)^2 + (x+3)^2 = 25$, cujas soluções são

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{34}}{2}.$$

Caso 2. Neste temos $x = -z$. Fazendo $z = -x$ na segunda igualdade do sistema, obtemos a equação do segundo grau $(x-1)^2 + (-x+3)^2 = 25$, cujas soluções são

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

Assim, a interseção das superfícies em (a) e (b) é a união das seguintes quatro retas, com $\lambda \in \mathbb{R}$:

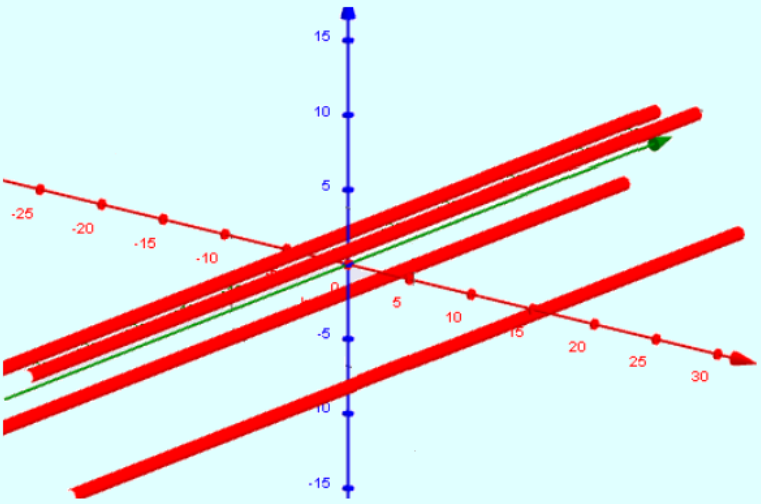
$$(x, y, z) = \left(\frac{-2+\sqrt{34}}{2}, 0, \frac{-2+\sqrt{34}}{2}\right) + \lambda(0, 1, 0);$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{-2-\sqrt{34}}{2}, 0, \frac{-2-\sqrt{34}}{2}\right) + \lambda(0, 1, 0);$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{4+\sqrt{41}}{2}, 0, -\frac{4+\sqrt{41}}{2}\right) + \lambda(0, 1, 0);$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{4-\sqrt{41}}{2}, 0, -\frac{4-\sqrt{41}}{2}\right) + \lambda(0, 1, 0).$$

O gráfico é o seguinte



1.3 Um cupim se move sobre um cubo unitário limitado pelas paredes $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ do ponto $A = (3/10, 7/10, 1)$ para o ponto $B = (1, 7/10, 4/10)$. Calcule o comprimento da trajetória mais curta que passa sobre duas faces.

Solução: Primeiro observe que A pertence ao plano $z = 1$, B pertence ao plano $x = 1$ e que esses dois planos possuem a reta em comum

$$r: \ X = (1, 0, 1) + \lambda(0, 1, 0).$$

Se $P = (1, \lambda, 1) \in r$, então

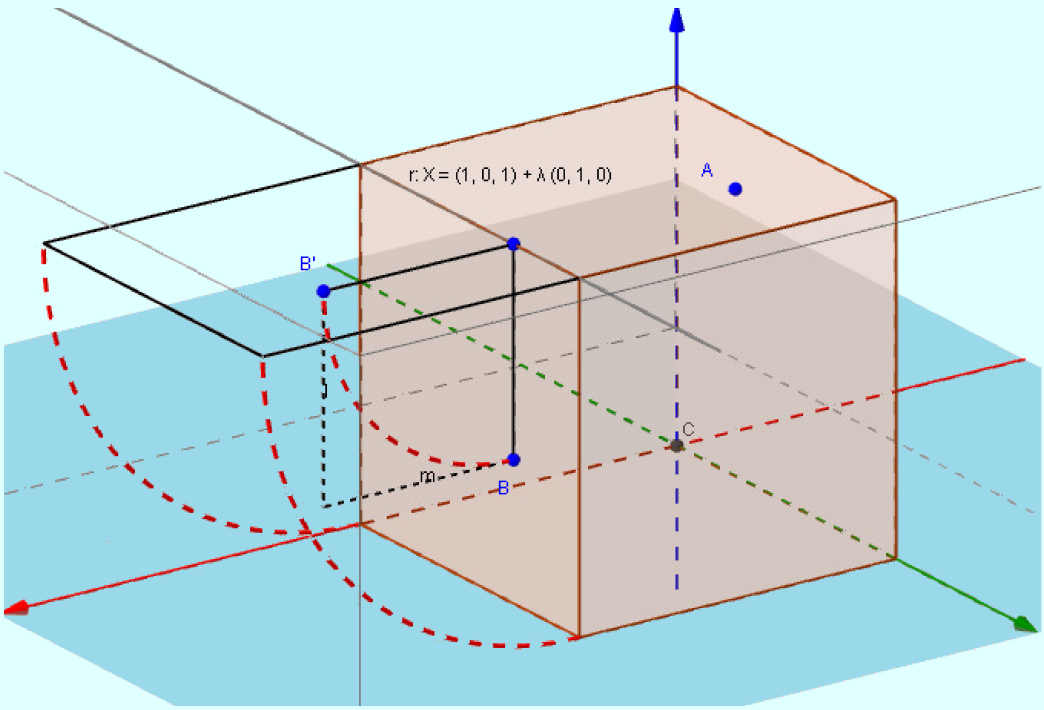
$$d(B, P) = \sqrt{\left(\lambda - \frac{7}{10}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{10}\right)^2}.$$

Olhando para esta última igualdade, pode-se ver que o mínimo ocorre quando $\lambda = 7/10$ e $B_0 = \left(1, \frac{7}{10}, 1\right)$ é o ponto da reta r mais próximo de B, e que a distância de B à reta r é igual a $d(B, r) = d(B, B_0) = \frac{6}{10}$.

Assim, fazendo uma rotação da face que está contida no plano $x = 1$ em torno da reta r, até que esta face esteja contida no plano $z = 1$ e que não coincida com outra face (como na imagem abaixo), o ponto correspondente ao ponto B será

$$B' = \left(1 + d(B, r), \frac{7}{10}, \frac{4}{10} + d(B, r)\right) = \left(\frac{16}{10}, \frac{7}{10}, 1\right).$$

Veja a imagem abaixo: Assim, o comprimento da trajetória mais curta será $d(A, B') = \frac{13}{10}$:



1.4 Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e a diagonal de uma de suas faces (com uma extremidade comum).

Solução: Observe que a solução independe de qual cubo estamos tratando. Então considere o cubo cujos vértices são $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)$, $D = (0,0,1)$, $E = (1,1,0)$, $F = (1,0,1)$, $G = (0,1,1)$ e $H = (1,1,1)$. Considere agora a diagonal $\overline{AH}$ do cubo e $\overline{AE}$ de uma das faces. Veja que o vértice A é comum a essas duas diagonais. Precisamos determinar o ângulo entre $\vec{u} = \overrightarrow{AH} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AE} = (1,1,0)$. Se α é esse ângulo, então

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Logo, $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$. Veja que temos dois valores possíveis para $\arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$, um agudo e outro obtuso. No caso consideramos o ângulo agudo.

1.5 Mostre que se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores não nulos, então $\vec{c} = |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ divide o ângulo ente $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ao meio.

Solução: Seja $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{c}$, e $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ o ângulo entre $\vec{c}$ e $\vec{b}$. Veja que estamos considerando θ_1 e θ_2 como sendo ângulos agudos entre os vetores. Neste caso, para provar que $\theta_1 = \theta_2$, é suficiente provar que $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$. Assim

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_1) &= \frac{\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{\langle \vec{a}, |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}\rangle}{|\vec{a}||\vec{c}|} \\
&= \frac{|\vec{b}|\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle + |\vec{a}|\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{|\vec{b}||\vec{a}|^2 + |\vec{a}|\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{|\vec{a}||\vec{c}|} \\
&= \frac{|\vec{b}||\vec{a}| + \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{|\vec{c}|} = \frac{|\vec{b}|^2|\vec{a}| + |\vec{b}|\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{|\vec{b}||\vec{c}|} \\
&= \frac{\langle \vec{b}, \vec{b}\rangle|\vec{a}| + |\vec{b}|\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{\langle |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}, \vec{b}\rangle}{|\vec{b}||\vec{c}|} \\
&= \frac{\langle \vec{c}, \vec{b}\rangle}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \cos(\theta_2).
\end{aligned}$$

Logo, $\theta_1 = \theta_2$ e portanto, o vetor $\vec{c}$ divide o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ao meio.

1.6 Faça o que se pede:

(a) Encontre um vetor não nulo ortogonal ao plano que contém os pontos $A = (-2,3,2)$, $B = (2,5,2)$, $C = (4,2,-1)$.

Solução: O plano que contém os pontos A, B e C é paralelo ao plano gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB} = (4, 2, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (6, -1, -3)$. Assim, como o vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é ortogonal aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, então ele é ortogonal ao plano gerado por eles e consequentemente é também ortogonal ao plano que contém os pontos A, B e C. Portanto, o vetor

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6, 12, -16)$$

é uma solução para este problema.

(b) Encontre a área do triângulo ABC.

Solução: A área do triângulo ABC é igual a metade da área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Assim, se S é a área do triângulo ABC, então

$$S = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{109}.$$

1.7 Faça o que se pede:

(a) Parametrize a reta perpendicular ao plano que contém $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 4)$ e $C = (4, 5, 6)$ e passando por A.

Solução: De modo análogo ao item (a) da questão 1.6, o vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é ortogonal ao plano que contém os pontos A, B e C, e portanto tem a mesma direção da reta que procuramos. Além disso, tal reta passa pelo ponto A. Assim, como esta reta tem a direção de $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, 4, -2)$ e passa pelo ponto $A = (1, 1, 1)$, sua equação na forma vetorial é

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 4, -2).$$

Escrevendo esta equação na sua forma paramétrica, obtemos

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

o qual é uma solução do problema.

(b) Encontre a equação $ax + by + cz = d$ do plano contendo os pontos A, B e C.

Solução: Para obter a equação de um plano, é suficiente termos um ponto e um vetor ortogonal ao plano. Já temos o ponto A (por exemplo) e também já vimos que o vetor

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, 4, -2)$$

é ortogonal ao plano que passa pelos pontos A, B e C. Assim, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano que procuramos se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0,$$

ou

$$(x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (-2, 4, -2) = 0,$$

da qual resulta

$$-2x + 4y - 2z = 0$$

que é a equação solicitada.

1.8 Use o volume para determinar se $A = (1, 1, 3)$, $B = (2, -2, 5)$, $C = (4, 2, 1)$ e $D = (2, -2, 6)$ estão no mesmo plano.

Solução: Os pontos A, B, C e D não estão no mesmo plano se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ determinam um paralelepípedo de volume não nulo. Neste caso, o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ é dado por

$$V = |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = 10.$$

Portanto, os pontos A, B, C e D não estão no mesmo plano.

1.9 Calcule a menor distância da reta $x = 1 + t,\ y = 1 - 2t,\ z = 3 - t$ para a origem $(0, 0, 0)$.

Solução: Seja $f(t)$ o quadrado da distância do ponto $(1 + t, 1 - 2t, 3 - t)$ ao ponto $(0, 0, 0)$. Então

$$f(t) = (1 + t)^2 + (1 - 2t)^2 + (3 - t)^2 = 6t^2 - 8t + 11.$$

O mínimo de f acontece para $f'(t) = 0$. Como

$$f'(t) = 12t - 8,$$

teremos que o zero acontece para $t = 2/3$. Como

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 12 > 0,$$

pelo teste da segunda derivada teremos que a menor distância da origem a reta é $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

1.10 Parametrize a reta que contém o ponto $A = (2, 1, 3)$ e que intercepta a reta $x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = 2t$ perpendicularmente.

Solução: Seja r a reta dada no enunciado. Um vetor diretor da reta r é $\vec{u} = (1, -1, 2)$. Considere o plano π que contém A e é perpendicular ao vetor $\vec{u}$. Se $P = (x, y, z)$ é um ponto de π, a equação de π é

$$0 = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = (x - 2, y - 1, z - 3) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z - 7,$$

ou seja, $x - y + 2z = 7$. A interseção de π com r ocorre para

$$(1 + t) - (1 - t) + 2(2t) = 7,$$

ou seja $t = \frac{7}{6}$. O ponto B da interseção de π com r é

$$B = \left(1 + \frac{7}{6}, 1 - \frac{7}{6}, 2\frac{7}{6}\right) = \left(\frac{13}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{14}{6}\right).$$

A reta que procuramos tem como vetor diretor um múltiplo de

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{13}{6} - 2, -\frac{1}{6} - 1, \frac{14}{6} - 3\right) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{7}{6}, -\frac{4}{6}\right),$$

ou seja, $\vec{v} = (1, -7, -4)$. Então a reta pedida tem equação

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) + t(1, -7, -4),$$

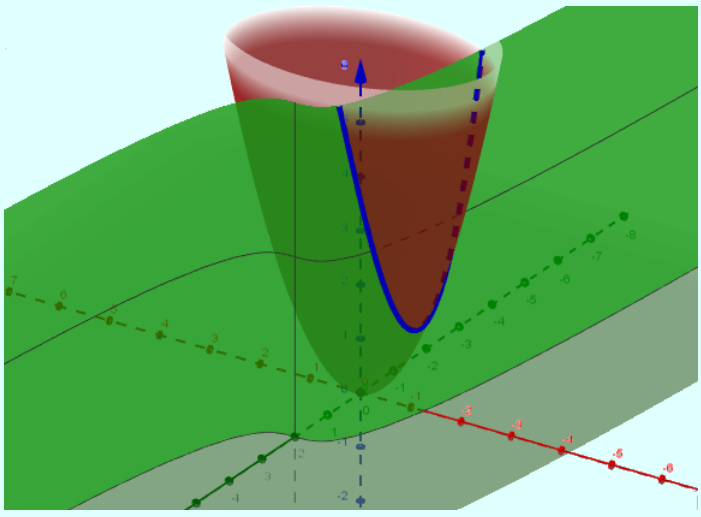
isto é, $x = 2 + t$, $y = 1 - 7t$ e $z = 3 - 4t$.

1.11 Parametrize a curva que é interseção do paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$ e o cilindro cúbico $y = 2 + x^3$.

Solução: Fazendo $x = t$ temos que as equações paramétricas da interseção do paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$ e o cilindro cúbico $y = 2 + x^3$ são

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t^3 \\ z = t^2 + 2(2 + t^3)^2. \end{cases}$$

Podemos ver a interseção no gráfico abaixo:



1.12 Duas partículas $r_1(t) = (t, t^2, t^3)$ e $r_2(t) = (1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t)$ viajam ao longo das curvas no espaço.

(a) As partículas colidem?

Solução: As partículas colidem se existir solução para a equação $r_1(t) = r_2(t)$. Igualando coordenada a coordenada, temos

$$\begin{cases} t = 1 + 2t \\ t^2 = 1 + 6t \\ t^3 = 1 + 14t. \end{cases}$$

A única solução da primeira equação é $t = -1$, e como este valor não satisfaz as outras duas equações, o sistema não possui solução. Portanto, as partículas não colidem.

(b) As trajetórias das partículas tem um ponto em comum?

Solução: As trajetórias têm um ponto em comum se a equação $r_1(t_1) = r_2(t_2)$ tiver solução. Igualando as coordenadas, temos

$$\begin{cases} t_1 = 1 + 2t_2 \\ t_1^2 = 1 + 6t_2 \\ t_1^3 = 1 + 14t_2. \end{cases}$$

Da primeira coordenada da equação, segue que

$$t_2 = \frac{t_1 - 1}{2}$$

Substituindo na segunda coordenada da equação, temos

$$t_1^2 = 1 + 6\left(\frac{t_1 - 1}{2}\right),$$

do qual obtemos

$$t_1^2 - 3t_1 + 2 = 0.$$

Cujas soluções são $t_1 = 1$ ou $t_1 = 2$. Fazendo $t_1 = 1$, teremos $t_2 = \frac{t_1 - 1}{2} = 0$. Estes valores satisfazem a terceira equação do sistema. Assim, $t_1 = 1$ e $t_2 = 0$ é uma solução do sistema.

Agora, analisando o outro valor obtido, $t_1 = 2$, temos $t_2 = \frac{t_1 - 1}{2} = \frac{1}{2}$. E como estes valores satisfazem a terceira equação $t_1^3 = 1 + 14t_2$, então o sistema tem outra solução $t_1 = 2$ e $t_2 = \frac{1}{2}$.

Portanto, as trajetórias tem dois pontos em comum.

1.13 Encontre o ponto de interseção das duas retas tangentes à curva

$$r(t) = (\text{sen}(\pi t), 2\text{sen}(\pi t), \cos(\pi t))$$

nos pontos em que $t = 0$ e $t = 1/2$.

Solução: Temos

$$r'(t) = (\pi\cos(\pi t), 2\pi\cos(\pi t), -\pi\text{sen}(\pi t)).$$

A equação vetorial da reta tangente à curva $r(t)$ no ponto $t = 0$ é

$$\alpha(t) = r(0) + tr'(0)$$

segue então

$$\alpha(t) = (0, 0, -1) + t(-\pi, -2\pi, 0) = (-\pi t, -2\pi t, -1).$$

Do mesmo modo, a equação vetorial da reta tangente à curva $r(t)$ no ponto $t = \frac{1}{2}$ é

$$\beta(t) = r(1/2) + tr'(1/2)$$

daí

$$\beta(t) = (1, 2, 0) + t(0, 0, -\pi) = (1, 2, -\pi t).$$

Se P é um ponto de interseção das retas, então existem t_1 e t_2 tais que

$$P = \alpha(t_1) = \beta(t_2).$$

Igualando coordenada a coordenada da segunda igualdade, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \pi t_1 = 1 \\ 2\pi t_1 = 2 \\ 1 = -\pi t_2 \end{cases}$$

cuja solução é $t_1 = \frac{1}{\pi}$ e $t_2 = \frac{-1}{\pi}$. O ponto da interseção portanto é

$$P = (1, 2, 1).$$

1.14 Uma partícula se movendo ao longo da curva $r(t)$ tem a propriedade que $r''(t) = (2, 0, -\cos(2t))$. Sabemos que $r(0) = (1, 2, 1)$ e $r'(0) = (2, 0, 0)$. Calcule a curva $r(t)$.

