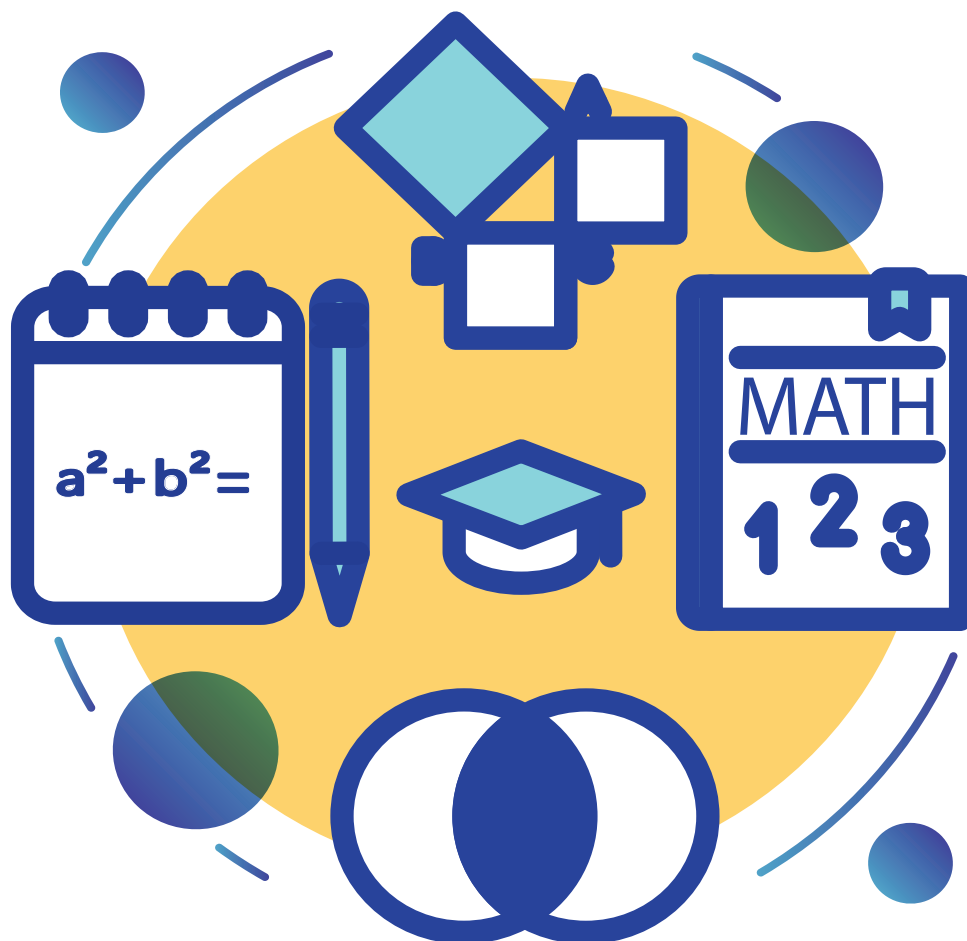




MATEMÁTICA BASICA



María Isabel Ashaw Muñoz
Fernando Alain Incio Flores
Nixo Nuñez Sanchez
Jose Luis Mio Pasco
Juan Pablo Francisco Barturen Cabrera
Marcos Marcelo Flores Castillo
Carlos Jose Carmona Brenis
Segundo Williams Ubillús Farfán

científica digital



CIENTÍFICA DIGITAL EDITORIAL LTDA

Barueri - São Paulo - Brasil
www.cientificadigital.org - contato@cientificadigital.org

Diagramação e Arte Edição © 2025 Científica Digital
Equipe Editorial Texto © 2025 Os Autores
Imagens da Capa 1ª Edição - 2025
Adobe Stock - 2025 Acesso Livre - Open Access

© COPYRIGHT DIREITOS RESERVADOS. A editora detém os direitos autorais pela edição e projeto gráfico. Os autores detêm os direitos autorais dos seus respectivos textos. Esta obra foi licenciada com uma Licença de Atribuição Creative Commons – Atribuição 4.0 Internacional, permitindo o download e compartilhamento integral ou em partes, desde que seja citada a fonte, com os créditos atribuídos aos autores e obrigatoriamente no formato Acesso Livre (Open Access) e sem a possibilidade de alteração de nenhuma forma. É proibida a catalogação em plataformas com acesso restrito e/ou com fins comerciais.



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M425 Matemática básica / María Isabel Ashaw Muñoz, Fernando Alain Incio Flores, Nixo Nuñez Sanchez, et al. – Guarujá-SP: Científica Digital, 2025.

Outros autores: Jose Luis Mio Pasco, Juan Pablo Francisco Barturen Cabrera, Marcos Marcelo Flores Castillo, Carlos Jose Carmona Brenis, Segundo Williams Ubillús Farfán.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui Bibliografia

ISBN 978-65-83998-54-5

DOI 10.37885/978-65-83998-54-5

1. Ensino de matemática. I. Muñoz, María Isabel Ashaw. II. Flores, Fernando Alain Incio. III. Sanchez, Nixo Nuñez. IV. Título.

CDD 510.7

Elaborado por Janaína Ramos – CRB-8/9166

Índice para catálogo sistemático:

I. Ensino de matemática

E-BOOK

ACESSO LIVRE ON LINE - IMPRESSÃO PROIBIDA

2025

María Isabel Ashaw Muñoz
Fernando Alain Incio Flores
Nixo Nuñez Sanchez
Jose Luis Mio Pasco
Juan Pablo Francisco Barturen Cabrera
Marcos Marcelo Flores Castillo
Carlos Jose Carmona Brenis
Segundo Williams Ubillús Farfán

MATEMÁTICA BASICA

1ª EDIÇÃO



científica digital

2025 - BARUERI - SP

CONSELHO EDITORIAL

Prof. Dr. André Cutrim Carvalho
Prof. Dr. Antônio Marcos Mota Miranda
Prof^a. Ma. Auristela Correa Castro
Prof. Dr. Carlos Alberto Martins Cordeiro
Prof. Dr. Carlos Alexandre Oelke
Prof^a. Dra. Caroline Nóbrega de Almeida
Prof^a. Dra. Clara Mockdece Neves
Prof^a. Dra. Claudia Maria Rinhel-Silva
Prof^a. Dra. Clecia Simone Gonçalves Rosa Pacheco
Prof. Dr. Cristiano Marins
Prof^a. Dra. Cristina Berger Fadel
Prof. Dr. Daniel Luciano Gevehr
Prof. Dr. Diogo da Silva Cardoso
Prof. Dr. Ernane Rosa Martins
Prof. Dr. Everaldo dos Santos Mendes
Prof. Dr. Fabricio Gomes Gonçalves
Prof^a. Dra. Fernanda Rezende
Prof. Dr. Flávio Aparecido de Almeida
Prof^a. Dra. Francine Náthalie Ferraresi Queluz
Prof^a. Dra. Geuciane Felipe Guerim Fernandes
Prof. Dr. Humberto Costa

Prof. Dr. Joachin Melo Azevedo Neto
Prof. Dr. Jónata Ferreira de Moura
Prof. Dr. José Aderval Aragão
Prof. Me. Julianno Pizzano Ayoub
Prof. Dr. Leonardo Augusto Couto Finelli
Prof. Dr. Luiz Gonzaga Lapa Junior
Prof. Me. Marcelo da Fonseca Ferreira da Silva
Prof^a. Dra. Maria Cristina Zago
Prof^a. Dra. Maria Otília Zangão
Prof. Dr. Mário Henrique Gomes
Prof. Dr. Nelson J. Almeida
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes
Prof. Dr. Pedro Afonso Cortez
Prof. Dr. Reinaldo Pacheco dos Santos
Prof. Dr. Rogério de Melo Grillo
Prof^a. Dra. Rosenery Pimentel Nascimento
Prof. Dr. Rossano Sartori Dal Molin
Prof. Me. Silvio Almeida Junior
Prof^a. Dra. Thays Zigante Furlan Ribeiro
Prof. Dr. Wescley Viana Evangelista
Prof. Dr. Willian Carboni Viana
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme

Acesse a lista completa dos Membros do Conselho Editorial em www.editoracientifica.com.br/conselho

Parecer e revisão por pares

Este livro é fruto de uma pesquisa científica dedicada às atividades de ciência e tecnologia. Antes de sua publicação, os textos que compõem esta obra foram submetidos à avaliação criteriosa do Conselho Editorial e à revisão por pares acadêmicos externos (Peer Review), sendo, posteriormente, recomendados para publicação.