Solução: Como $r''(t) = (2, 0, -\cos(2t))$, então

$$\begin{aligned} r'(t) &= \int r''(t)dt \\ &= \left(\int 2dt, \int 0dt, \int(-\cos(2t))dt\right) \\ &= \left(2t, 0, -\frac{1}{2}\text{sen}(2t)\right) + (c_1, c_2, c_3) \end{aligned}$$

em que (c_1, c_2, c_3) é um vetor constante. Resolvendo a equação $r'(0) = (2, 0, 0)$, obtemos $(c_1, c_2, c_3) = (2, 0, 0)$. Logo

$$r'(t) = \left(2 + 2t, 0, -\frac{1}{2}\text{sen}(2t)\right).$$

Integrando novamente obtemos

$$\begin{aligned} r(t) &= \int r'(t)dt \\ &= \left(\int (2t+2)dt, \int 0dt, \int \left(-\frac{1}{2}\text{sen}(2t)\right)dt\right) \\ &= \left(t^2 + 2t, 0, \frac{1}{4}\cos(2t)\right) + (x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

sendo (x_0, y_0, z_0), também, um vetor constante. Resolvendo a equação $r(0) = (1, 2, 1)$, encontramos $(x_0, y_0, z_0) = \left(1, 2, \frac{3}{4}\right)$.
Portanto as curvas de nível são parábolas cúbicas

$$r(t) = \left(t^2 + 2t + 1,\ 2,\ \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{3}{4}\right).$$

1.15 Calcule o limite, se existir,

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}, \frac{e^t - 1}{t}, \frac{(t+1)^2 - 1}{(t+1)^2 - 3(t+1) + 2}\right).$$

Solução: Vamos verificar que os limites de cada coordenada existem, então o limite acima existe e é igual a

$$\left(\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}, \lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t}, \lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^2 - 1}{(t+1)^2 - 3(t+1) + 2}\right).$$

No limite da primeira coordenada, usamos a regra de L'Hospital, assim

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}\, t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

Na segunda coordenada, já sabemos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = \left.\frac{de^t}{dt}\right|_{t=0} = e^0 = 1.$$

E na terceira coordenada, temos

$$\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^2 - 1}{(t+1)^2 - 3(t+1) + 2} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{t(t-1)} = \lim_{t\to 0}\frac{t+2}{t-1} = -2.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}, \frac{e^t - 1}{t}, \frac{(t+1)^2 - 1}{(t+1)^2 - 3(t+1) + 2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, -2\right).$$

1.16 Faça o que se pede:

(a) Encontre o comprimento da curva

$$r(t) = (t^3, 24t, 6t^2)$$

para $t \in [0, 5]$.

Solução: Temos $r'(t) = (3t^2, 24, 12t)$. O comprimento da curva r é dado por

$$\begin{aligned} L &= \int_0^5 \|r'(t)\| dt \\ &= \int_0^5 \sqrt{(3t^2)^2 + 24^2 + (12t)^2} dt \\ &= \int_0^5 \sqrt{9(t^2+8)^2} dt \\ &= \int_0^5 3(t^2+8) dt \\ &= 245. \end{aligned}$$

(b) A projeção da curva acima no plano xz é a curva em duas dimensões

$$p(t) = (t^3, 6t^2).$$

Encontre seu comprimento para $t \in [0, 5]$.

Solução: Temos $p'(t) = (3t^2, 12t)$. O comprimento da curva p é dado por

$$\begin{aligned} L &= \int_0^5 \|p'(t)\| dt \\ &= \int_0^5 \sqrt{(3t^2)^2 + (12t)^2} dt \\ &= \int_0^5 3t\sqrt{t^2+16} \\ &= \left[(t^2+16)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 \\ &= 41\sqrt{41} - 64. \end{aligned}$$

Funções de várias variáveis

Plano

Tópicos	22
Métodos e Técnicas	23
Enunciados	24
Dicas	26
Respostas	27

Tópicos abordados nos exercícios.

- Domínio e imagem funções de várias variáveis;
- Curvas de nível;
- Superfícies de nível;
- Gráfico de funções de várias variáveis;
- Limite e continuidade de funções de várias variáveis.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Noções sobre domínio e imagem de função de uma variável real;
- Geometria plana e espacial;
- Geometria analítica;
- Construção de gráficos de funções de uma variável real;
- Comandos básicos de algum aplicativo matemático de computação algébrica e simbólica;
- Limite e continuidade funções de uma variável real.

Métodos e Técnicas

Esboço de gráficos.	• Nos exercícios que seguem utilizam-se as interseções da função com os planos coordenados, curvas de nível e curvas de contorno para esboçar o gráfico de funções de duas variáveis. Determinar o domínio e a imagem das funções é indispensável. **Exercícios 2.2 e 2.4**
Aplicação da definição e teoremas de limites para funções de várias variáveis.	• Aplicação do Teorema do Confronto para os seguintes exercícios de limite e continuidade. **Exercícios 2.5(a), 2.6(b) e 2.7(a)** • Definição de continuidade em funções de várias variáveis. **Exercícios 2.5(b), 2.6(c), 2.7(b) e 2.9**

Enunciado dos Exercícios

●○○○ **2.1** Encontre as curvas de nível da função $f(x, y) = x^3 + y$. (As curvas de nível são as curvas dadas por $f(x, y) = c$ em que c é uma constante.)

●●○○ **2.2** Encontre o domínio e a imagem da função $f(x, y) = \log\left(\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}\right)$ e faça o gráfico.

●●●○ **2.3** Encontre as curvas de nível da função

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2},$$

e esboce os gráficos das curvas de nível e da função.

●●●○ **2.4** Seja a função

$$f(x, y, z) = 4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20.$$

Que tipo de superfície é a superfície de nível $f(x, y, z) = 0$? Esboce o gráfico da mesma.

●●○○ **2.5** Responda:

(a) Considere a função $f(x, y) = \frac{x^2 y}{4x^2 + y^2}$. Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? Qual seu valor?

(b) É possível dar um valor a $f(0, 0)$ de modo que f seja contínua em $(0, 0)$? Justifique.

●●●● **2.6** Faça o que se pede:

(a) Estude a função $f(x, y) = \frac{x^2}{4x^2 - y^2}$ em relação a domínio, imagem, curvas de nível e esboce o gráfico.

(b) Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? Qual seu valor?

(c) É possível dar um valor a $f(0, 0)$ de modo que f seja contínua em $(0, 0)$?

●●●○

2.7 Responda:

(a) Considere a função $f(x,y) = \dfrac{xy - y}{x^2 - x + 2xy - 2y}$. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$? Qual seu valor?

(b) É possível dar um valor a $f(1,2)$ de modo que f seja contínua em $(1,2)$? Justifique.

●●○○

2.8 Use um computador para desenhar a superfície de nível $f(x,y,z) = 4$ onde $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2$

●●●○

2.9 Descreva o conjunto dos pontos nos quais a função f seja contínua:

(a) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 1$.

Sugestões

2.1 Isole a variável y.

2.2 Analise numerador e denominador simultâneamente e estritamente positivos e em seguida negativos.

2.3 Estude a equação para $c = 0$ e para $c \neq 0$.

2.4 Complete quadrados e observe o gráfico das curvas em cada plano coordenado.

2.5 Observe que $g(x, y) = \dfrac{x^2}{4x^2 + y^2}$ é limitada.

2.6 Para $c \in Im_f$ estude

$$c = \frac{x^2}{4x^2 - y^2}$$

para os diferentes valores possíveis de c.

2.7 Use fatoração para encontrar uma função contínua.

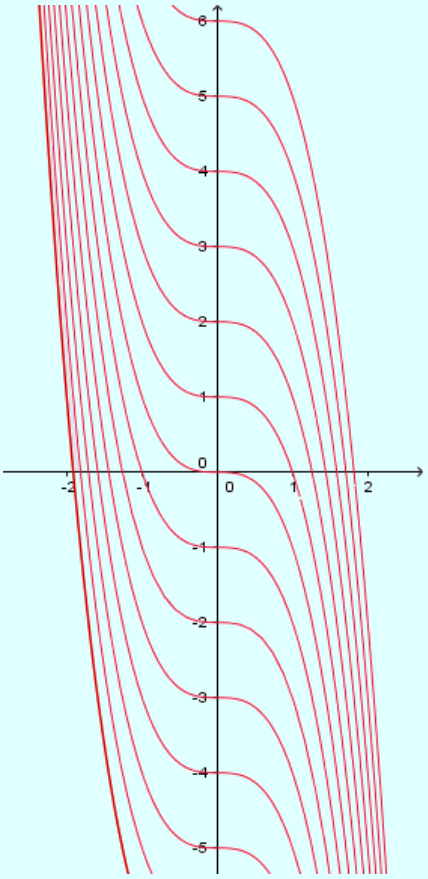
2.8 Use o software MAXIMA, Geogebra ou Maple.

2.9 Considere o número real dado por $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ e faça uma substituição de variável.

Respostas

2.1 Encontre as curvas de nível da função $f(x, y) = x^3 + y$. (As curvas de nível são as curvas dadas por $f(x, y) = c$ em que c é uma constante.)

Solução: Fazendo $f(x, y) = c$, temos $x^3 + y = c$, que implica $y = -x^3 + c$. Abaixo, o esboço de algumas curvas de nível.



2.2 Encontre o domínio e a imagem da função

$$f(x, y) = \log\left(\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}\right)$$

e faça o gráfico.

Solução: Devemos ter

$$\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1} > 0$$

e isto ocorre se o numerador e o denominador forem ambos estritamente positivos ou ambos estritamente negativos. Isto é, se

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ y^2 - 1 > 0, \end{cases}$$

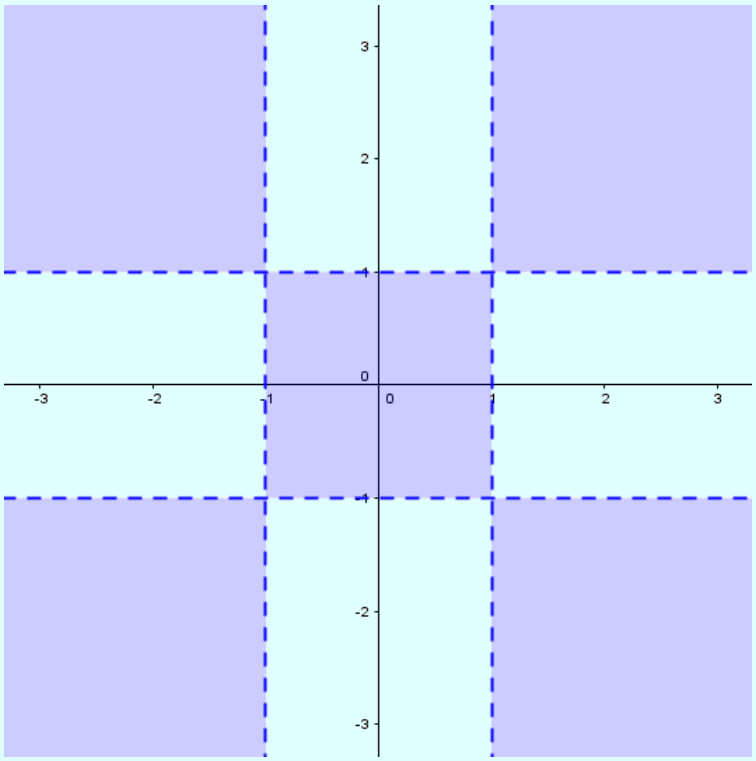
temos $\{x, y\} \subset (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Ou se

$$\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ y^2 - 1 < 0, \end{cases}$$

temos $\{x, y\} \subset (-1, 1)$. Assim, o domínio de f é

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \{x, y\} \subset (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \text{ ou } \{x, y\} \subset (-1, 1)\}.$$

O gráfico do domínio é o seguinte



Seja $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$k = \log \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}.$$

Se $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ é base do logaritmo, então

$$a^k = \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}.$$

Então, para termos $f(x_0, y_0) = k$, basta tomarmos o ponto $(x_0, y_0) = (\sqrt{a^k + 1}, \sqrt{2})$ e é fácil verificar que $f(\sqrt{a^k + 1}, \sqrt{2}) = k$. Portanto, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, a imagem de f é o conjunto de todos os números reais.

2.3 Encontre as curvas de nível da função

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2},$$

e esboce os gráficos das curvas de nível e da função.

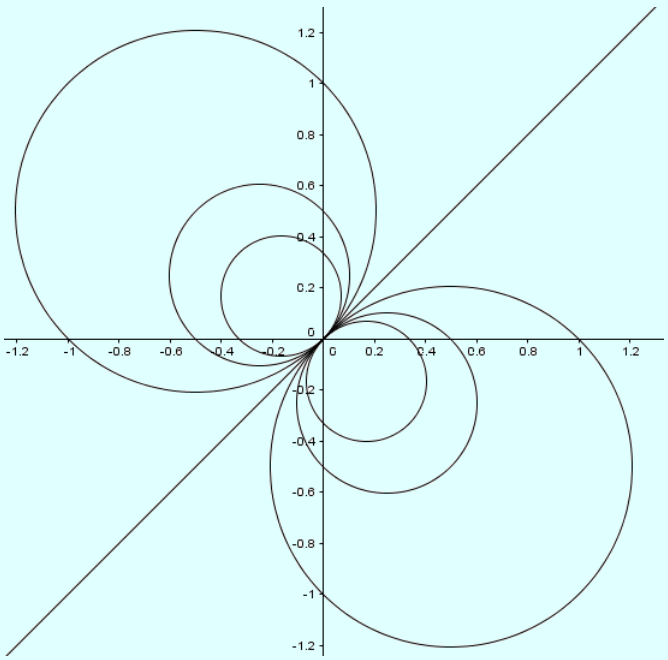
Solução: Tomando $f(x, y) = c$, temos $c = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$. Se $c = 0$, então $x = y$. Se $c \neq 0$, teremos

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{c}x + \frac{1}{c}y = 0,$$

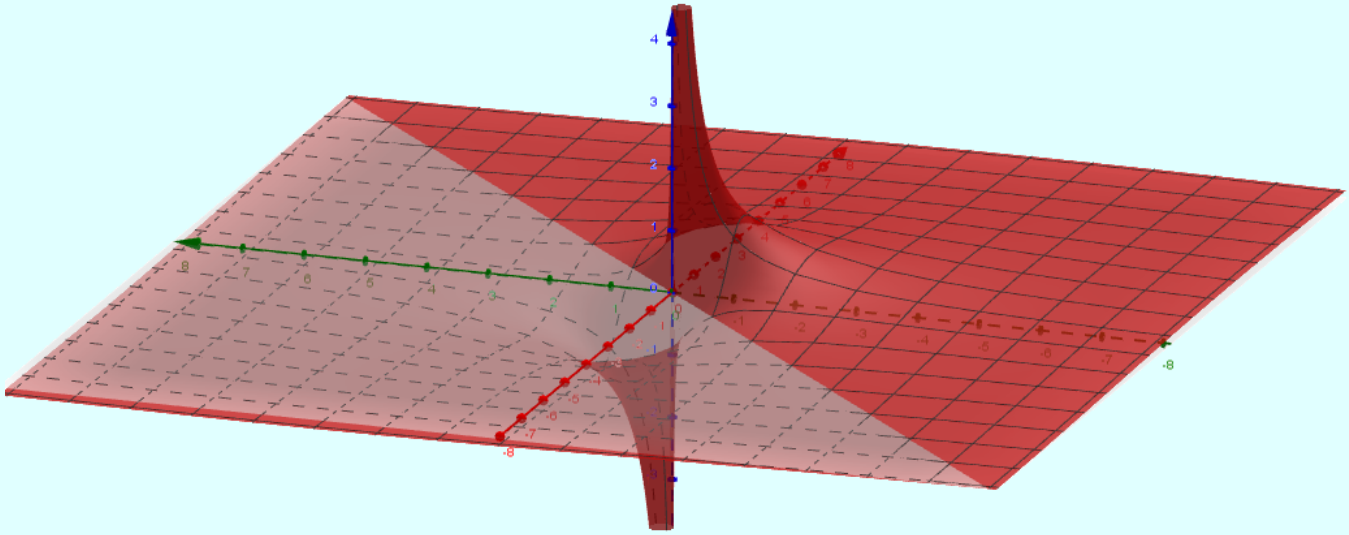
completando quadrados obtemos

$$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{2c^2}.$$

Que são equações de circunferências de centro $\left(\frac{1}{2c}, -\frac{1}{2c}\right)$ e raio $\frac{1}{\sqrt{2}|c|}$. O gráfico de algumas curvas de nível está na imagem abaixo:



O gráfico da função é:



2.4 Seja a função

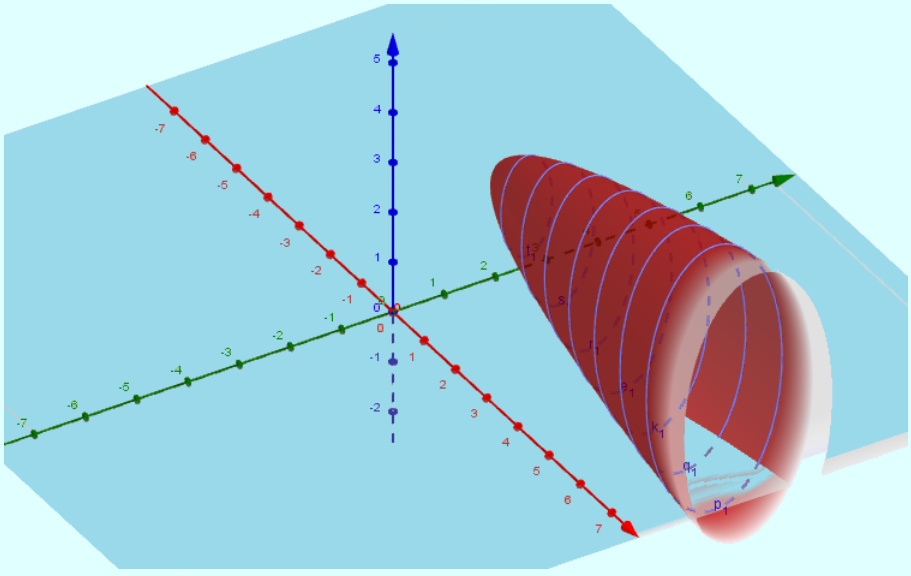
$$f(x, y, z) = 4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20.$$

Que tipo de superfície é a superfície de nível $f(x, y, z) = 0$? Esboce o gráfico da mesma.

Solução: Da igualdade $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$ e fazendo completamento de quadrados encontramos a seguinte equação

$$\frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}} + (z-2)^2 = x.$$

Para cada $x > 0$ temos que sua projeção no plano yz é uma elipse, e como x em cada direção no plano xz é dado por uma potência de segundo grau, isto é, uma parábola. Portanto, a função representa um paraboloide elíptico. Seu gráfico é:



2.5 Responda:

(a) Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{4x^2+y^2}$. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Qual seu valor?