Nota: Esta é uma produção independente, tornando-se uma obra com reservas de direitos autorais para os autores. Alguns textos podem ser derivados de outros trabalhos já apresentados ou defendidos, todavia, os autores foram instruídos ao cuidado com o autoplágio. A responsabilidade pelo conteúdo é exclusiva dos autores, não representando, necessariamente, a opinião da editora, tampouco dos organizadores, revisores e membros do Conselho Editorial.

PRESENTACIÓN

Las matemáticas no son solo números y fórmulas; son el lenguaje con el que la naturaleza se expresa. Desde las estrellas en el cielo hasta las hojas de un árbol, todo sigue patrones matemáticos. Sin embargo, a menudo se perciben como una disciplina fría y distante. Este libro busca cambiar esa visión, mostrando que las matemáticas son una herramienta poderosa para entender el mundo que nos rodea.

A lo largo de estas páginas, exploraremos conceptos fundamentales de manera clara y accesible, demostrando que las matemáticas son mucho más que una asignatura escolar: son una forma de pensar, de resolver problemas y de apreciar la belleza del universo.

Asimismo el presente libro está dirigido tanto a los estudiantes y docentes de las diversas universidades, el cual se constituye en una colección de materiales referenciales y de consulta para el desarrollo de la asignatura: Matemática Básica del Primer Ciclo.

Este libro contiene un conjunto de contenidos, recopilados de diferentes autores, utilizando diferentes enfoques, diferentes puntos de vista lo cual hace atractivo este material, toda vez que por mucho tiempo nos hemos acostumbrado a utilizar un solo enfoque y como estudiantes acostumbrados a recibir “recetas” y “fórmulas” que matan la creatividad de los participantes.

Pretendemos que todos los estudiantes de las distintas universidades, especialmente los del primer ciclo encuentren un material que les sirva de base para propiciar la discusión, de igual modo esperamos contribuir con un granito de arena para la investigación, de modo que los participantes adquieran una cultura investigativa a lo largo de su carrera.

El presente libro consta de cinco unidades didácticas, en los cuales se sustenta en articular el trabajo para el logro de las capacidades. La Primera Unidad: “Teoría de Conjuntos” trata de fundamentar las definiciones y axiomas de la teoría de conjuntos, adecuando a realidades concretas los ejercicios y problemas presentados. En la Segunda Unidad: “Sistema de Números Reales” se fundamenta a partir de una realidad los conjuntos numéricos, resolviendo problemas y ejercicios en donde se aplican los números reales. La Tercera Unidad: “Funciones” son tratados como una dependencia entre los valores de dos variables y una aplicación de R en R ; se graficarán las funciones especiales como: función lineal, función constante, función identidad, así como las funciones cuadráticas.

La Cuarta Unidad referente a “Sistema de Ecuaciones”, se resolverá un sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables por los métodos de: reducción, sustitución, igualación, determinantes; el sistema de ecuaciones de primer grado con las variables se resuelve por los métodos de reducción y determinante; así mismo se proponen problemas sencillos de aplicación dejando en libertad el empleo del método de dominio del estudiante. En la Quinta Unidad estudiamos algunos temas importantes de “Geometría” y se construirán figuras geométricas planas: cuadrado, rectángulo, triángulo, paralelogramo, trapecio, polígonos, regulares, círculo, etc. así también se

construirán figuras geométricas en tres dimensiones: cubo, cilindro, pirámide, esfera, etc. Así como se encontrará el volumen de las mismas.

El libro tiene carácter referencial, no se pretende abordar todo, ni menos dar por terminado el tema, más por el contrario es una motivación para el estudio de la matemática. Finalmente les pedimos a todos los usuarios nos hagan llegar sus aportes y críticas para mejorar este material en las futuras ediciones.