Solução: Primeiro veja que a função $g(x,y) = \dfrac{x^2}{4x^2+y^2}$ é limitada, pois

$$0 \leq g(x,y) = \frac{x^2}{4x^2+y^2} \leq \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}.$$

E a função $h(x,y) = y$ satisfaz $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$, nessas condições, o limite do produto $g(x,y)\cdot h(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$ é igual a zero, isto é, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\cdot h(x,y) = 0$. Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{4x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\cdot h(x,y) = 0.$$

(b) É possível dar um valor a $f(0,0)$ de modo que f seja contínua em $(0,0)$? Justifique.

Solução: Para que a função f seja contínua em $(0,0)$, devemos ter $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, então basta definir $f(0,0) = 0$, e assim f será contínua.

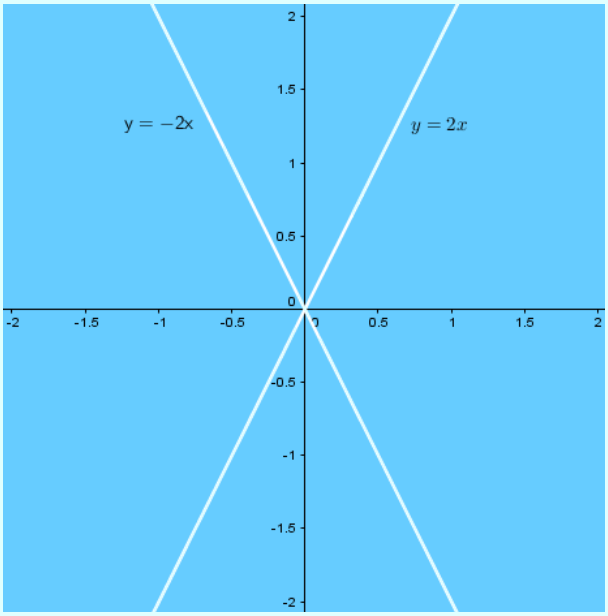
2.6 Faça o que se pede:

(a) Estude a função $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4x^2-y^2}$ em relação a domínio, imagem, curvas de nível e esboce o gráfico.

Solução: O domínio de f é o conjunto

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x^2 - y^2 \neq 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \neq 2x \text{e} y \neq -2x\}. \end{aligned}$$

O gráfico do domínio está na imagem abaixo, e as retas $y = 2x$ e $y = -2x$ estão brancas para significar que não pertencem ao domínio de f.



Para que o número real c pertença a imagem de f, é suficiente que o conjunto solução da equação

$$c = \frac{x^2}{4x^2 - y^2}$$

seja não vazio. Desta última equação, segue que

$$cy^2 = (4c - 1)x^2 \tag{1}$$

Para $c \neq 0$, da equação acima, temos

$$y^2 = \frac{4c - 1}{c}x^2 \geq 0. \tag{2}$$

Da qual resulta

$$\frac{4c - 1}{c} \geq 0.$$

Se $c > 0$, então da equação acima, $4c - 1 \geq 0$ e portanto $c \geq \frac{1}{4}$. Se $c < 0$, então já teremos necessariamente $4c - 1 < 0$. E como 0 pertence a imagem de f, pois $f(0, 1) = 0$, então o conjunto imagem de f é

$$\begin{aligned} Im_f &= \left\{ c \in \mathbb{R};\ c < 0 \text{ ou } c \geq \frac{1}{4} \right\} \cup \{0\} \\ &= (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty \right). \end{aligned}$$

Agora, vamos encontrar as curvas de nível da função f. Lembrando que o ponto $(0, 0)$ não está no domínio de f, segue da equação (1) que a curva de nível $f(x, y) = 0$ é a reta $x = 0$

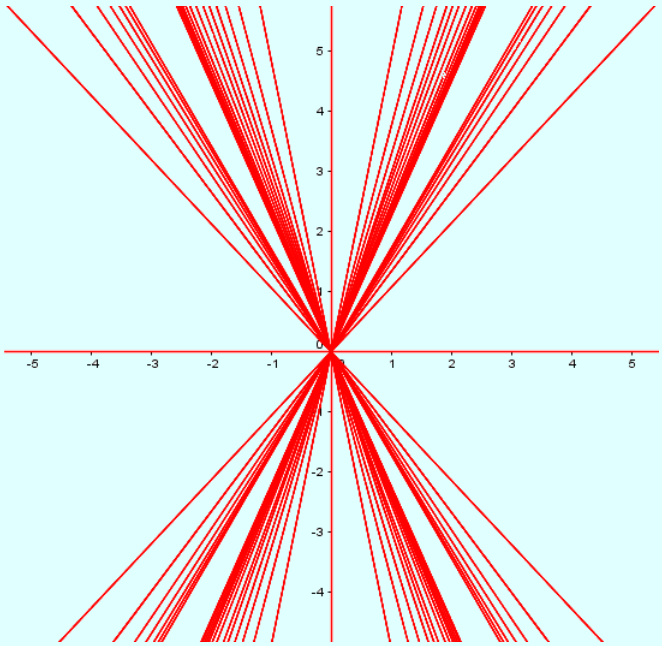
menos a origem $(0,0)$.

E da equação (2), as curvas de nível $f(x,y) = c \neq 0$, são as retas

$$y = \pm\sqrt{\frac{4c-1}{c}}x$$

menos a origem $(0,0)$

Abaixo o gráfico de algumas curvas de nível



(b) Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Qual seu valor?

Solução: Considere os caminhos $\alpha_1(t) = (t,0)$ e $\alpha_2(t) = (0,t)$. É fácil verificar que $\lim\limits_{t\to 0}\alpha_i(t) = \alpha_i(0) = (0,0)$ e que $\alpha_i(t) \neq (0,0)\ \ \forall t \neq 0$, e $\forall\, i \in \{1,2\}$. Temos que

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha_1(t)) = \lim_{(t,0)\to(0,0)} f(t,0) = \lim_{(t,0)\to(0,0)} \frac{t^2}{4\cdot t^2 - 0^2} = \frac{1}{4}$$

e também

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha_2(t)) = \lim_{(0,t)\to(0,0)} f(0,t) = \lim_{(0,t)\to(0,0)} = \frac{0^2}{4\cdot 0^2 - t^2} = 0.$$

Como

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha_1(t)) \neq \lim_{t\to 0} f(\alpha_2(t))$$

então o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

(c) É possível dar um valor a $f(0,0)$ de modo que f seja contínua em $(0,0)$?

Solução: Para que f seja contínua em $(0,0)$, seria necessário que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, mas pelo item (b) acima, tal limite não existe, e portanto a descontinuidade de f no ponto $(0,0)$ não é removível.

2.7 Responda:

(a) Considere a função $f(x,y) = \dfrac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y}$. Existe $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$? Qual seu valor?

Solução: Temos

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)y}{(x-1)(x+2y)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y}{x+2y} \\ &= \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Portanto, o limite existe e é igual a $\frac{2}{5}$.

(b) É possível dar um valor a $f(1,2)$ de modo que f seja contínua em $(1,2)$? Justifique.

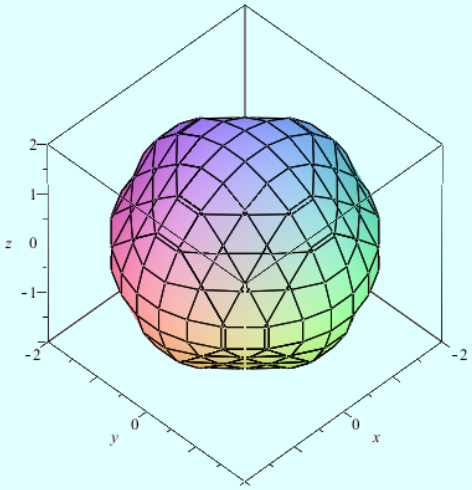
Solução: Sim, é possível, pois para que f seja contínua no ponto $(1,2)$, basta definir

$$f(1,2) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = \frac{2}{5}.$$

2.8 Use um computador para desenhar a superfície de nível $f(x,y,z) = 4$ sendo $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2$.

Solução: Se escolhermos o "Maple", basta digitar "with(plots)", apertar a tecla "Enter" do teclado, e em seguida digitar "implicitplot3d($4 = x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2, x = -2..2, y = -2..2, z = -2..2$)" e apertar "Enter" novamente. A superfície será plotada como na imagem abaixo:

```
with(plots)
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot,
  display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d,
  listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d,
  polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
implicitplot3d(4 = x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2, x = -2..2, y = -2..2, z = -2..2)
```



2.9 Descreva o conjunto dos pontos nos quais a função f seja contínua:

(a) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$

Solução: Como f é composta de funções contínuas, então f é contínua em todo o seu domínio. O domínio de f é o conjunto

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x}{y} > 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \{x,y\} \subset (-\infty, 0) \text{ ou } \{x,y\} \subset (0,+\infty)\} \end{aligned}$$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

Solução: De modo análogo ao item (a), f é contínua em todo o seu domínio. O domínio de f é o conjunto

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq y\}.$$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 1$.

Solução: Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f pode ser escrita como composta de funções contínuas, então f é contínua no conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mas para determinar se f é contínua em $(0,0)$, é necessário

verificar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Tomando $u = \sqrt{x^2+y^2}$, podemos interpretar u como sendo a distância do ponto (x,y) à origem, assim $(x,y) \to (0,0)$ é equivalente à $u \to 0$, e ainda $u \neq 0\ \forall (x,y) \neq (0,0)$.
Temos então

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \\ &= 1 \\ &= f(0,0).\end{aligned}$$

Assim, f também é contínua em $(0,0)$ e portanto é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Diferenciabilidade

Plano

Tópicos 37

Métodos e Técnicas 38

Enunciados 39

Dicas 42

Respostas 43

Tópicos abordados nos exercícios.

- Derivadas parciais e sua interpretação geométrica;
- Planos tangentes, retas normais e retas perpendiculares;
- Funções diferenciáveis e de classe C^1;
- Derivadas direcionais e gradiente: cálculo e interpretação geométrica;
- Regra da cadeia e o Teorema da Função Implícita;
- Derivadas de ordem superior.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Geometria analítica;
- Gráfico de função de uma variável;
- Derivadas ordinárias e regras básicas de derivação;
- Regra da cadeia para funções de uma variável.

Métodos e Técnicas

Regra da cadeia	• Utiliza-se a regra da cadeia para funções de mais de uma variável no seguinte exercício. **Exercício 3.6**
Teorema da Função Implícita	• Nos seguintes exercícios, aplica-se o Teorema da Função Implícita para calcular as derivadas ordinárias ou parcias de funções dadas implicitamente **Exercícios 3.12 e 3.13** • Na questão a seguir, aplica-se o Teorema da Função Implícita para mostrar que a equação define uma curva. **Exercício 3.9**

Enunciado dos Exercícios

●●○○ **3.1** Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \sqrt{4-4x^2+y^2}$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ interprete estes números como inclinações de retas tangentes às funções $g(x) = f(x,2)$ e $h(y) = f(1,y)$. Faça um gráfico mostrando as retas.

●○○○ **3.2** Encontre as derivadas parciais $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ da função $f(x,y) = 2x^y$ no ponto $(2,3)$.

●●○○ **3.3** Verifique que a função

$$u(x,t) = e^{-\alpha^2 k^2 t}\operatorname{sen} kx$$

é solução da *equação de condução do calor.*

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$$

sendo k e α são constantes.

●●○○ **3.4** A equação diferencial

$$f_t = f - xf_x - x^2 f_{xx}$$

é um exemplo da famosa equação de Black-Scholes. Aqui $f(x,t)$ é o preço de uma opção de compra, x o preço da ação e t o tempo. Verifique que $f(x,t) = e^t \ln(x)$ resolve esta equação.

●●○○ **3.5** Encontre as derivadas parciais $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ da função

$$f(x,y) = \int_x^y \operatorname{sen}(t^2)dt.$$

●○○○ **3.6** Use a regra da cadeia para encontrar a derivada dz/dt, sendo $z = \cos(2x+3y)$, $x(t) = t^3$ e $y(t) = 1/t^2$.

●●●○ **3.7** Faça o que se pede:

(a) Encontre a equação do plano tangente à superfície

$$z = 2(x+1)^2 + (y-3)^2 + 1$$

no ponto $(1,-1,25)$.

(b) Encontre a equação do plano tangente à superfície

$$z = \ln(x - 3y)$$

no ponto $(4, 1, 0)$.

• • • ○ **3.8** Encontre a equação do plano tangente e da reta normal à superfície $x - z - 4\arctan(yz) = 0$ pelo ponto $(1 + \pi, 1, 1)$.

• • • ○ **3.9** Faça o que se pede:

(a) Verifique que a equação

$$f(x, y) = x^4y^2 + 5x^2y^4 = 84$$

define uma curva no plano xy na vizinhança do ponto $(1, 2)$.

(b) Encontre uma reta tangente $ax + by = c$ à curva no ponto $(1, 2)$ calculando o gradiente $\nabla f(x, y) = (a, b)$ e substituindo o ponto para obter o valor c.

• • • ○ **3.10** Faça o que se pede:

(a) Encontre a equação do plano tangente à superfície paramétrica $r(u, v) = (u^2, v^2, uv)$ no ponto $(u, v) = (1, 1)$.

(b) Mostre que a superfície satisfaz $xy - z^2 = 0$. Encontre a equação do plano tangente computando o gradiente no ponto $(1, 1, 1)$.

• • • ○ **3.11** Verifique que o elipsoide

$$6x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 18$$

e a esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$$

têm o mesmo plano tangente no ponto $(1, 1, 2)$. Faça um gráfico que mostre o elipsoide, a esfera e o plano tangente comum.

• • ○ ○ **3.12** Calcule a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ se x e y são relacionados por $\operatorname{sen}(y) + \cos(x) = \operatorname{sen}(y)\cos(x)$.

●●●○ **3.13** Considere z definida implicitamente por $yz = e^{x+z}$ e calcule as derivadas parciais z_x e z_y.

●●●● **3.14** Faça o que se pede:

(a) Faça um gráfico das curvas de nível da função

$$f(x, y) = y^2(y^2 - 3) - x^2(x^2 - 2).$$

(b) Especialmente faça ao gráfico da curva $f(x, y) = 0$.

(c) Encontre o vetor gradiente $\nabla f = (f_x, f_y)$ no ponto

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{4 - \sqrt{5}}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Esboce um gráfico com a curva de nível, o vetor gradiente e a reta tangente à curva de nível no ponto (x_0, y_0).

●●●● **3.15** Encontre o raio que é a reflexão do raio $r(t) = (t, -t, 2)$ na superfície $z = x^2 + y^2$.

●●○○ **3.16** Você está em uma viagem aérea sobre Belém em uma posição $(2, 3)$ e quer evitar uma tempestade em uma região de baixa pressão. A pressão é dada pela função $p(x, y) = 3x^2 + 2y^2$. Em que direção você deve voar de modo que a variação da pressão seja máxima?

●●○○ **3.17** Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Calcule para que valores de t, $D_{v(t)} f(0, 0)$ é positivo.

●●●○ **3.18** Dada uma função f assuma que a derivada direcional

$$D_v f(1, 1) = 3\sqrt{5}$$

e

$$D_w f(1, 1) = 5\sqrt{5},$$

sendo $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ e $w = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$. Encontre $\nabla f(1, 1)$.

Sugestões

3.1 Note que, a equação da reta tangente à $g(x) = f(x, 2) = \sqrt{8 - 4x^2}$ em $x = 1$ é dada por $z - g(1) = g'(1)(x - 1)$.

3.2 Observe o domínio da função f antes de derivar parcialmente.

3.3 Utilize a regra da cadeia atentando para a multiplicidade das constantes.

3.4 Desenvolva o lado direito da equação dada.

3.5 Observe a continuidade do integrando, condição mais do que suficiente para aplicar o TFC.

3.6 Aplique a regra da cadeia observando o domínio da curva.

3.7 Para $\mathbf{x}, \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^2$ basta aplicar a equação do plano tangente $z - f(\mathbf{x_0}) = f'(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$. Ou lembrar que o vetor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x_0}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x_0}), -1\right)$ é ortogonal à superfície no ponto $\mathbf{x_0}$.

3.8 Defina a função $F(x, y, z)$ e determine ∇F.

3.9 Defina $F(x, y) = f(x, y) - 84$ e aplique o Teorema das Funções Implícitas.

3.10 As derivadas $\dfrac{\partial r}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial r}{\partial v}$ são paralelas ao plano tangente de r.

3.11 Defina as funções F e G a partir do elipsóide e da esfera respectivamente. Em seguida relacione seus gradientes.

3.12 Defina f a partir da equação e use o Teorema das Funções Implícitas.

3.13 Para satisfazer duas das hipóteses do TFI, tente o ponto $(-2, 1/2, 2)$.

3.14 Utilize a interpretação geométrica de ∇f para determinar a equação da reta tangente. Os gráficos use o software Geogebra.

3.15 Tome o versor $\vec{n}$ do vetor normal e decomponha os vetores incidente $\vec{v}_i$ e refletido $\vec{v}_r$.

3.16 Observe qie p é de classe C^1. E, lembre que $\vec{v} \cdot \nabla f = \|\vec{v}\| \, \|\nabla f\| \cos\theta$.

3.17 Verifique se você pode utilizar $D_{v(t)} f(x, y) = v(t) \cdot \nabla f(x, y)$.

3.18 Suponha $f \in C^1$ e defina $\nabla f(1, 1) = (a, b)$.

Respostas

3.1 Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \sqrt{4-4x^2+y^2}$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ e interprete estes números como inclinações de retas tangentes às funções $g(x) = f(x,2)$ e $h(y) = f(1,y)$. Faça um gráfico mostrando as retas.