LOS COMPILADORES

ÍNDICE

PRESENTACIÓN	5
1. UNIDAD I: TEORÍA DE CONJUNTOS	11
1.1. Idea de conjunto y elemento	
1.2. Notación y determinación de conjuntos	
1.3. Relaciones de pertenencia, inclusión e igualdad	
1.4. Conjuntos disjuntos, comparables y potencia	
1.5. Tipos de conjuntos: vacío, unitario, universal, finito e infinito	
1.6. Operaciones entre conjuntos	
1.6.1. Unión	
1.6.2. Intersección	
1.6.3. Diferencia	
1.6.4. Complemento	
1.6.5. Diferencia simétrica	
1.6.6. Producto cartesiano	
1.7. Cardinal de un conjunto	
1.8. Problemas aplicados con conjuntos	
2. UNIDAD II: SISTEMA DE NÚMEROS REALES	32
2.1. Introducción a los sistemas numéricos	
2.2. Números naturales	
2.3. Números enteros	
2.4. Números racionales	
2.5. Números irracionales	
2.6. Números reales	
2.7. Representación en la recta real	
2.8. Propiedades de los números reales	
2.9. Operaciones con números reales	
2.9.1. Adición	
2.9.2. Sustracción	
2.9.3. Multiplicación	
2.9.4. División	
2.9.5. Propiedad distributiva	
3. UNIDAD III: FUNCIONES	56
3.1. Definición de función	
3.2. Funciones especiales	
3.2.1. Función constante	
3.2.2. Función identidad	
3.2.3. Función lineal	
3.2.4. Función cuadrática	
3.3. Representación gráfica	
3.4. Aplicaciones contextualizadas	
4. UNIDAD IV: SISTEMAS DE ECUACIONES	80
4.1. Ecuaciones lineales con dos variables	
4.2. Métodos de solución	
4.2.1. Reducción	
4.2.2. Sustitución	
4.2.3. Igualación	
4.2.4. Determinantes	
4.3. Problemas de aplicación	
5. UNIDAD V: GEOMETRÍA BÁSICA	105
5.1. Figuras planas: construcción y características	
5.2. Figuras tridimensionales	
5.3. Cálculo de áreas y volúmenes	
5.4. Aplicaciones geométricas	
BIBLIOGRAFÍA	160

UNIDAD N° 01

TEORÍA DE CONJUNTOS

IDEA DE CONJUNTO

Ciertos conceptos en las matemáticas son primarios, indefinibles. La idea de conjunto es básica en el pensamiento humano. La idea es algo puramente **intuitivo**, algo no definido, pero si entendido por cada persona como resultado de su propia experiencia. Gracias a que todos tenemos la idea de lo que es un conjunto podemos identificarlo como:

Una colección, agrupación, reunión, asociación de cualquier tipo de objetos que tienen propiedades comunes.

IDEA DE ELEMENTO

A cada **objeto** de la colección se le conoce como "**Elemento del conjunto**". Ejemplo:

- (1) La colección formada por todos los puntos de la recta forma un conjunto. Cada punto que marque sobre la recta es un elemento del conjunto.
- (2) La colección formada por los actuales presidentes de los países de América Latina forman un conjunto. Cada presidente de América Latina es un elemento del conjunto.
- (3) La colección formada por los números 2, 3, 4, 5 forman un conjunto. Cada número es un elemento del conjunto.
- (4) La colección formada por los días de la semana forman un conjunto. Cada día de la semana es un elemento del conjunto.

NÓTESE

Que en algunos casos, como en los ejemplos (1), (3), y (4), los elementos del conjunto son abstractos, es decir, existen sólo como ideas

en la mente de una persona. En otros, como en el ejemplo (2), los elementos del conjunto son reales.

- Los ejemplos anteriores muestran al **conjunto como una colección de objetos**. Sin embargo, el concepto que tenemos es un "**Concepto Intuitivo**", el cual no es correcto pues también existe conjuntos formados por un solo elemento y conjunto formados sin elementos lo cual contradice la idea que teníamos.

Ejemplo:

El Conjunto de Números Naturales menores que 5 y mayores que 4.

Notación de un Conjunto

Visualmente, para simbolizar los conjuntos se emplean letras mayúsculas: A, B, C, ... y para simbolizar los elementos del conjunto se emplean letras minúsculas: a, b, c, ...

Ejemplo:

Si "C" representa el conjunto formado por las vocales del alfabeto castellano se escribe:

$$C = \{ a, e, i, o, u \}$$

Y se lee: "C" es el conjunto de los elementos a, e, i, o, u".

Se observa que los elementos van separados por comas y encerrados entre llaves { }

Determinación de un Conjunto

Existen dos maneras de determinar un conjunto dado:

1. **Por Extensión (Forma Enumerativa o Tabular):**

Cuando se nombran o enumeran uno por uno los elementos del conjunto, o si son numerosos se mencionan los primeros de ellos seguidos de puntos suspensivos.

Ejemplo:

(1) $A = \{a, e, i, o, u\}$

Se lee: "A es el conjunto de todas las vocales del alfabeto castellano".

(2) $E = \{\text{Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo}\}$

Se lee: "E es el conjunto de todos los días de la semana"

(3) $H = \{0, 1, 2, 3, \dots, 50\}$

Se lee: "H es el conjunto de todos los números naturales desde el 0 hasta el 50 inclusive.

(4) $C = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

Se lee: "C es el conjunto de elementos 0, 1, 2, 3 ..." (los puntos suspensivos indican que posiblemente existen otros elementos).

2. Por Comprensión (o Forma Constructiva):

Cuando se define al conjunto enunciando una propiedad común que caracteriza a los elementos de dicho conjunto.

Ejemplo: (teniendo en cuenta los ejemplos anteriores).

(1) $A = \{x/x \text{ es una vocal}\}$

Se lee: "A es el conjunto de los elementos x, tal que x es una vocal", o $A = \{x/x \text{ es una letra del alfabeto castellano, } x \text{ es una vocal}\}$

Se lee: "A es el conjunto de los elementos x, tal que x es una letra del alfabeto castellano y x es una vocal".

(2) $E = \{x/x \text{ es un día de la semana}\}$

Se lee: "E es el conjunto de los elementos x, tal que x es un día de la semana".

(3) $H = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 50\}$

Se lee: "H es el conjunto de los elementos x, tal que x pertenece a los números naturales y x es menor e igual a 50".

(4) $C = \{x/x \text{ es un número natural}\}$

Se lee: "C es el conjunto de los elementos x, tal que x es un número natural".

RELACIONES ENTRE ELEMENTOS Y CONJUNTOS

1. RELACIÓN DE PERTENENCIA

Es la que nos permite determinar, si un objeto cualquiera es elemento o no del conjunto dado. La relación de pertenencia se indica por la letra griega Epsilon ($\in$).

- El símbolo empleado para expresar que un elemento pertenece a un conjunto es: " $\in$ ".
- El símbolo empleado para expresar que un elemento no pertenece a un conjunto es: " $\notin$ ".

Ejemplo:

$P = \{m, n, r, s\}$

$n \in P$, Se lee: "El elemento "n" pertenece al conjunto P".

$q \notin P$, Se lee: "El elemento "q" no pertenece al conjunto P".

2. RELACIÓN DE INCLUSIÓN

La relación de Inclusión se simboliza por "**C**". Es una relación entre conjuntos. Se dice que **A** está incluido en el conjunto **B**, cuando todo elemento de **A** pertenece a **B**; también se interpreta como **A** es parte

de **B**, **A** está contenido en **B**, o **A** es subconjunto de **B**.

Simbólicamente:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B,$$

Ejemplo:

Si : $A = \{\text{Perros}\}$

$B = \{\text{Mamíferos}\}$

Entonces se tiene:

$A \subset B$, equivale a:

- ✓ “A” es un subconjunto de “B”.
- ✓ “A” está contenido en “B”.
- ✓ “A” es parte de “B”.
- ✓ “A” está incluido en “B”.

$B \supset A$, significa:

- ✓ “B” es un superconjunto de “A”.
- ✓ “B” contiene a “A”.
- ✓ “B” es el todo de “A”.
- ✓ “B” incluye a “A”.

$\subset$	Se lee: “Está incluido en” Su negativa es: $\not\subset$
$\supset$	Se lee: “Incluye a” Su negativa es: $\not\supset$

2.1. Propiedades de la Inclusión:

- a) $A \subset A$ para todo conjunto A.
(Propiedad Reflexiva)
- b) Si $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
(Propiedad Transitiva)
- c) El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto ($\emptyset \subset A$)

Ejemplo:

(1) Si: $M = \{\text{angora}\}$

$N = \{\text{gatos}\}$ y

$P = \{\text{mamíferos}\}$

Entonces:

$$M \subset N \subset P \Rightarrow M \subset P$$

(Propiedad Transitiva)

Además:

$$M \subset M \text{ (Verdadero) Prop. a).}$$

$$\{\emptyset\} \not\subset M \text{ (Verdadero)}$$

$$\emptyset \subset M \text{ (Verdadero) Prop. c).}$$

$$P \subset P \text{ (Verdadero) Prop. a).}$$

$$\emptyset \subset P \text{ (Verdadero) Prop. c).}$$

(2) $A = \{\emptyset, 1, \{2,3\}, 4, 5, 6\}$ y

$$B = \{\emptyset, 1, 4, 5, 6, 7\}$$

Entonces: $A \not\subset B$

Además.

$$1 \subset A \quad (\text{Falso})$$

$$\{\emptyset\} \in A \quad (\text{Falso})$$

$$\emptyset \in A \quad (\text{Verdadero})$$

$$\{2,3\} \subset A \quad (\text{Falso})$$

$$4 \in A \quad (\text{Verdadero})$$

$$\emptyset \subset A \quad (\text{Verdadero})$$

3. RELACIÓN DE IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dos conjuntos A y B son iguales si ambos tienen los mismos elementos.