Solução: Observe que para pontos (x,y) que não pertencem à hipérbole $x^2 - \frac{y^2}{2^2} = 1$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4-4x^2+y^2}}(-8x)\\ &= \frac{-4x}{\sqrt{4-4x^2+y^2}},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4-4x^2+y^2}}(2y)\\ &= \frac{y}{\sqrt{4-4x^2+y^2}},\end{aligned}$$

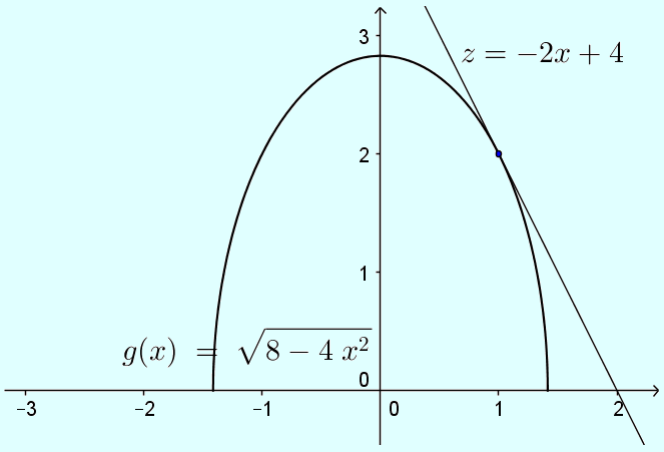
logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1.$$

A equação da reta tangente à $g(x) = f(x,2) = \sqrt{8-4x^2}$ em $x = 1$ dada por $z - g(1) = g'(1)(x-1)$ será

$$\begin{aligned}z - g(1) &= g'(1)(x-1)\\ z - f(1,2) &= \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1)\\ z - 2 &= -2(x-1)\\ z &= -2x + 4.\end{aligned}$$

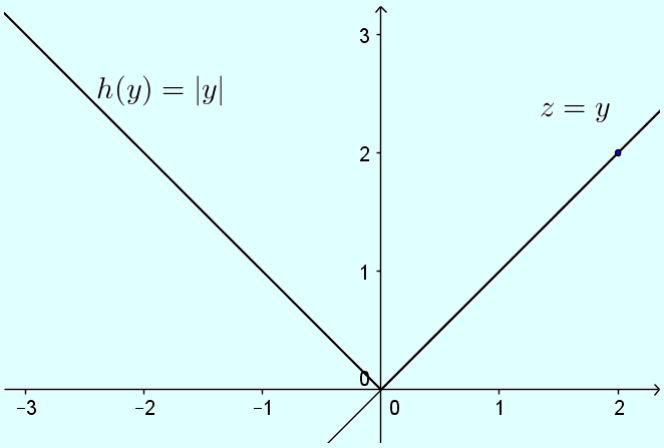
Graficamente temos



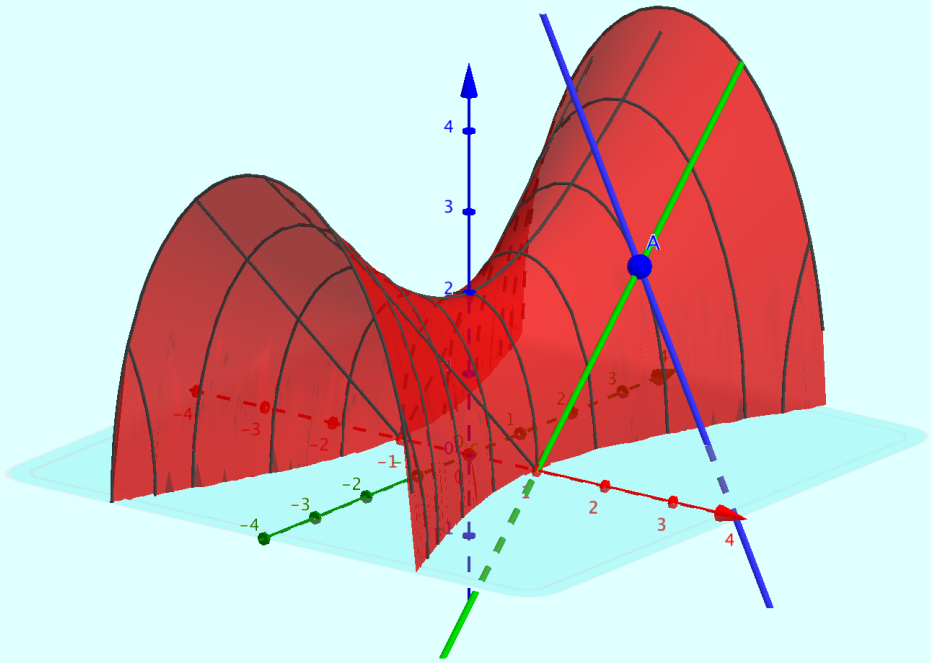
Analogamente, a equação da reta tangente à $h(y) = f(1, y) = \sqrt{y^2} = |y|$ em $y = 2$ dada por $z - h(2) = h'(2)(y - 2)$ será

$$\begin{aligned} z - h(2) &= h'(2)(y - 2) \\ z - f(1, 2) &= \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \\ z - 2 &= 1(y - 2) \\ z &= y. \end{aligned}$$

Graficamente temos



No espaço temos



3.2 Encontre as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ da função $f(x, y) = 2x^y$ no ponto $(2, 3)$.

Solução: Para cada y fixo temos

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2yx^{y-1}.$$

Agora, para cada x fixo positivo temos

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x^y \ln x.$$

Então,

$$f_x(2, 3) = 24 \quad \text{e} \quad f_y(2, 3) = 16\ln(2).$$

3.3 Verifique que a função

$$u(x, t) = e^{-\alpha^2 k^2 t}\text{sen}kx$$

é solução da *equação de condução do calor.*

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t)$$

sendo k e α são constantes.

Solução: Vamos calcular primeiramente a derivada parcial de primeira ordem

$$u_t(x, t) = -\alpha^2 k^2 e^{-\alpha^2 k^2 t}\text{sen}kx, \tag{3}$$

e depois a derivada parcial de segunda ordem

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}(x, t)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x, t)\left[ke^{-\alpha^2 k^2 t}\cos kx\right] \\ &= -k^2 e^{-\alpha^2 k^2 t}\text{sen}kx. \end{aligned} \tag{4}$$

De (3) e de (4) segue diretamente que

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t).$$

3.4 A equação diferencial

$$f_t = f - xf_x - x^2 f_{xx}$$

é um exemplo da famosa equação de Black-Scholes. Aqui $f(x, t)$ é o preço de uma opção de compra, x o preço da ação e t o tempo. Verifique que $f(x, t) = e^t \ln(x)$ resolve esta equação.

Solução: Calculemos

$$f_x(x,t) = \frac{e^t}{x}, \tag{5}$$

$$f_t(x,t) = e^t \ln(x), \tag{6}$$

e

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^t}{x}\right) \\ &= -\frac{e^t}{x^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Observe que da função $f(x,y)$, (5), (6) e (7) temos

$$\begin{aligned} f(x,t) - xf_x(x,t) - x^2 f_{xx}(x,t) &= e^t \ln(x) - x \cdot \frac{e^t}{x} - x^2 \cdot \left(-\frac{e^t}{x^2}\right) \\ &= e^t \ln(x) - e^t + e^t \\ &= e^t \ln(x) \\ &= f_t(x,t). \end{aligned}$$

3.5 Encontre as derivadas parciais $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ da função

$$f(x,y) = \int_x^y \operatorname{sen}(t^2)dt.$$

Solução: Calculemos $f_y(x,y)$ primeiramente, ou seja, estamos interessados em encontrar a derivada da função $g(y) = f(x,y) = \int_x^y \operatorname{sen}(t^2)dt$ para cada x fixo. Como o integrando é uma composição de funções contínuas em todo $\mathbb{R}$, temos que $\operatorname{sen}(t^2)$ é uma função contínua em toda a reta. Além disso, pelo fato de estarmos derivando f parcialmente em relação a y, significa que $x \in \mathbb{R}$ é uma constante. Portanto, supondo $P(t)$ uma primitiva de $\operatorname{sen}(t^2)$, o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que

$$\int_x^y \operatorname{sen}(t^2)dt = P(y) - P(x).$$

Como $P(x)$ é uma constante segue que

$$f_y(x,y) = \frac{d}{dy}g(y) = \frac{d}{dy}\int_x^y \operatorname{sen}(t^2)dt = \frac{d}{dy}\left(P(y) - P(x)\right) = \operatorname{sen}(y^2).$$

Analogamente, $f_x(x, y)$ é facilmente calculada observando a propriedade de integral e definindo $h(x) = f(x, y) = -\int_y^x \text{sen}(t^2)dt$, e lembrando que agora $P(y)$ é uma constante, resulta então

$$f_x(x, y) = \frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}\left(-\int_y^x \text{sen}(t^2)dt\right) = \frac{d}{dx}(-P(x) + P(y)) = -\text{sen}(x^2).$$

3.6 Use a regra da cadeia para encontrar a derivada dz/dt, sendo $z = \cos(2x + 3y)$, $x(t) = t^3$ e $y(t) = 1/t^2$.

Solução: Definamos $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (t^3, 1/t^2)$ que é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por outro lado, a função $z(x, y) = \cos(2x + 3y)$ possui derivadas parciais

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) &= -2\text{sen}(2x + 3y)\\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) &= -3\text{sen}(2x + 3y)\end{aligned}$$

contínuas em todo $\mathbb{R}^2$ (que é um conjunto aberto), segue então que z é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, e, portanto

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}(\alpha(t)) &= \nabla z(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}(\alpha(t)), \frac{\partial z}{\partial y}(\alpha(t))\right) \cdot (x'(t), y'(t))\\ &= \left(-2\text{sen}(2t^3 + 3/t^2), -3\text{sen}(2t^3 + 3/t^2)\right) \cdot (3t^2, -2/t^3)\\ &= -6t^2\text{sen}((2t^5 + 3)/t^2) + \frac{6}{t^3}\text{sen}((2t^5 + 3)/t^2)\\ &= -6\text{sen}((2t^5 + 3)/t^2)\left(t^2 - \frac{1}{t^3}\right)\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.7 Faça o que se pede:

(a) Encontre a equação do plano tangente à superfície

$$z = 2(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + 1$$

no ponto $(1, -1, 25)$.

Solução: Definamos $f(x,y) = 2(x+1)^2 + (y-3)^2 + 1$ e seja $\mathbf{x} = (x,y)$. Sabendo que a equação do plano tangente a f no ponto $\mathbf{x_0} = (1,-1)$ satisfaz

$$\begin{aligned} z - f(\mathbf{x_0}) &= f'(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \\ z - f(\mathbf{x_0}) &= \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \\ z - f(1,-1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) \right) \cdot [(x,y) - (1,-1)] \\ z - f(1,-1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) \right) \cdot (x-1, y+1), \end{aligned}$$

calculemos então,

$$f'(\mathbf{x}) = \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (4(x+1), 2(y-3)).$$

Segue

$$\begin{aligned} z - f(1,-1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) \right) \cdot (x-1, y+1) \\ z - 25 &= (4(1+1), 2(-1-3)) \cdot (x-1, y+1) \\ z - 25 &= (8,-8) \cdot (x-1, y+1) \\ z - 25 &= 8x - 8 - 8y - 8 \\ z &= 8x - 8y + 9. \end{aligned}$$

(b) Encontre a equação do plano tangente à superfície

$$z = \ln(x - 3y)$$

no ponto $(4,1,0)$.

Solução: Definamos agora, $g(x,y) = \ln(x-3y)$. Temos que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x-3y}; \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{3}{x-3y}.$$

Como cada tripla ordenada (x,y,z) do plano tangente a g ao ponto $(4,1,0) = (4,1,g(4,1))$ deve satisfazer

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(4,1), \frac{\partial g}{\partial y}(4,1), -1 \right) \cdot [(x,y,z) - (4,1,g(4,1))] = 0.$$

Segue que a equação do plano tangente será

$$\begin{aligned} (1,-3,-1) \cdot (x-4, y-1, z-0) &= 0 \\ x - 4 - 3y + 3 - z + 0 &= 0 \\ x - 3y - z &= 1. \end{aligned}$$

3.8 Encontre a equação do plano tangente e da reta normal à superfície $x - z - 4\arctan(yz) = 0$ pelo ponto $(1 + \pi, 1, 1)$.

Solução: Observe que a superfície em questão é uma superfície de nível da função

$$F(x, y, z) = x - z - 4\arctan(yz)$$

e como o vetor gradiente é ortogonal a superfície de nível no ponto $(1 + \pi, 1, 1)$, segue que $\nabla F(1 + \pi, 1, 1)$ é o vetor normal do plano tangente e diretor da reta normal. Calculemos

$$\nabla F(x, y, z) = \left(1, -\frac{4z}{1 + y^2z^2}, -1 - \frac{4y}{1 + y^2z^2}\right)$$

no ponto $(1 + \pi, 1, 1)$ fica

$$\nabla F(1 + \pi, 1, 1) = (1, -2, -3).$$

Daí, a equação do plano tangente será dada por

$$\begin{aligned} \nabla F(1 + \pi, 1, 1) \cdot (x - 1 - \pi, y - 1, z - 1) &= 0 \\ (1, -2, -3) \cdot (x - 1 - \pi, y - 1, z - 1) &= 0 \\ x - 1 - \pi - 2y + 2 - 3z + 3 &= 0 \\ x - 2y - 3z &= \pi - 4. \end{aligned}$$

E, a equação da reta normal é

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (1 + \pi, 1, 1) + \lambda\nabla F(1 + \pi, 1, 1) \\ &= (1 + \pi, 1, 1) + \lambda(1, -2, -3). \end{aligned}$$

3.9 Faça o que se pede:

(a) Verifique que a equação

$$f(x, y) = x^4y^2 + 5x^2y^4 = 84$$

define uma curva no plano xy na vizinhança do ponto $(1, 2)$.

Solução: Defina $F(x, y) = f(x, y) - 84$ e observe que F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, pois

$$\nabla F(x, y) = \nabla f(x, y) = (4x^3y^2 + 10xy^4, 2x^4y + 20x^2y^3)$$

é contínuo em $\mathbb{R}^2$. Além disso, $F(1, 2) = 0$ e $F_y(1, 2) = 164 \neq 0$. Portanto, pelo Teorema das Funções Implícitas existe uma curva $(x, y(x))$ definida na vizinhança de $(1, 2)$ diferenciável com $y(1) = 2$.

(b) Encontre uma reta tangente $ax + by = c$ à curva no ponto $(1, 2)$ calculando o gradiente $\nabla f(x, y) = (a, b)$ e substituindo o ponto para obter o valor c.

Solução: Temos que $\nabla f(1, 2) = (176, 164) = (a, b)$, logo no ponto $(1, 2)$ a equação da reta tangente satisfaz

$$\begin{aligned} 176 \cdot 1 + 164 \cdot 2 &= c \\ 504 &= c, \end{aligned}$$

que resulta em

$$176x + 164y = 504.$$

3.10 Faça o que se pede:

(a) Encontre a equação do plano tangente à superfície paramétrica $r(u, v) = (u^2, v^2, uv)$ no ponto $(u, v) = (1, 1)$.

Solução: Iremos determinar um vetor normal $\vec{n}$ ao plano tangente de r por intermédio das derivadas parciais

$$\frac{\partial r}{\partial u}(u, v) = (2u, 0, v) \text{ e } \frac{\partial r}{\partial v}(u, v) = (0, 2v, u),$$

porque $\dfrac{\partial r}{\partial u}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial r}{\partial v}(1, 1)$ são paralelos a esse plano tangente. Para tanto, faça

$$\vec{n} = \frac{\partial r}{\partial u}(1, 1) \times \frac{\partial r}{\partial v}(1, 1) = (2, 0, 1) \times (0, 2, 1) = (-2, -2, 4).$$

Seja (x, y, z) pertencente ao plano tangente, logo

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot [(x, y, z) - (1, 1, r(1, 1))] &= 0 \\ (-2, -2, 4) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) &= 0 \\ -2x - 2y + 4z &= 0. \end{aligned}$$

(b) Mostre que a superfície satisfaz $xy - z^2 = 0$. Encontre a equação do plano tangente computando o gradiente no ponto $(1, 1, 1)$.

Solução: Seja $x = u^2$, $y = v^2$ e $z = uv$. Claramente

$$u^2 \cdot v^2 - (uv)^2 = xy - z^2 = 0.$$

Definamos $F(x, y, z) = xy - z^2$ que é diferenciável, e, nos diz que r é uma parametrização da superfície de nível $F(x, y, z) = 0$. Da interpretação geométrica do

$$\nabla F(x, y, z) = (y, x, -2z)$$

resulta que o plano tangente a r no ponto $(1, 1, r(1, 1)) = (1, 1, 1)$ obedece

$$\begin{aligned} \nabla F(1, 1, 1) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 1)] &= 0 \\ (1, 1, -2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) &= 0 \\ x + y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

3.11 Verifique que o elipsóide

$$6x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 18$$

e a esfera

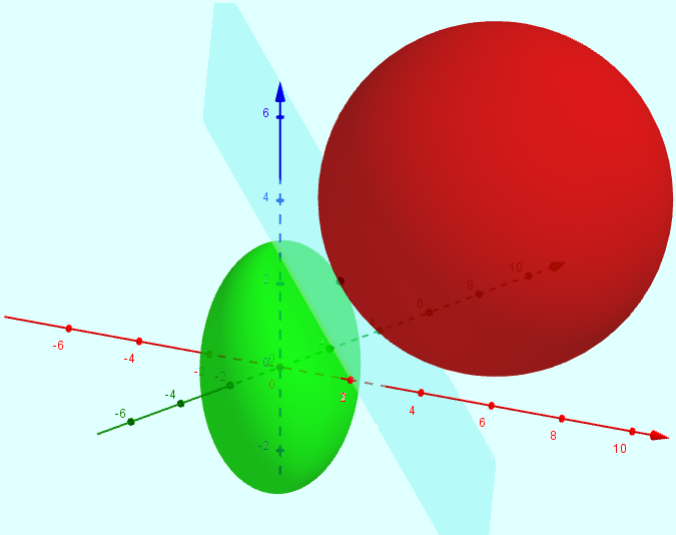
$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$$

têm o mesmo plano tangente no ponto $(1, 1, 2)$. Faça um gráfico que mostre o elipsóide, a esfera e o plano tangente comum.

Solução: Sejam $F(x, y, z) = 6x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 18$ e $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = (x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 - 17$ que são diferenciáveis, pois são de classe C^1. Por outro lado, $\nabla F(x, y, z) = (12x, 8y, 4z)$ e $\nabla G(x, y, z) = (2x - 8, 2y - 6, 2z - 8)$. Como $(1, 1, 2)$ é um ponto em comum, pois $F(1, 1, 2) = 0 = G(1, 1, 2)$ e como $\nabla F(1, 1, 2) = -2\nabla G(1, 1, 2) = (12, 8, 8)$ segue que o plano tangente é o mesmo, a saber

$$3x + 2y + 2z = 9.$$

Veja o gráfico



3.12 Calcule a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ se x e y são relacionados por $\operatorname{sen}(y) + \cos(x) = \operatorname{sen}(y)\cos(x)$.

Solução: A função $f(x,y) = \operatorname{sen}(y) + \cos(x) - \operatorname{sen}(y)\cos(x)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(y) - \cos(y)\cos(x)$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Além disso,

$$f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \operatorname{sen}(0) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 0 - 0 = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \cos(0) - \cos(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1 \neq 0.$$

Portanto, pelo Teorema das Funções Implícitas a equação $\operatorname{sen}(y) + \cos(x) = \operatorname{sen}(y)\cos(x)$ define implicitamente uma função $y = y(x)$ derivável e

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{\operatorname{sen}(x)(-1 + \operatorname{sen}(y))}{\cos(y)(1 - \cos(x))}.$$

3.13 Considere z definida implicitamente por $yz = e^{x+z}$ e calcule as derivadas parciais z_x e z_y.

Solução: Sendo $F(x,y,z) = yz - e^{x+z}$ diferenciável porque é de classe C^1. E, no ponto $(-2, 1/2, 2)$ temos que F é nula e F_z não, então pelo TFI existe uma única função $z = z(x,y)$ diferenciável tal que

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{-e^{x+z}}{y - e^{x+z}}$$

e

$$z_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{z}{y - e^{x+z}}.$$

3.14 Faça o que se pede:

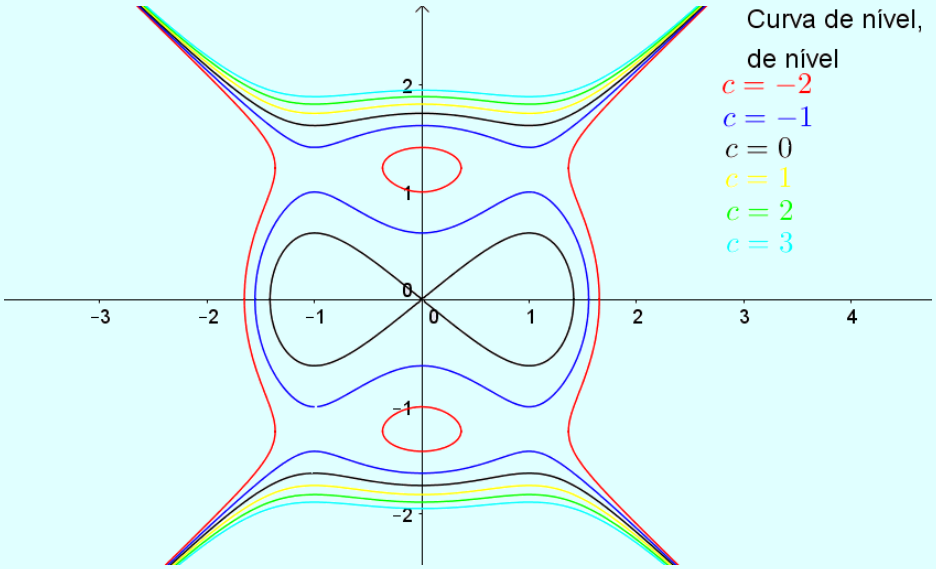
(a) Faça um gráfico das curvas de nível da função

$$f(x,y) = y^2(y^2 - 3) - x^2(x^2 - 2).$$

Solução: É fácil ver que a imagem de f é a reta toda, basta olhar cada eixo do plano cartesiano. Sendo assim, seja $c \in \mathbb{R}$, faça

$$y^2(y^2 - 3) - x^2(x^2 - 2) = c.$$

Seguem algumas curvas de nível

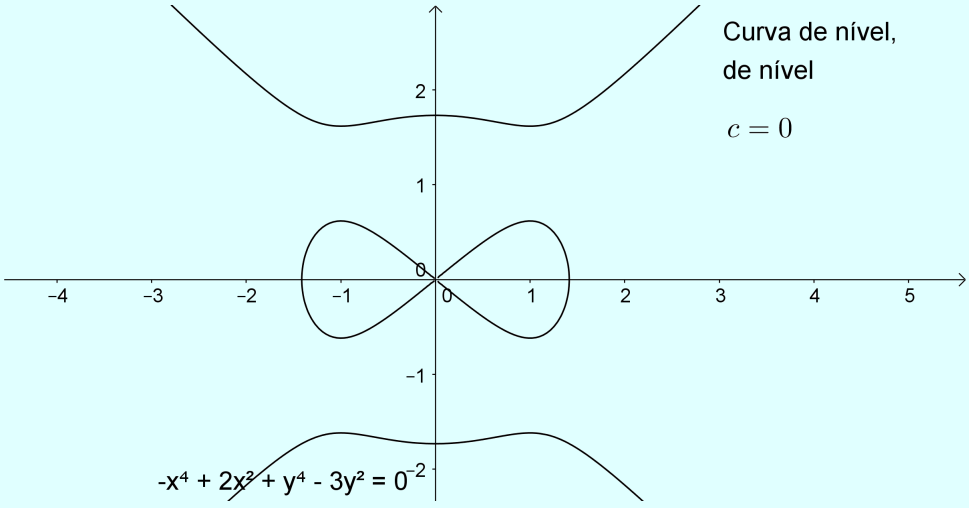


(b) Especialmente faça o gráfico da curva $f(x, y) = 0$.

Solução: Para $c = 0$, temos

$$y^2(y^2 - 3) - x^2(x^2 - 2) = 0$$
$$y^4 - 3y^2 - x^4 + 2x^2 = 0.$$

Segue figura da curva



(c) Encontre o vetor gradiente $\nabla f = (f_x, f_y)$ no ponto

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{4 - \sqrt{5}}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Esboce um gráfico com a curva de nível, o vetor gradiente e a reta tangente à curva de nível no ponto (x_0, y_0).

Solução: Temos que

$$\nabla f(x, y) = (-4x^3 + 4x, 4y^3 - 6y),$$

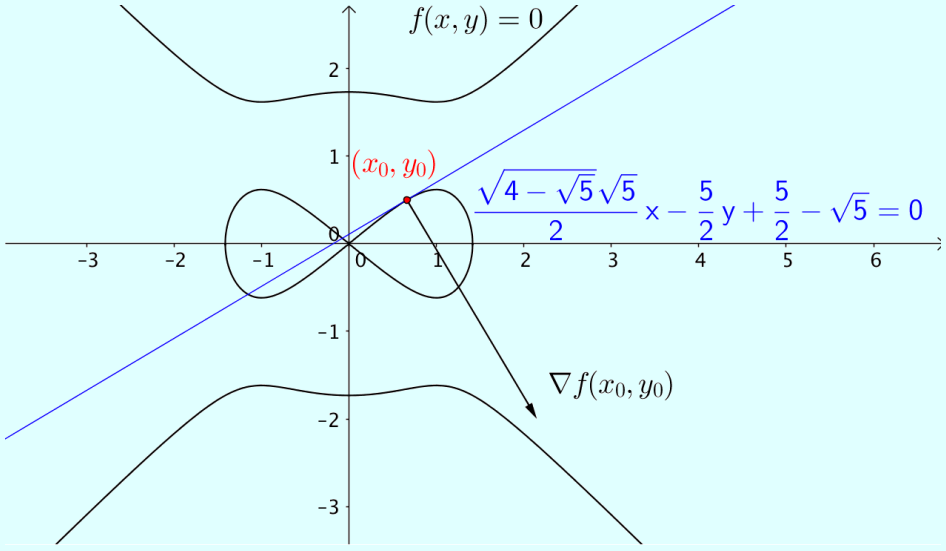
então

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{4-\sqrt{5}}}{2}\sqrt{5}, -\frac{5}{2} \right).$$

Note que (x_0, y_0) pertente à curva de nível de nível $c = 0$. E, por fim a equação da reta tangente à curva $f(x, y) = 0$ no ponto (x_0, y_0) será dada por

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) &= 0 \\ \left(\frac{\sqrt{4-\sqrt{5}}}{2}\sqrt{5}, -\frac{5}{2} \right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{4-\sqrt{5}}}{2}, y - \frac{1}{2} \right) &= 0 \\ \frac{\sqrt{4-\sqrt{5}}}{2}\sqrt{5}x - \frac{5}{2}y + \frac{5}{2} - \sqrt{5} &= 0. \end{aligned}$$

Veja a figura



3.15 Encontre o raio que é a reflexão do raio $r(t) = (t, -t, 2)$ na superfície $z = x^2 + y^2$.

Solução: Defina $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Queremos encontrar o raio que reflete no paraboloide formando o mesmo ângulo que $r(t)$ forma com a reta normal à superfície $f(x, y, z) = 0$ no ponto

de interseção dos raios com essa superfície de nível. Então, primeiramente encontramos esse ponto onde a reta intercepta $z = x^2 + y^2$. De $r(t) = (t, -t, 2) = (x(t), y(t), z(t))$, segue que

$$2 = t^2 + (-t)^2 \;\Rightarrow\; t = \pm 1.$$

Observe na figura a orientação do raio (de fácil verificação substituindo distintos valores de t e constatando o sentido que os valores $r(t)$ indicam). Ou seja, o primeiro ponto de interseção é para $t = -1$, $P = (-1, 1, 2)$. Agora, vamos determinar a reta normal no ponto P. Para tanto, calcule

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -1) \;\Rightarrow\; \nabla f(P) = (-2, 2, -1)\,.$$

Logo o vetor normal unitário no ponto P é

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Podemos decompor o vetor incidente $\vec{v}_i = (1, -1, 0)$ do raio $r(t)$ como $\vec{v}_i = (\vec{v}_i \cdot \vec{n})\vec{n} + (\vec{v}_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{n})\vec{n})$ e o vetor refletido $\vec{v}_r$ será então

$$\vec{v}_r = -(\vec{v}_i \cdot \vec{n})\vec{n} + (\vec{v}_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{n})\vec{n}) = \vec{v}_i - 2(\vec{v}_i \cdot \vec{n})\vec{n}.$$

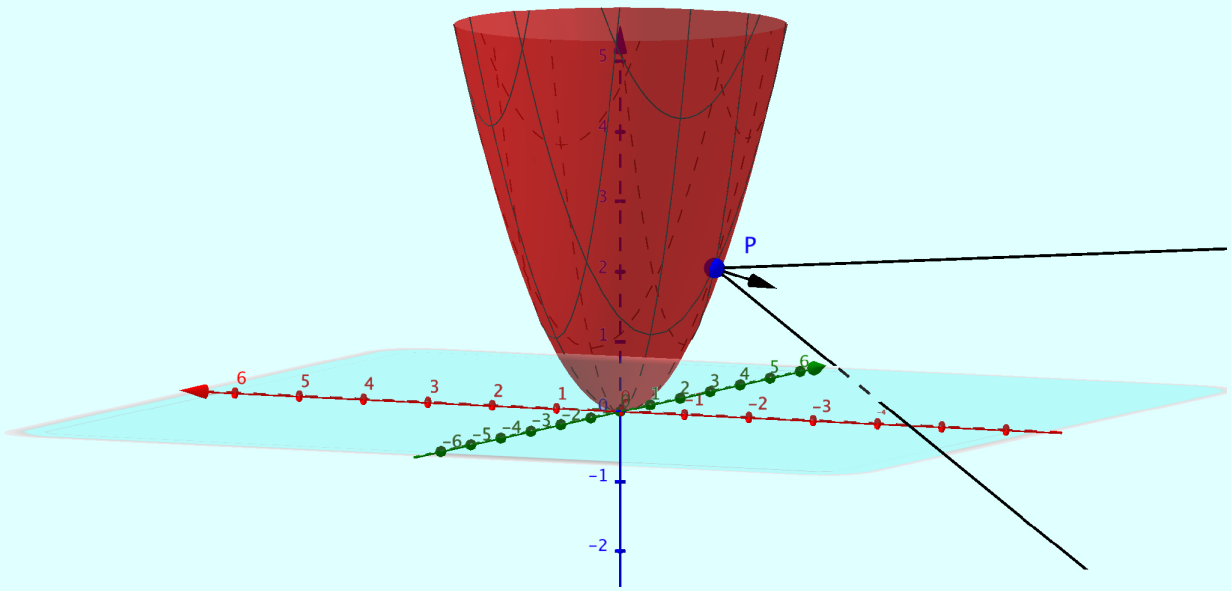
Como $\vec{v}_i \cdot \vec{n} = -\frac{4}{3}$ teremos

$$\vec{v}_r = (1, -1, 0) - 2\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{8}{9}\right).$$

O raio refletido $s(t)$, $-1 \leq t \leq +\infty$ normalizado em $s(-1) = P$ será

$$s(t) = \left(-\frac{16}{9}, \frac{16}{9}, \frac{10}{9}\right) + t\left(-\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{8}{9}\right) = \left(-\frac{16 + 7t}{9}, \frac{16 + 7t}{9}, \frac{10 - 8t}{9}\right).$$

O gráfico da solução será



3.16 Você está em uma viagem aérea sobre Belém em uma posição $(2, 3)$ e quer evitar uma tempestade em uma região de baixa pressão. A pressão é dada pela função $p(x, y) = 3x^2 + 2y^2$. Em que direção você deve voar de modo que a variação da pressão seja máxima?

Solução: Sabemos que a taxa de variação da pressão numa direção $\vec{v} = (a, b)$ é dada pela derivada direcional no ponto $(2, 3)$ (supondo $\vec{v}$ unitário),

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{v}}(2,3) = \lim_{t\to 0} \frac{p(2+at, 3+bt) - p(2,3)}{t}.$$

Como p é uma função de classe C^1, é verdade que

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \vec{v}}(2,3) &= \vec{v} \cdot \nabla f(2,3) \\ &= \|\vec{v}\| \, \|\nabla f(2,3)\| \cos\theta, \end{aligned} \tag{8}$$

sendo θ o ângulo entre $\vec{v}$ e $\nabla f(2, 3)$. As normas são não negativas, obviamente $\dfrac{\partial p}{\partial \vec{v}}(2, 3)$ atingirá seu máximo quando $\theta = 0$. Como $\|\vec{v}\| = 1$ e de (8) temos

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{v}}(2,3) = \|\nabla f(2,3)\|, \tag{9}$$

isto é, a variação máxima será na direção do gradiente. De $\nabla p(x, y) = (6x, 4y)$ e de (9) resulta

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{v}}(2,3) = \|(6 \cdot 2, 4 \cdot 3)\| = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2},$$

e a direção é a do vetor $\vec{n} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.17 Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Calcule para que valores de t, $D_{v(t)} f(0, 0)$ é positivo.

Solução: Observe que f é de classe C^1. Vale então

$$D_{v(t)} f(x, y) = v(t) \cdot \nabla f(x, y).$$

Para $(x, y) = (0, 0)$. Segue que

$$D_{v(t)} f(0,0) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \cdot (2 \cdot 0, -2 \cdot 0) = 0,$$

pois $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$. Daí, temos que $\forall t \in \mathbb{R}$, $D_{v(t)} f(0, 0)$ não será positivo.

3.18 Dada uma função f assuma que a derivada direcional

$$D_v f(1,1) = 3\sqrt{5}$$

e

$$D_w f(1,1) = 5\sqrt{5},$$

sendo $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e $w = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Encontre $\nabla f(1,1)$.

Solução: Sejam $P = (1,1)$ e $\nabla f(P) = (a,b)$. Suponha f de classe C^1. Essa suposição é necessária para que com apenas as hipóteses fornecidas possamos de fato encontrar $\nabla f(P)$. Já que a existência da derivada de f no ponto não garante a diferenciabilidade da mesma, logo não poderiámos ter necessariamente

$$D_v f(P) = v \cdot \nabla f(P).$$

De posse dessa hipótese, podemos fazer

$$D_v f(P) = v \cdot \nabla f(P) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot (a,b)$$

e

$$D_w f(P) = w \cdot \nabla f(P) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot (a,b).$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{5}} + \dfrac{2b}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \\ \dfrac{2a}{\sqrt{5}} + \dfrac{b}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5} \end{cases}$$

teremos

$$\nabla f(P) = (a,b) = \left(\frac{35}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Integrais múltiplas

Plano

Tópicos 58

Métodos e Técnicas 59

Enunciados 60

Dicas 61

Respostas 62

Tópicos abordados nos exercícios.

- Cálculo de integrais duplas e triplas;
- Teorema de Fubini;
- Mudança de ordem de integração;
- Mudança de variável em integrais múltiplas.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Teorema Fundamental do Cálculo para funções de uma variável;
- Mudança de variável em integral de funções de uma variável;
- Sólidos geométricos;
- Coordenadas polares.

Métodos e Técnicas

Teorema de Fubini.	• Nas questões abaixo, utiliza-se o Teorema de Fubini para calcular as integrais múltiplas. **Exercícios 4.3 e 4.4** • Nas questões abaixo, aplica-se a ideia de inversão de ordem de integração. **Exercícios 4.1 e 4.2**
Mudança de variáveis	• Nas questões abaixo, usa-se a mudança de variável de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ para resolver as integrais iteradas. **Exercícios 4.1, 4.3, 4.4, 4.6 e 4.8** • Nas questões abaixo, usa-se a mudança de variáveis para coordenadas polares para resolver as integrais múltiplas. **Exercícios 4.5 e 4.8**

Enunciado dos Exercícios

●○○○ **4.1** Considere o triângulo $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$. Calcule a integral

$$\iint_T e^{-x^2} dxdy.$$

Desenhe o domínio T.

●●○○ **4.2** Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y) dydx.$$

Desenhe a região de integração. Troque a ordem de integração e calcule a integral novamente.

●●○○ **4.3** Calcule $\int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^2 (x + y)e^{x^2+2xy} dydx$.

●●○○ **4.4** Considere a região $R = [1, 2] \times [1, 2]$. Calcule a integral

$$\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} dxdy.$$

●●●○ **4.5** Calcule a integral de

$$f(x, y) = 4x^2 + 8y^2$$

sobre o disco unitário $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

●●○○ **4.6** Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{2y} ze^{-y^2} dxdydz.$$

●●●● **4.7** Calcule a integral de $f(x, y, z) = x^2+y^2-z$ sobre o tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 4)$.

●●●○ **4.8** Calcule

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 x^2 y dydx$$

usando coordenadas polares.

Sugestões

4.1 Integre primeiramente em relação à y.

4.2 Atente que ao mudar a ordem de integração a variável x varia de 0 à duas funções distintas, portanto utilize a propriedade $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

4.3 Reescreva o integrando como $\frac{1}{2}(2x + 2y)e^{x^2+2xy}$ e observe a $\frac{\partial\left(e^{x^2+2xy}\right)}{\partial x}$.