Simbólicamente:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

NÓTESE que decimos los mismos elementos que no es igual a decir el mismo número de elementos

No importa el nombre dado al conjunto sino los elementos que lo forman.

Ejemplo:

(1) Si : $A = \{1, 8, 7, 9, g, 6\}$

$$B = \{g, 6, 9, 8, 1, 7\}$$

Entonces: $A = B$

Pues son los mismos elementos.

Aunque estén en diferente orden.

(2) Si: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 $D = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ impar} < 10\}$

Entonces: $A = D$

Pues son los mismos elementos solo que uno está determinado por extensión y el otro por comprensión.

(3) Si:
 $R = \{x/x \text{ es número natural y } 3 \leq x \leq 10\}$
 $T = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 Entonces: $R = T$

3.1. Propiedades de la Igualdad de Conjuntos:

- **Reflexiva**

$A = A$, todo conjunto es igual a sí mismo.

- **Simétrica**

Si $A = B$, entonces $B = A$

- **Transitiva**

Si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$

4. CONJUNTOS DIFERENTES

Dos conjuntos A y B son diferentes si sus elementos no son iguales.

Simbólicamente:

$$A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B \wedge B \not\subset A$$

Ejemplo:

(1) Si: $G = \{a, e, i, o, u\}$

$J = \{e, a, o, 4, i\}$

Entonces: $G \neq J$

(2) Si $A = \{m, p, z, o\}$

$C = \{e, p, q, m\}$

Entonces: $A \neq C$

En los ejemplos (1) y (2) a pesar de que cada conjunto tiene igual número de elementos basta que exista un elemento diferente para que no sean iguales

5. CONJUNTOS DISJUNTOS

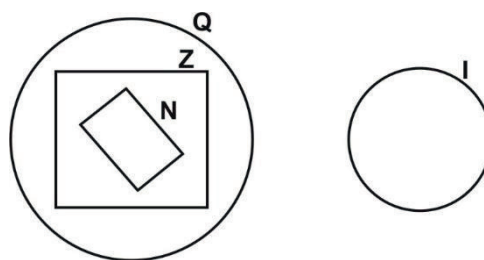
Dos conjuntos A y B son disjuntos cuando no tienen ningún elemento en común. Es decir, todos los elementos de un conjunto son diferentes a los elementos del otro conjunto

Simbólicamente:

$$A \text{ disjunto con } B \Leftrightarrow \nexists x / x \in A \wedge x \in B$$

Ejemplo:

(1) Si:



Q: Es el conjunto de los números Racionales.

Z: Es el conjunto de los números Enteros.

N: Es el conjunto de los números Naturales.

I: Es el conjunto de los números Irracionales.

Entonces:

- I es disjunto de Q

- I es disjunto de N

- I es disjunto de Z

- N es disjunto de I

(2) $A = \{3, 4, 8\}$ y $B = \{l, m, p\}$

Son conjuntos disjuntos

(3) Si: $A = \{9, 8, 7, 6, 10\}$

$B = \{0, 5, 1, 4, 2\}$

Entonces: A es disjunto de B

6. CONJUNTOS COMPARABLES

Dos conjuntos A y B son comparables si uno de los conjuntos es subconjunto del otro.

Simbólicamente:

A es comparable con B, si $A \subset B \vee B \subset A$

Ejemplo:

(1) Si: $A = \{1, 3, 7, 9\}$
 $B = \{0, 1, 2, 3, 7, 9\}$

Entonces: $A \subset B$

$\therefore$ A y B son comparables.

(2) Si: $D = \{a, c, d, e, f\}$
 $E = \{a, b, c, d, e\}$

Entonces: $D \not\subset E$ y $E \not\subset D$

$\therefore$ D y E no son comparables.

7. CONJUNTO POTENCIA

Dado un conjunto "A" se denomina conjunto potencia de A al conjunto formado por todos los subconjuntos que es posible formar con los elementos de un conjunto dado.

Notación: $P(A)$

Se lee: potencia del conjunto A.

Simbólicamente:

$P(A) = \{x/x \subset A\}$

Es decir: $x \in P(A) \Leftrightarrow x \subset A$

El número de subconjuntos que es posible formar con los elementos de un conjunto es 2^n , donde "n" es el número de elementos del conjunto.