4.4 Em cada iterada aplique uma simples mudança de variável.

4.5 Use a mudança polar e simplifique a expressão utilizando a relação fundamental da trigonometria.

4.6 Note que $\left(e^{-y^2}\right)' = -2ye^{-y^2}$.

4.7 Desenhe o tetraedro e identifique a variação de x, y e z que descreve o sólido.

4.8 A região encontra-se no quarto quadrante, isto é, pode-se usar $3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$ como novos limites de integração.

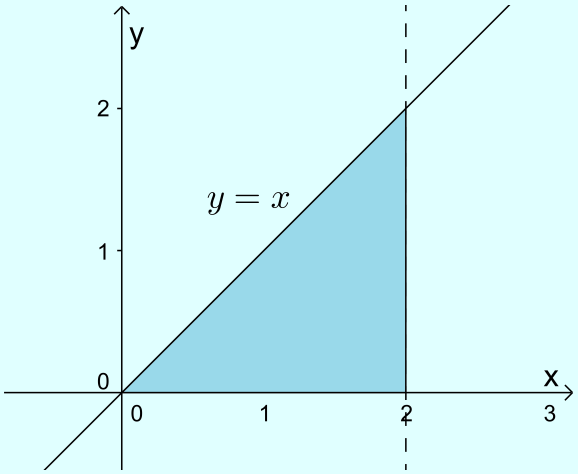
Respostas

4.1 Considere o triângulo $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$. Calcule a integral

$$\iint_T e^{-x^2} dxdy.$$

Desenhe o domínio T.

Solução: Temos que T é a região



Segue

$$\begin{aligned}\iint_T e^{-x^2} dxdy &= \int_0^2 \int_0^x e^{-x^2} dydx = \int_0^2 \left[e^{-x^2} y\right]_0^x dx \\ &= \int_0^2 e^{-x^2} (x - 0)\, dx = \int_0^{-4} e^u \left(-\frac{du}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-4}^0 e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-4}^0 = \frac{1 - e^{-4}}{2}.\end{aligned}$$

4.2 Calcule a integral

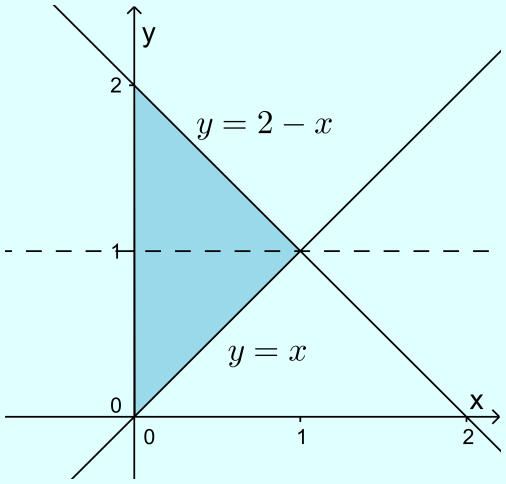
$$\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y) dydx.$$

Desenhe a região de integração. Troque a ordem de integração e calcule a integral novamente.

Solução: Pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y)dydx &= \int_0^1 \left[x^2 y - \frac{y^2}{2}\right]_x^{2-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2[(2-x) - x] - \frac{[(2-x)^2 - x^2]}{2}\right) dx \\ &= \int_0^1 [-2x^3 + 2x^2 + 2x - 2]dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^2 - 2x\right]_0^1 = -\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Tendo em vista que



Vemos que podemos descrever a região como

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2 - y, 1 \leq y \leq 2\}$$

Daí, mudamos a ordem de integração e integramos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y)dydx &= \int_0^1 \int_0^y (x^2 - y)dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 - y)dxdy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - xy\right]_0^y dy + \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} - xy\right]_0^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{[y^3 - 0^3]}{3} - [y - 0]y\right) dy \\ &+ \int_1^2 \left(\frac{[(2-y)^3 - 0^3]}{3} - [(2-y) - 0]y\right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} - y^2\right) dy + \int_1^2 \left(\frac{(2-y)^3}{3} - 2y + y^2\right) dy = -\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

4.3 Calcule $\int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^2 (x+y)e^{x^2+2xy}dydx$.

Solução: Podemos escrever

$$\int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^2 (x+y)e^{x^2+2xy}dydx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^2 \int_0^1 (2x+2y)e^{x^2+2xy}dxdy.$$

Da última integral dupla e do fato de que

$$\frac{\partial\left(e^{x^2+2xy}\right)}{\partial x} = (2x+2y)e^{x^2+2xy}$$

pela regra da cadeia. Ficamos com

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^2 \int_0^1 (2x+2y)e^{x^2+2xy}dxdy &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^2 \left[e^{x^2+2xy}\right]_0^1 dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^2 (e^{1+2y}-1)dy \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{1+2y}-y\right]_{-\frac{1}{2}}^2 \\
&= \frac{e^5}{4}-\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

4.4 Considere a região $R = [1,2]\times[1,2]$. Calcule a integral

$$\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}dxdy.$$

Solução: Temos que

$$\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}dxdy = \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}dx\right]dy.$$

Na integral entre colchetes, faremos a mudança

$$u = x^2+y^2-1 \;\Rightarrow\; du = 2xdx \text{ e quando } x=1 \;\Rightarrow\; u = y^2 \text{ e } x=2 \;\Rightarrow\; u = y^2+3.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}dx &= \int_{y^2}^{y^2+3} \frac{y}{\sqrt{u}}\frac{du}{2}\frac{y}{2}\left[\frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_{y^2}^{y^2+3} \\ &= \frac{y}{2}\left[2\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{y^2}\right] \\ &= y\sqrt{y^2+3}-y^2.\end{aligned}$$

Segue então

$$\begin{aligned}\int_1^2\left[\int_1^2 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}dx\right]dy &= \int_1^2\left(y\sqrt{y^2+3}-y^2\right)dy \\ &= \int_1^2 y\sqrt{y^2+3}dy-\int_1^2 y^2dy \\ &= \int_1^2 y\sqrt{y^2+3}dy-\frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Nessa última integral faremos a seguinte mudança

$$v=y^2+3 \;\Rightarrow\; dv=2ydy \text{ e quando } y=1 \;\Rightarrow\; v=4 \text{ e } y=2 \;\Rightarrow\; v=7.$$

Resulta então

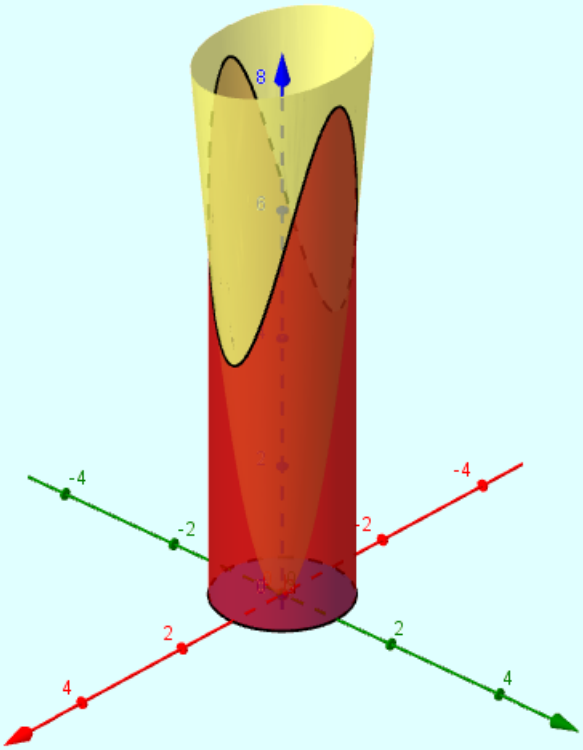
$$\begin{aligned}\int_1^2 y\sqrt{y^2+3}dy-\frac{7}{3} &= \int_4^7 \sqrt{v}\frac{dv}{2}-\frac{7}{3} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_4^7-\frac{7}{3} \\ &= \frac{1}{3}(7\sqrt{7}-8)-\frac{7}{3}.\end{aligned}$$

4.5 Calcule a integral de

$$f(x,y)=4x^2+8y^2$$

sobre o disco unitário $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$.

Solução: Essa integral equivale a calcular o volume do sólido delimitado pelo parabolóide hiperbólico e pelo cilindro acima do plano xy



Observe que o disco unitário D pode ser descrito em coordenadas polares da seguinte forma

$$D_{r\theta} = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

sendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

Sabendo que o jacobiano da mudança polar é r, temos que

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_{r\theta}} f(r, \theta)r\,dr\,d\theta.$$

Fazendo

$$f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = 4\,(r\cos\theta)^2 + 8\,(r\,\text{sen}\,\theta)^2 = 4r^2(2 - \cos^2\theta).$$

Segue então

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)r\,dr\,d\theta &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4r^3(2 - \cos^2\theta)d\theta dr \\
&= \int_0^1 4r^3 \left[\frac{4\theta - \left(\theta - \frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta\right)}{2}\right]_0^{2\pi} dr \\
&= \int_0^1 4r^3[3\pi - 0]dr = 12\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 3\pi.
\end{aligned}$$

4.6 Calcule a integral

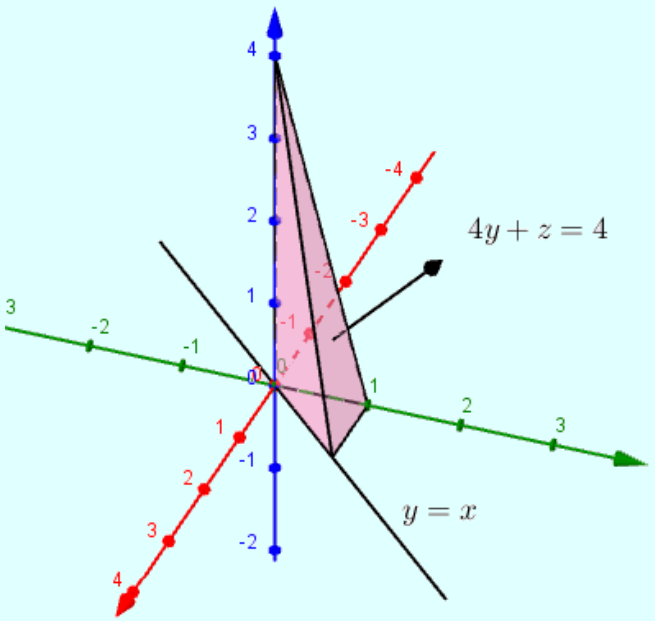
$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{2y} ze^{-y^2} dxdydz.$$

Solução: Pelo Teorema de Fubini temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^z \int_0^{2y} ze^{-y^2} dxdydz &= \int_0^1 \int_0^z ze^{-y^2} \int_0^{2y} dxdydz = \int_0^1 \int_0^z ze^{-y^2}(2y-0)dydz \\
&= \int_0^1 \int_0^z ze^{-y^2} 2ydydz = \int_0^1 z\left[-e^{-y^2}\right]_0^z dz \\
&= \int_0^1 (z - ze^{-z^2})dz = \left[\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}e^{-z^2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1} - \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-1}.
\end{aligned}$$

4.7 Calcule a integral de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ sobre o tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 4)$.

Solução: O tetraedro



pode ser descrito como

$$T = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 4 - 4y\},$$

conseguimos então

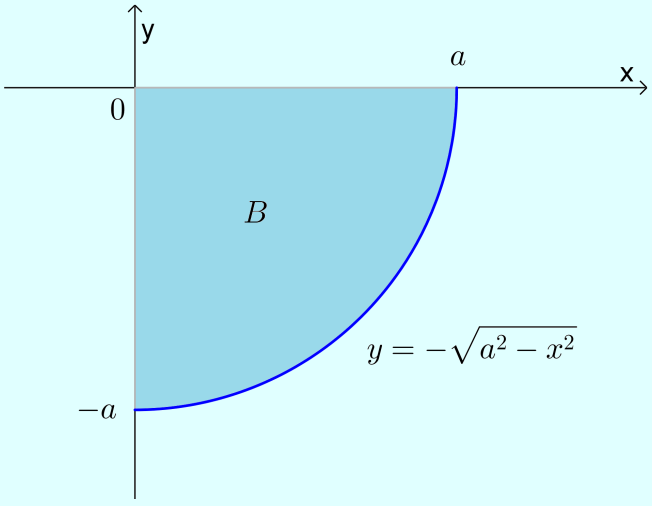
$$\begin{aligned}
\iiint_T f(x, y, z)dV &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{4-4y} (x^2 + y^2 - z)dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_x^1 \left[x^2 z + y^2 z - \frac{z^2}{2}\right]_0^{4-4y} dydx \\
&= \int_0^1 \int_x^1 \left[x^2(4 - 4y) + y^2(4 - 4y) - \frac{(4 - 4y)^2}{2}\right] dydx \\
&= \int_0^1 \int_x^1 (4x^2 + (16 - 4x^2)y - 4y^3 - 4y^2 - 8)dydx \\
&= \int_0^1 \left[4x^2 y + (16 - 4x^2)\frac{y^2}{2} - y^4 - \frac{4}{3}y^3 - 8y\right]_x^1 dx \\
&= \int_0^1 (3x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + 8x - \frac{7}{3})dx \\
&= \left[\frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4 - 2x^3 + 4x^2 - \frac{7}{3}x\right]_0^1 = -\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

4.8 Calcule

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 x^2 y dydx$$

usando coordenadas polares.

Solução: A região de integração, para $a > 0$, é ilustrada abaixo



Fazendo a mudança polar

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

temos que a região de integração no plano $r\theta$ fica

$$B_{r\theta} = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq a \text{ e } 3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 x^2 y\,dy\,dx &= \int_0^a \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (r\cos\theta)^2 r\,\mathrm{sen}\,\theta\, r\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^a \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} r^4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^a r^4 \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} dr = \int_0^a -\frac{r^4}{3}[1-0]dr \\
&= -\frac{1}{3}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = -\frac{a^5}{15}.
\end{aligned}$$

Aplicações

Plano

Tópicos 70

Métodos e Técnicas 71

Enunciados 73

Dicas 75

Respostas 76

Tópicos abordados nos exercícios.

- Máximos e mínimos de uma função de várias variáveis;
- Teorema do valor extremo e o teste da segunda derivada;
- Regra da cadeia;
- Cálculo de área por integração múltipla;
- Cálculo de volume por integração múltipla;
- Massa, centro de massa e momento de inércia.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Geometria espacial;
- Trigonometria;
- Derivadas parciais;
- Cálculo de integrais duplas e triplas: Teorema de Fubinni e mudança de variáveis;
- Inversão da ordem de integração.

Métodos e Técnicas

Regra da cadeia	• Nos exercícios abaixo, utilizamos a regra da cadeia para determinar a taxa de variação de funções compostas. **Exercícios 5.1 e 5.2**
Teste da segunda derivada	• Nas questões abaixo, classificamos os pontos críticos como ponto de máximo, ponto de mínimo ou ponto de sela calculando o Hessiano e a segunda derivada parcial de f com realação à x em cada ponto. **Exercícios 5.3, 5.4 e 5.5** • Nas questões abaixo, minimizamos a função de várias variáveis sobre uma dada curva transformando o problema numa função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e estudando a mesma. **Exercícios 5.6 e 5.7**
Teorema de Fubini	• Utiliza-se o Teorema de Fubini para calcular as integrais que determinam o volume do sólido. **Exercício 5.8** • No exercício que segue, usa-se o Teorema de Fubini no cálculo de integrais que determinam a massa do sólido. **Exercício 5.14**

Mudança de variáveis: coordenadas polares, cilíndricas e esféricas

- Na questão abaixo utilizamos a mudança de variáveis para coordenadas polares no cálculo de área.

Exercício 5.9

- Nas questões abaixo, utiliza-se a mudança cilíndrica para o cálculo de volume e de massa.

Exercícios 5.10, 5.12, 5.13 e 5.14

- No exercício abaixo, utiliza-se mudança esférica para o cálculo do volume do sólido dado.

Exercício 5.11

Enunciado dos Exercícios

●●○○ **5.1** O raio da base de um cilindro circular reto cresce a uma taxa de variação de $1,2$ enquanto a altura decresce a uma taxa de variação de $2,2$. Qual a taxa de variação do volume do cilindro quando a altura é 90 e o raio da base é 40?

●●○○ **5.2** A voltagem V em um circuito elétrico simples está decaindo lentamente de acordo com o descarregamento da bateria. A resistência R aumenta lentamente com o aquecimento do resistor. Use a lei de Ohm, $V = IR$, para encontrar como a corrente I está variando no instante em que $R = 200$, $I = 0,08$, $dV/dt = -0,02$ e $dR/dt = 0,01$.

●●●● **5.3** Encontre e classifique os pontos críticos de $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x - \frac{y^3}{3} + y$. Faça um gráfico onde todos os pontos críticos apareçam.

●●●○ **5.4** Encontre todos os pontos críticos de $f(x,y) = 1 - x^3 - 2y^2 + 3x + y^4$ e determine se são pontos de máximo local, mínimo local ou pontos de sela.

●●●○ **5.5** Encontre todos os pontos críticos da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ no plano e classifique-os. Existe um máximo global ou mínimo global entre eles?

●●●○ **5.6** Minimize a função $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sobre o gráfico da curva $x + y^2 = 1$.

●●●○ **5.7** Encontre a distância mais curta da origem a curva $x^6 + 3y^2 = 1$.

●●○○ **5.8** Encontre o volume do sólido limitado acima pela superfície $z = x^2 + 2y^2$ e acima do retângulo $R = [-2,2] \times [-2,4]$.

●●●● **5.9** Calcule a area da região limitada pelas curvas: a curva polar $r(\theta) = \theta$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$; a curva polar $r(\theta) = 2\theta$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$; e pelo eixo x positivo.

●●●○ **5.10** Encontre o volume do sólido definido pelas desigualdades $x^2 + y^2 \leq z^4$ e $z^2 \leq 1$. Esboce o gráfico deste sólido.

●●●● **5.11** Um sólido é descrito em coordenadas esféricas por $r \leq \text{sen}\,\phi$. Calcule seu volume.

●●●○ **5.12** Calcule o volume do sólido limitado por $z = 2r$, $r = 1 - \cos\theta$ e $z = 0$. Esboce o sólido.

●●●○ **5.13** Um buraco cilíndrico de raio de 1 milímetro é perfurado através do centro de uma bola sólida (o centro sobre o eixo do cilindro) com raio de 2 milímetros. Calcule o volume do sólido que permanece após a retirada.

●●●○ **5.14** A densidade ρ do corpo dado por

$$R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1; -1 \leq z \leq 1\}$$

é dado por $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2$. Encontre sua massa

$$M = \iiint_R \rho(x, y, z)dxdydz$$

Sugestões

5.1 Com o volume V em função do raio r e da altura h, sendo cada um destes funções do tempo t, aplica-se a regra da cadeia.

5.2 Isole $\frac{dI}{dt}$ após aplicada a regra da cadeia.

5.3 Aplique o teste da segunda derivada. Para o esboço do sólido use o Geogebra.

5.4 Note que existem 6 pontos críticos de f.

5.5 Sendo $\alpha(t) = (t, t)$ calcule o limite de $f \circ \alpha$ quando $t \to \pm\infty$.

5.6 Defina $h(x) = f(x, y^2)$ e estude seu comportamento.

5.7 Considere $f(x, y) = x^2 + y^2$ e estude o comportamento de $h(x) = f(x, y^2)$, sendo y^2 da curva dada.

5.8 Observe que acima do plano xy $f > 0$.

5.9 Mude as variáveis para coordenadas polares.

5.10 Faça a mudança cilíndrica.

5.11 Para identificar o sólido fixe $\theta = 0$ e reescreva em coordenadas cartesianas a equação $r = \text{sen}\phi$.

5.12 Observe que a questão considera coordenadas cilídricas.

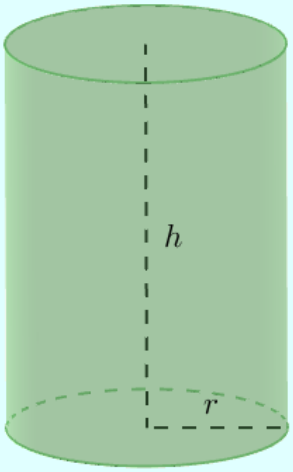
5.13 O volume procurado é $V = V_2 - V1$, em que V_1 é o volume do sólido retirado (faça por cilíndricas), e V_2 é o volume da esfera.

5.14 Tente reescrever o sólido utilizando coordenadas cilíndricas.

Respostas

5.1 O raio da base de um cilindro circular reto cresce a uma taxa de variação de $1,2$ enquanto a altura decresce a uma taxa de variação de $2,2$. Qual a taxa de variação do volume do cilindro quando a altura é 90 e o raio da base é 40?

Solução: O volume do cilindro



é dado por $V = \pi r^2 h$. Queremos obter a taxa de variação do volume, $\dfrac{dV}{dt}$, para tanto, aplicamos a regra da cadeia como segue

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} \\ &= 2\pi r h\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt}\end{aligned}$$

quando $h = 90$, $r = 40$, $\dfrac{dr}{dt} = 1,2$ e $\dfrac{dh}{dt} = -2,2$ temos que

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= 2\pi 40 \cdot 90 \cdot 1,2 + \pi 40^2(-2,2) \\ &= 8640\pi - 3520\pi \\ &= 5120\pi.\end{aligned}$$

5.2 A voltagem V em um circuito elétrico simples está decaindo lentamente de acordo com o descarregamento da bateria. A resistência R aumenta lentamente com o aquecimento do resistor. Use a lei de Ohm, $V = IR$, para encontrar como a corrente I está variando no instante em que $R = 200$, $I = 0,08$, $dV/dt = -0,02$ e $dR/dt = 0,01$.

Solução: Aplicando a regra da cadeia em $V = IR$

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial I}\frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R}\frac{dR}{dt} \\ &= R\frac{dI}{dt} + I\frac{dR}{dt},\end{aligned}$$

isolando $\dfrac{dI}{dt}$ e substituindo os valores, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{1}{R}\left(\frac{dV}{dt} - I\frac{dR}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{200}\left(-0,02 - 0,08 \cdot 0,01\right) \\ &= -1,04 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

5.3 Encontre e classifique os pontos críticos de $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x - \frac{y^3}{3} + y$. Faça um gráfico onde todos os pontos críticos apareçam.

Solução: Os pontos críticos de f são os pontos $(x, y) \in D_f$ tais que

$$\nabla f(x, y) = (x^2 - 1, -y^2 + 1) = (0, 0).$$

Assim,

$$(-1, -1),\ (-1, 1),\ (1, -1),\ \text{e}\ (1, 1)$$

são os pontos críticos de f. A função f é de classe C^2, podemos classificar então, os pontos críticos através do teste da segunda derivada, isto é, calculando o Hessiano de f e a segunda derivada parcial com relação a x em cada ponto. Segue

$$\begin{aligned}H_f(x, y) &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)f_{yx}(x, y) \\ &= 2x \cdot (-2y) - 0 \cdot 0 = -4xy.\end{aligned}$$

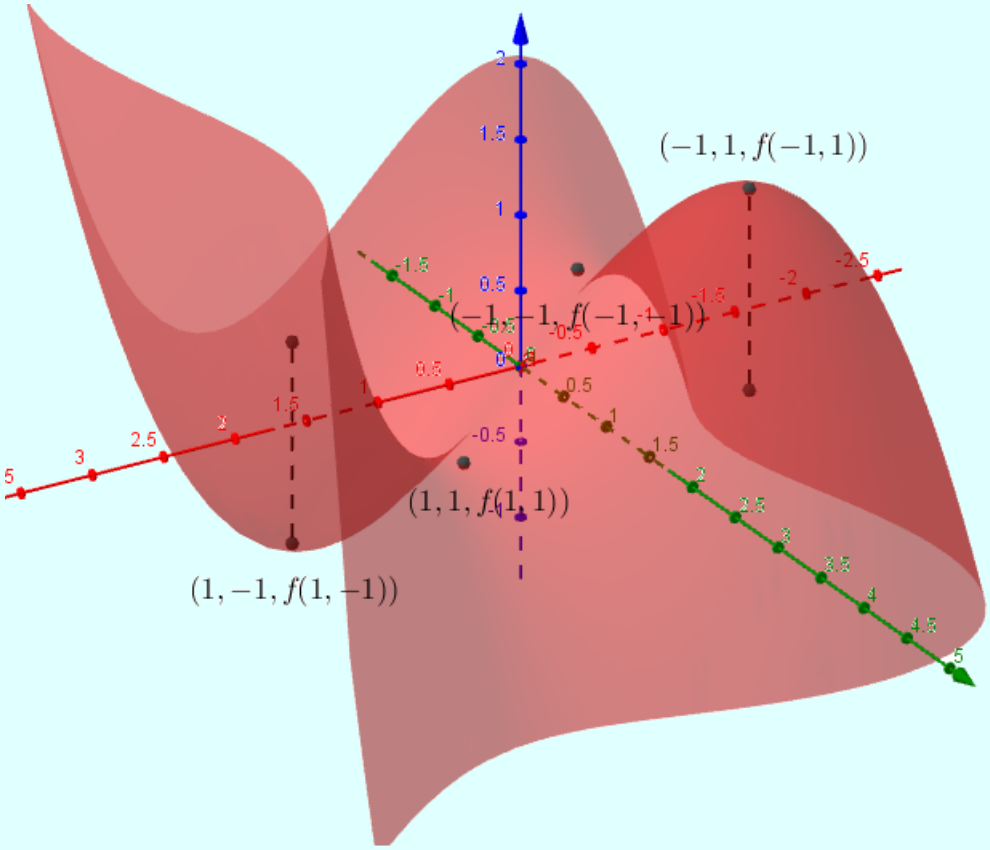
Calculando em cada ponto crítico, temos

$H_f(-1, -1) = -4$; $(-1, -1)$ é ponto de sela;

$H_f(-1, 1) = 4$; $f_{xx}(-1, 1) = -2$; $(-1, 1)$ é ponto de máximo;

$H_f(1, -1) = 4$; $f_{xx}(1, -1) = 2$; $(1, -1)$ é ponto de mínimo;

$H_f(1, 1) = -4$; $(1, 1)$ é ponto de sela.



5.4 Encontre todos os pontos críticos de $f(x, y) = 1 - x^3 - 2y^2 + 3x + y^4$ e determine se são pontos de máximo local, mínimo local ou pontos de sela.

Solução: Encontrando

$$\nabla f(x, y) = (-3x^2 + 3, -4y + 4y^3).$$

E, agora determinando os pontos (x, y) tais que

$$\begin{cases} -3x^2 + 3 = 0 & \Rightarrow \quad x = \pm 1 \\ -4y + 4y^3 = 0 & \Rightarrow \quad y = 0 \text{ ou } y = \pm 1. \end{cases}$$

Portanto, os pontos críticos são

$$(-1, -1),\ (-1, 0),\ (-1, 1),\ (1, -1),\ (1, 0) \text{ e } (1, 1).$$

Calculando o Hessiano

$$\begin{aligned} H_f(x, y) &= f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y) f_{yx}(x, y) \\ &= -6x \cdot (-4 + 12y^2) - 0 \cdot 0 \\ &= 24x(1 - 3y^2). \end{aligned}$$

Aplicando H_f em cada ponto e verificando f_{xx}, tem-se

$$H_f(-1,-1) = 48; \quad f_{xx}(-1,-1) = 6; \quad (-1,-1) \text{ é ponto de mínimo;}$$

$$H_f(-1,0) = -24; \qquad\qquad (-1,0) \text{ é ponto de sela;}$$

$$H_f(-1,1) = 48; \quad f_{xx}(-1,1) = 6; \quad (1,-1) \text{ é ponto de mínimo;}$$

$$H_f(1,-1) = -48; \qquad\qquad (1,-1) \text{ é ponto de sela;}$$

$$H_f(1,0) = 24; \quad f_{xx}(1,0) = -6; \quad (1,-1) \text{ é ponto de máximo;}$$

$$H_f(1,1) = -48; \qquad\qquad (1,1) \text{ é ponto de sela.}$$

5.5 Encontre todos os pontos críticos da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ no plano e classifique-os. Existe um máximo global ou mínimo global entre eles?

Solução: Determinando os pontos críticos tais que

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3, 3y^2 - 12) = (0,0).$$

Isto é,

$$(-1,-2),\ (-1,2),\ (1,-2) \text{ e } (1,2).$$

O Hessiano de f é

$$\begin{aligned} H_f(x,y) &= f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)f_{yx}(x,y) \\ &= 6x \cdot 6y - 0 \cdot 0 \\ &= 36xy. \end{aligned}$$

Calculando H_f e f_{xx} em cada ponto, temos

$$H_f(-1,-2) = 72; \quad f_{xx}(-1,-2) = -6; \quad (-1,-2) \text{ é ponto de máximo;}$$

$$H_f(-1,2) = -72; \qquad\qquad (-1,2) \text{ é ponto de sela;}$$

$$H_f(1,-2) = -72; \qquad\qquad (1,-2) \text{ é ponto de sela;}$$

$$H_f(1,2) = 72; \quad f_{xx}(1,2) = 6 \qquad (1,2) \text{ é ponto de mínimo.}$$

Seja $\alpha(t) = (t, t)$, fazendo

$$\lim_{t\to\infty} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to\infty} 2t^3 - 15t + 20 = \infty$$

e

$$\lim_{t\to-\infty} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to-\infty} 2t^3 - 15t + 20 = -\infty.$$

Mostra-se que f não tem máximo nem mínimo global.

5.6 Minimize a função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sobre o gráfico da curva $x + y^2 = 1$.

Solução: Considere a função f restrita a curva $y^2 = 1 - x$. Então se $h(x) = x^2 + 2(1 - x)$ temos $h'(x) = 2x - 2$. Então $h'(1) = 0$ e $h''(1) = 2$ logo 1 é ponto de mínimo para h. O ponto de mínimo acontece em $(1, 0)$.

Uma outra solução:

Queremos determinar o ponto de mínimo de f sobre o gráfico da parábola $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y^2 = 1\}$. Defina $g(x, y) = x + y^2 = 1$. Então

$$\nabla g(x, y) = (1, 2y).$$

Logo, $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$, $\forall (x, y) \in A$. Usando os multiplicadores de Lagrange as soluções do seguinte sistema são candidatos a extremantes locais em A,

$$\begin{cases} \lambda \nabla g(x, y) = \nabla f(x, y) \\ g(x, y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(1, 2y) = (2x, 4y) \\ x + y^2 = 1. \end{cases}$$

Daí

$$\begin{cases} \lambda = 2x \\ \lambda 2y = 4y \\ x + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2x = 0 \\ 2y(\lambda - 2) = 0 \\ x + y^2 = 1. \end{cases}$$

Da segunda equação temos que $y = 0$ ou $\lambda = 2$. Se $y = 0$ segue da terceira equação que $x = 1$ e obtemos o ponto $(1, 0)$. Conseguimos o mesmo ponto se fizermos $\lambda = 2$ na primeira equação. É fácil ver que $(1, 0)$ é de fato o ponto mínimo nesse conjunto, fazendo

$$f(1 - y^2, y) = 1 + y^4.$$

Portanto, $(1, 0)$ é o ponto que minimiza f sobre a curva $x + y^2 = 1$.

5.7 Encontre a distância mais curta da origem à curva $x^6 + 3y^2 = 1$.

Solução: A distância de um ponto (x, y) à origem é dado por

$$D(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

O minimizante de D é o mesmo minimizante da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre o conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^6 + 3y^2 = 1\}$. Sobre a curva temos $y^2 = \frac{1}{3}(1 - x^6)$. Seja h a função f restrita ao conjunto B. Então $h(x) = x^2 + \frac{1}{3}(1 - x^6)$. Assim $h'(x) = 2x - 2x^5$ e $h'(x) = 0$ para $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$. Agora $h''(x) = 2 - 10x^4$ e assim temos $h''(0) = 2$ e $h'(1) = h'(-1) = -8$. Portanto, o ponto de mínimo ocorre para $x = 0$ e sobre a curva temos $y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Então $D\left(0, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}}$ que é o resultado pedido.

Outra solução:

Defina $g(x, y) = x^6 + 3y^2 = 1$. Utilizando os multiplicadores de Lagrange, os pontos que satisfazem o sistema abaixo serão os candidatos a mínimo

$$\begin{cases} \nabla g(x, y) = \lambda \nabla f(x, y) \\ g(x, y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (6x^5, 6y) = \lambda(2x, 2y) \\ x^6 + 3y^2 = 1. \end{cases}$$

Daí

$$\begin{cases} 6x^5 = \lambda 2x \\ 6y = \lambda 2y \\ x^6 + 3y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^5 - \lambda x = 0 \\ 3y - \lambda y = 0 \\ x^6 + 3y^2 = 1. \end{cases}$$

No último sistema observe que da segunda equação, $y = 0$ ou $\lambda = 3$. Se $y = 0$, da terceira equação segue que $x = \pm 1$ e temos os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ são candidatos a mínimo. Se $\lambda = 3$, da primeira equação tiramos $x = 0$ e $x = \pm 1$ novamente. Fazendo $x = 0$, da terceira equação tiramos $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ da qual vêm os próximos candidatos $\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Os candidatos a mínimo são

$$(-1, 0),\ (1, 0),\ \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ e } \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

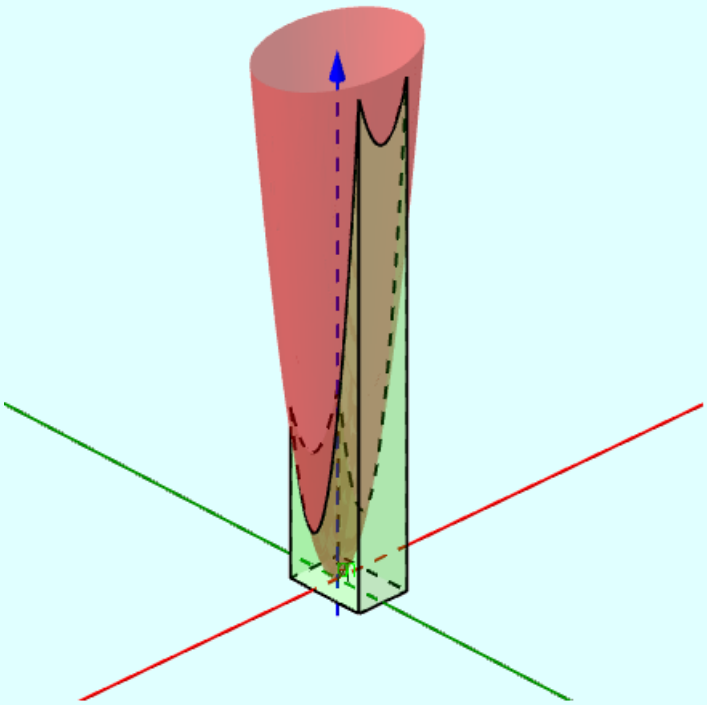
Calculando f nesses pontos, temos

$$f(-1, 0) = 1,\ f(1, 0) = 1,\ f\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{ e } f\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a distância mínima da curva à origem é $D\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.8 Encontre o volume do sólido limitado por cima pela superfície $z = x^2 + 2y^2$ e acima do retângulo $R = [-2, 2] \times [-2, 4]$.

Solução: O sólido em questão é

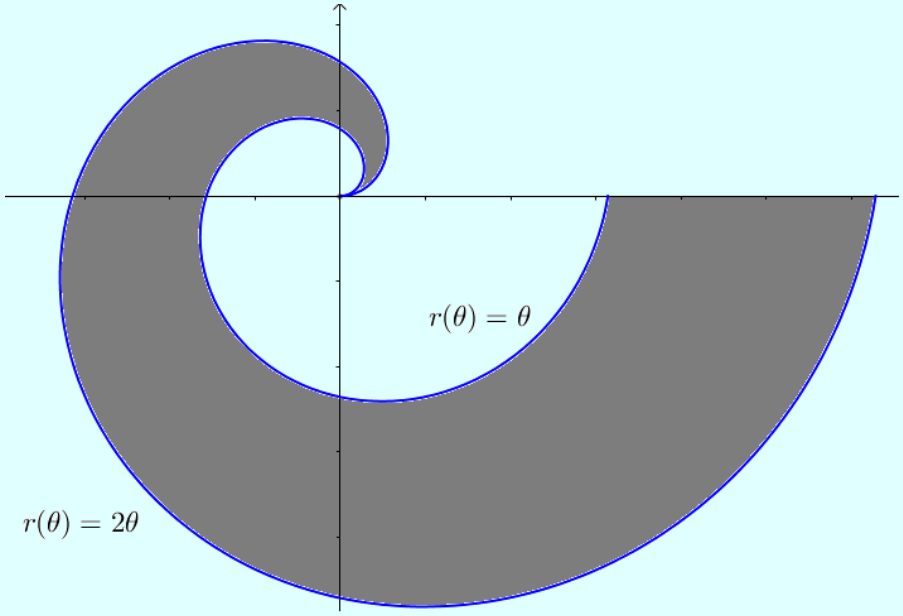


O volume V será dado por

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{4}(x^2 + 2y^2)dydx = \int_{-2}^{2}\left[x^2y + \frac{2y^3}{3}\right]_{-2}^{4}dx$$
$$= \int_{-2}^{2}(6x^2 + 48)dx = \left[2x^3 + 48x\right]_{-2}^{2} = 224 \text{ u.v.}$$

5.9 Calcule a área da região limitada pelas seguintes curvas: a curva polar $r(\theta) = \theta$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$; a curva polar $r(\theta) = 2\theta$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$; e pelo eixo x positivo.