2^n = número de subconjuntos de A

Ejemplo:

(1) Dado $A = \{7, 5, 3\}$, los subconjuntos de A son: ϕ , $\{7\}$, $\{5\}$, $\{3\}$, $\{7,5\}$, $\{7,3\}$, $\{5,3\}$, $\{7, 5, 3\}$.

Entonces: el conjunto potencia de A es:

$P(A) = \{\phi, \{7\}, \{5\}, \{3\}, \{7,5\}, \{7,3\}, \{5,3\}, \{7, 5, 3\}\}$.

Nótese: el número de subconjuntos de A es:

$2^3 = 8$ subconjuntos de A

7.1. Propiedades del conjunto

potencia:

1. $P(\phi) = \{\phi\}$
2. $P(A) \subset P(B) \Leftrightarrow A \subset B$
3. $P(A) = P(B) \Leftrightarrow A = B$
4. $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$
5. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
6. $\phi \in P(A), A \in P(A)$

CLASE DE CONJUNTOS

a. Conjunto Vacío o Nulo

Es aquel conjunto que no tiene elementos o cuyo elemento no existen.

Notación:

- ✓ Por la letra griega fi " ϕ "
- ✓ Por un conjunto que no tiene elementos dentro de las llaves " $\{\}$ ".

$\phi = \{\}$

Definido como: $\phi = \{x / x \neq x\}$

Se lee: para cualquier "x tal que x es diferente de x"

NÓTESE

que no tiene elementos, pues no existe un elemento x diferente de sí mismo.

Ejemplo:

(1) $A = \{x \in \mathbb{N} / 5 < x < 6\}$

Es un conjunto vacío porque no existe un número natural que sea mayor que 5 y menor que 6.

Entonces:

$$A = \emptyset \text{ ó } A = \{ \}$$

(2) $B = \{x/x \text{ es un triángulo de dos lados}\}$

Es un conjunto vacío porque no existe un triángulo que tenga dos lados.

Entonces: $B = \emptyset \text{ ó } B = \{ \}$

(3) $C = \{\text{Es el conjunto de los meses del año que tienen 32 días}\}$

Es un conjunto vacío porque no existe mes que tenga 32 días.

Entonces: $C = \emptyset \text{ ó } C = \{ \}$

¡ RECUERDE!
El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

b. Conjunto Unitario o Singletón

Es el conjunto que tiene uno y solo un elemento o de tener varios elementos todos ellos son iguales entre sí.

Ejemplo:

(1) $N = \{x/x + 6 = 8\}$

Es un conjunto unitario cuyo elemento 2 ó $N = \{2\}$.

(2) $A = \{b\}$

Es un conjunto unitario.

(3) $M = \{x \in \mathbb{N} / 10 < x < 12\}$

Es un conjunto unitario cuyo elemento es 11 ó $M = \{11\}$

(4) $B = \{\{a\}\}$ y $D = \{\emptyset\}$

Son conjuntos unitarios pues

$$\{a\} \in B \text{ y } \emptyset \in D$$

c. Conjunto Universal

Llamado también Referencial, Universo o Universo del discurso. El Conjunto Universal es el conjunto que contiene o dentro del cual están todos los demás conjuntos.

Notación: U

Ejemplo:

(1) $U = \{x/x \text{ es un conejo}\}$ y

$$S = \{x/x \text{ es un conejo angora}\}$$

Como vemos **U** es el universo del conjunto **S**, porque el elemento del conjunto **S** está en **U**.

(2) $U = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x < 7\}$,

$$A = \{-2, 0, 1, 2\}, B = \{1, 3, 5, 6\} \text{ y}$$

$$C = \{0, 2, 4\}$$

Como vemos **U** es el universo de los conjuntos **A**, **B** y **C**, porque todos los elementos del conjunto **A**, **B** y **C** pertenecen al conjunto **U**.

(3) $U = \{x/x \text{ es letra de nuestro alfabeto castellano}\}$ y

$$A = \{x/x \text{ es letra vocal}\}$$

Como vemos **U** es el universo ya que todos los elementos de **A** están en **U**.

d. Conjunto Finito

Es un conjunto que tiene un determinado número de elementos o cuando el proceso de contar sus elementos puede terminar, es decir consta de un primer y último elemento.