Solução: Temos que a região no plano xy é



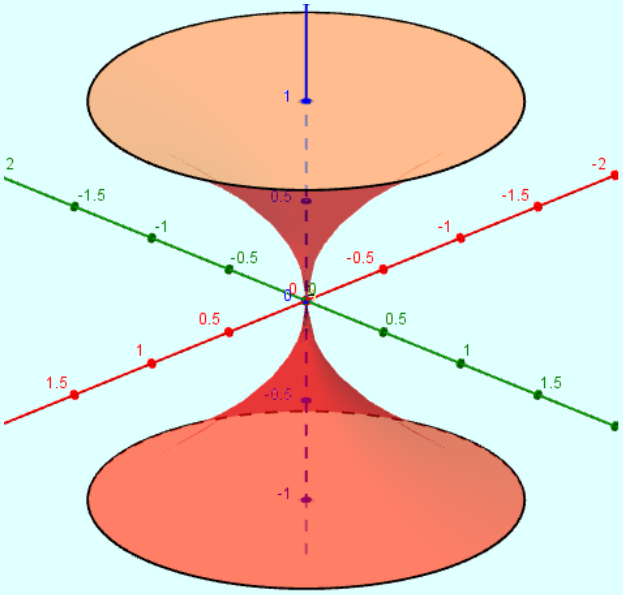
$$B = \{(r, \theta) : \theta \leq r \leq 2\theta \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Sabemos que em coordenadas cartesianas teríamos que a área seria dada pela integral dupla da função $f(x, y) = 1$. Calcularemos em coordenadas polares devido o conjunto B, no plano $r\theta$, descrever um retângulo, que é uma região bem mais simples de trabalhar. Para fazermos essa mudança, devemos considerar o jacobiano da mudança polar que é r. Portanto, ficamos com

$$\begin{aligned} A &= \iint_B r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_\theta^{2\theta} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_\theta^{2\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4\theta^2 - \theta^2) d\theta \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi)^3 = 4\pi^3. \end{aligned}$$

5.10 Encontre o volume do sólido definido pelas desigualdades $x^2 + y^2 \leq z^4$ e $z^2 \leq 1$. Esboce o gráfico deste sólido.

Solução: Veja que



é simétrico com relação a $z = 0$.

Fazendo a mudança cilíndrica, segue que

$$\begin{aligned} z^4 &\geq r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ z^4 &\geq r^2 \\ |z| &\geq \sqrt{r}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$z \leq -\sqrt{r} \text{ ou } \sqrt{r} \leq z.$$

E, da condição $z^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq z \leq 1$. Logo, o sólido pode ser descrito em coordenadas cilíndricas como a união de

$$S_1 = \{(r,\theta,z) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } \sqrt{r} \leq z \leq 1\}$$

com

$$S_2 = \{(r,\theta,z) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } -1 \leq z \leq -\sqrt{r}\}.$$

Portanto, da simetria resulta que

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{S_1} r\,dr\,d\theta\,dz - \iiint_{S_2} r\,dr\,d\theta\,dz = 2\iiint_{S_1} r\,dr\,d\theta\,dz \\ &= 2\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{r}}^1 r\,dz\,d\theta\,dr = 2\int_0^1\int_0^{2\pi} r(1-\sqrt{r})\,d\theta\,dr \\ &= 2\int_0^1 r(1-\sqrt{r})(2\pi-0)\,dr = 4\pi\int_0^1 r - r^{\frac{3}{2}}\,dr \\ &= 4\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = 4\pi\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right] = \frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$

5.11 Um sólido é descrito em coordenadas esféricas por $r \leq \operatorname{sen}\phi$. Calcule seu volume.

Solução: A mudança esférica é dada por

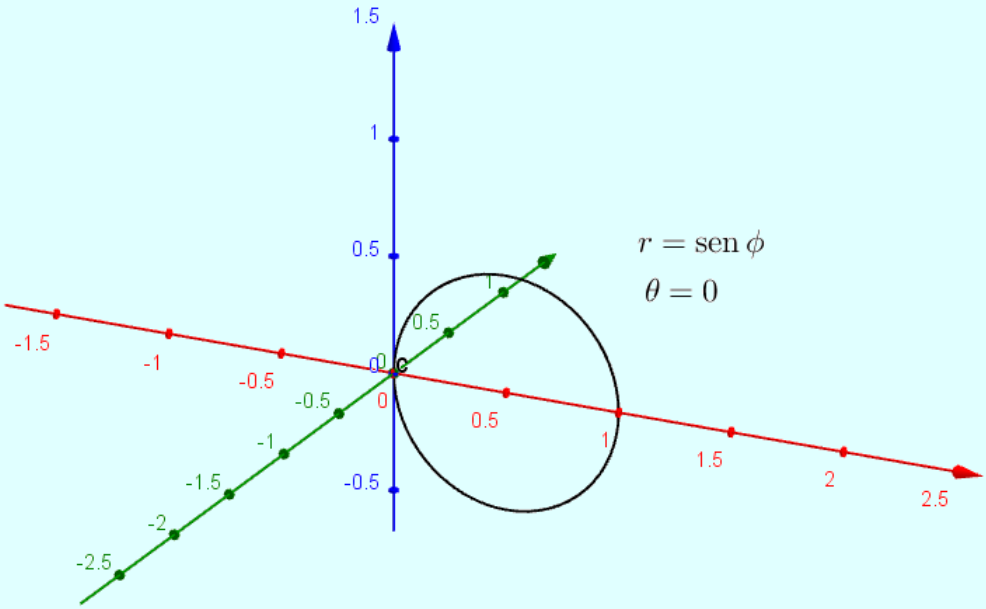
$$\begin{cases} x = r\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leq r \leq \infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{cases}$$

Observe que no plano xz, isto é, quando $\theta = 0$, temos $x = r\operatorname{sen}\phi$, $y = 0$, $z = r\cos\phi$. No plano xz, $r = \sqrt{x^2+z^2}$ e $\operatorname{sen}\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$. Então a equação $r = \operatorname{sen}\phi$ no plano xz fica

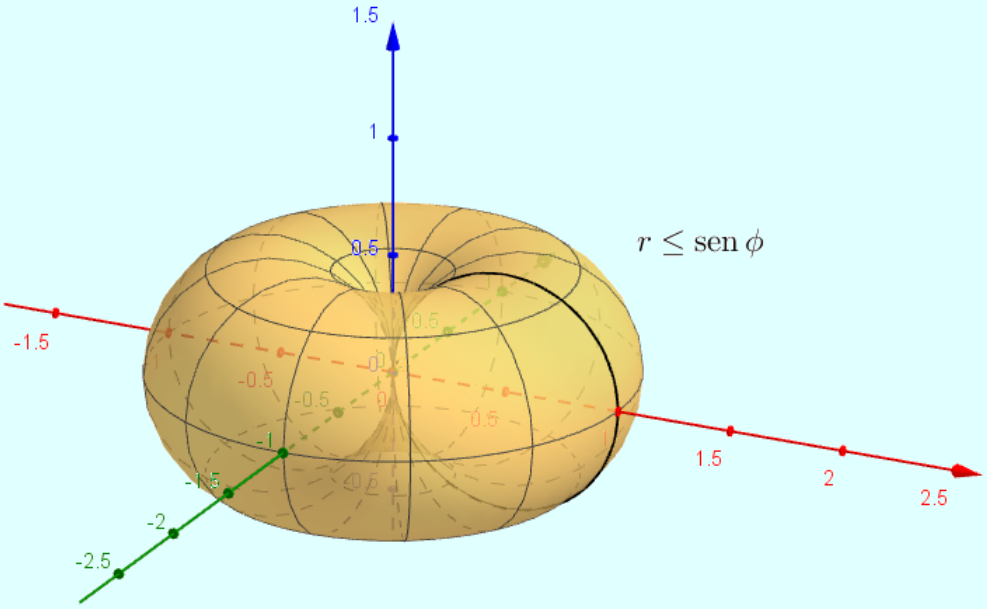
$$\sqrt{x^2+z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}},$$

ou seja, $x^2 + z^2 - x = 0$. Podemos reescrever isso como $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, isto é, $r \leq \operatorname{sen}\phi$ é um círculo no plano xz de centro $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ e raio $\frac{1}{2}$. Rotacionando esse círculo obtemos um toro.

Veja ilustração



Variando $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq r \leq \operatorname{sen}\phi$, temos o toro

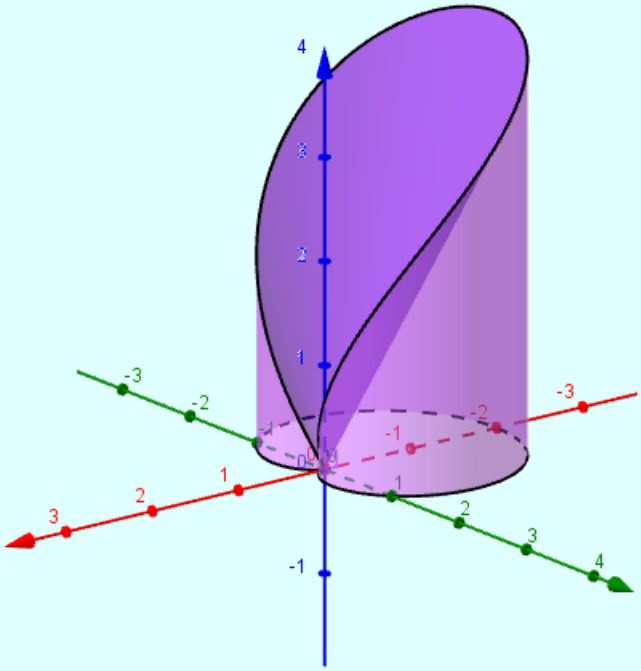


Seu volume é

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\phi} r^2 \operatorname{sen}\phi \, dr\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\operatorname{sen}\phi} d\phi d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4\phi \, d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\phi}{2}\right)^2 d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{4} - \frac{\cos 2\phi}{2} + \frac{\cos^2 2\phi}{4} d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{4} - \frac{\cos 2\phi}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4\phi}{2}\right) d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left[\frac{3\phi}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2\phi}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4\phi}{32}\right]_0^{\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \frac{3\pi}{8} d\theta = \frac{\pi}{8}(2\pi - 0) = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}
$$

5.12 Calcule o volume do sólido limitado por $z = 2r$, $r = 1 - \cos\theta$ e $z = 0$. Esboce o sólido.

Solução: O sólido fica

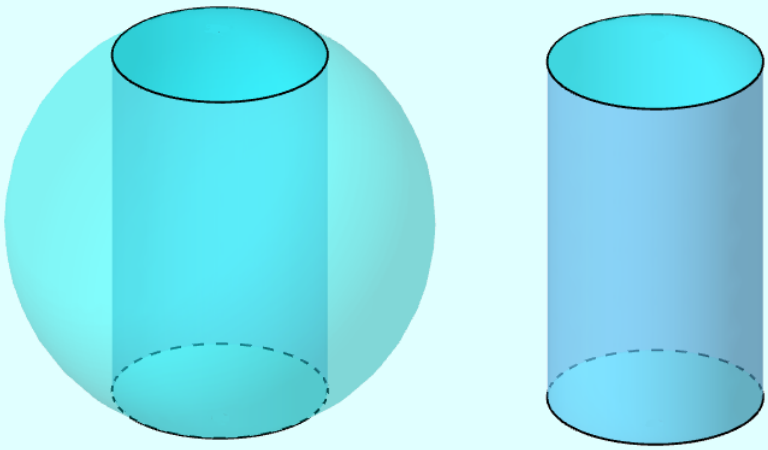


Logo,

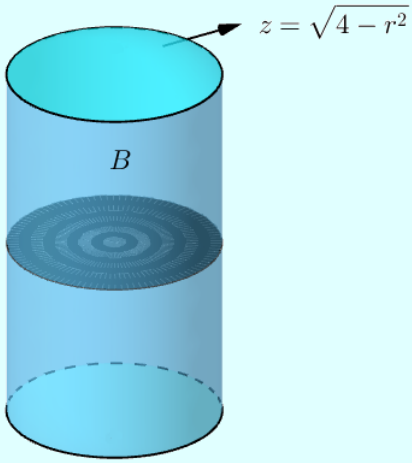
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta}\int_0^{2r} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r(2r-0)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{2r^3}{3}\right]_0^{1-\cos\theta} d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}\right)-(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta)\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\left[\theta-3\operatorname{sen}\theta+3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right)-\left(\operatorname{sen}\theta-\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{2}{3}\cdot 5\pi = \frac{10\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

5.13 Um buraco cilíndrico de raio de 1 milímetro é perfurado através do centro de uma bola sólida (o centro sobre o eixo do cilindro) com raio de 2 milímetros. Calcule o volume do sólido que permanece após a retirada.

Solução: Calcularemos o volume V_1 do sólido retirado



Em coordenadas cilíndricas temos que



$$B = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$

Então,

$$V_1 = 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,d\theta\,dr = 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} r(\sqrt{4 - r^2} - 0)\,d\theta\,dr$$
$$= 2\int_0^1 r\sqrt{4 - r^2}(2\pi - 0)\,dr = 4\pi\left[-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi(32 - 12\sqrt{3})}{3}\ \text{mm}^3.$$

Como o volume V_2 da esfera de raio 2mm é

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}\ \text{mm}^3,$$

então, o volume procurado será

$$V = V_2 - V_1 = \frac{32\pi}{3} - \frac{\pi(32 - 12\sqrt{3})}{3} = 4\sqrt{3}\pi\ \text{mm}^3.$$

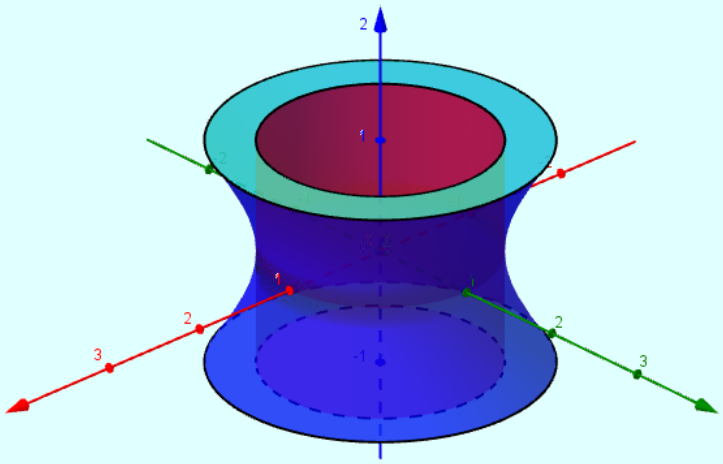
5.14 A densidade ρ do corpo dado por

$$R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1; -1 \leq z \leq 1\}$$

é dado por $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2$. Encontre sua massa

$$M = \iiint_R \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Solução: Observe o corpo em duas cores



Note que a mudança cilíndrica é a mais indicada devido a forma da região e a função ρ. Então, fazendo

$$x = r\cos\theta \text{ e } y = r\,\text{sen}\,\theta$$

temos que

$$z \geq \sqrt{r^2 - 1} \text{ ou } z \geq -\sqrt{r^2 - 1} \text{ para } 1 \leq r \leq \sqrt{2}$$

porque $r^2 - 1 \geq 0$ e $x^2 + y^2 - 1 = 1$, esse último vem da condição $|z| \leq 1$.

Dividimos o corpo em duas partes dadas em coordenadas cilíndricas: a parte em azul celeste acima e abaixo do plano xy que é a união de

$$R_1 = \{(r, \theta, z) : 1 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } \sqrt{r^2 - 1} \leq z \leq 1\}$$

com

$$R_2 = \{(r, \theta, z) : 1 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } -1 \leq z \leq -\sqrt{r^2 - 1}\}.$$

E a segunda parte, em vermelho, que é o cilíndro

$$R_3 = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } -1 \leq z \leq 1\}.$$

Observe que

$$R = R_1 + R_2 + R_3.$$

Podemos calcular M como segue

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_R \rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_{R_1} \rho(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)rdrd\theta dz \\
&+ \iiint_{R_2} \rho(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)rdrd\theta dz + \iiint_{R_3} \rho(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)rdrd\theta dz \\
&= \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{r^2-1}}^{1} r^5 dzd\theta dr + \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{-\sqrt{r^2-1}} r^5 dzd\theta dr + \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} r^5 dzd\theta dr \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} r^5(1-\sqrt{r^2-1})(2\pi-0)dr + \int_1^{\sqrt{2}} r^5(-\sqrt{r^2-1}+1)(2\pi-0)dr \\
&+ \int_0^1 r^5(1+1)(2\pi-0)dr = 2\pi\int_1^{\sqrt{2}} r^5 - r^5\sqrt{r^2-1}dr + 2\pi\int_1^{\sqrt{2}} r^5 - r^5\sqrt{r^2-1}dr \\
&+ 4\pi\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = 4\pi\int_1^{\sqrt{2}} r^5 - r^5\sqrt{r^2-1}dr + \frac{2\pi}{3} \text{ (fazendo } u = r^2-1, \text{ ficamos com)} \\
&= 4\pi\left\{\left[\frac{r^6}{6}\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_0^1 (u+1)^2\sqrt{u}\frac{du}{2}\right\} + \frac{2\pi}{3} = \frac{64\pi}{35}.
\end{aligned}$$

Outra solução:

Podemos descrever a superfície como $r^2 \le 1+z^2$ ou $0 \le r \le \sqrt{1+z^2}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $-1 \le z \le 1$. Então $\rho(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 = r^4$ e

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_R \rho(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r^4.rdr \\
&= [\theta]_0^{2\pi}\int_{-1}^1 dz\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^{\sqrt{1+z^2}} = 2\pi\int_{-1}^1 \frac{(1+z^2)^3}{6}dz \\
&= \frac{\pi}{3}\int_{-1}^1 (1+3z^2+3z^4+z^6)dz = \frac{\pi}{3}\left[z+z^3+\frac{3}{5}z^5+\frac{1}{7}z^7\right]_{-1}^1 \\
&= \frac{2\pi}{3}(1+1+\frac{3}{5}+\frac{1}{7}) = \frac{64}{35}\pi.
\end{aligned}$$