Ejemplo:

(1) $A = \{x/x \text{ es una vocal}\}$

(2) $B = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 3 < x < 11\}$

(3) $C = \{x/x \text{ es un pez del mar}\}$

(4) $D = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$

- ✓ En el conjunto A y B podemos enumerar todos los elementos que lo forman, así:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

- ✓ En el conjunto C parece imposible enumerar los peces del mar. Pero ésta imposibilidad es sólo de orden físico, ya que no disponemos de medios para recorrer el mar y no alcanza el tiempo de nuestra vida para contarlos. Si pudiéramos salvar estos obstáculos podríamos enumerarlos y llegar hasta el último elemento.

En los conjuntos A, B, C y D el proceso de contar sus elementos puede terminar por tanto decimos que estos conjuntos son finitos.

e. Conjunto Infinito

Es un conjunto que tiene un indeterminado número de elementos, o cuando no se puede contar sus elementos; es decir no se puede determinar el último elemento.

Ejemplo:

(1) $A = \{x/x \text{ es un número par}\}$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x > 3\}$$

$C = \{x/x \text{ es una fracción de denominador 3}\}.$

- ✓ En el conjunto A, B y C nunca llegaremos a nombrar el último elemento pues siempre es posible agregar uno más.

$$A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, \dots\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \dots \right\}$$

Los puntos suspensivos indican que no hay último elemento.

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

a. Unión o Reunión

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a "A" ó "B" ó a ambos.

Se denota por: $A \cup B$.

Se lee: "A unión con B".

Simbólicamente:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\} \text{ ó}$$

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

Ejemplo:

(1) Sean los conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d, e\}, \quad B = \{1, a, 2, b\} \text{ y}$$

$$C = \{c, d, e\}$$

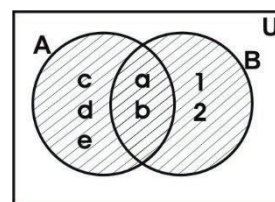
Hallar: $A \cup B$, $B \cup C$ y $A \cup C$.

Solución:

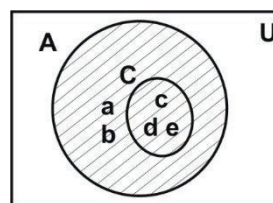
$$A \cup B = \{1, a, 2, b, c, d, e\}$$

$$B \cup C = \{1, 2, a, b, c, d, e\}$$

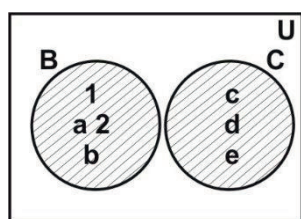
$$A \cup C = \{a, b, c, d, e\}$$



$A \cup B$



$A \cup C$



$B \cup C$

Propiedades de la Unión:

1. $A \cup A = A$ (Idempotencia)
2. $A \cup \phi = A$ (Elemento neutro)
3. $A \cup U = U$ (Elemento neutro)
4. $A \cup B = B \cup A$ (Conmutativa)
5. $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$
(Asociativa).
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(Distributiva).
7. $A \subset (A \cup B), \forall B$ y
8. $B \subset (A \cup B), \forall A$
9. $A \cup B = \phi \rightarrow A = \phi$ y $B = \phi$
10. $A \subset B \rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup C),$
 $\forall C$
11. $A \subset B \rightarrow A \cup B = B$

b. Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que son comunes a A y B, es decir de los elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B.

Se denota por : $A \cap B$

Se lee: "A intersección con B".

Simbólicamente:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\} \text{ ó }$$

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Ejemplo:

(1) Sean los conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{1, a, 2, b\} \text{ y}$$

$$C = \{c, d, e\}$$

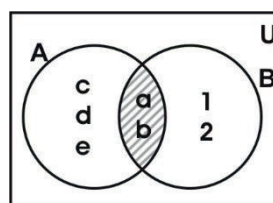
Hallar: $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$

Solución:

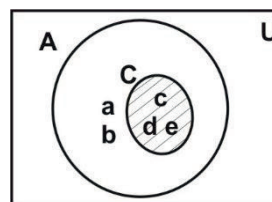
$$A \cap B = \{a, b\}$$

$$A \cap C = \{c, d, e\}$$

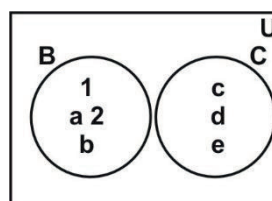
$$B \cap C = \phi$$



$A \cap B$



$A \cap C$

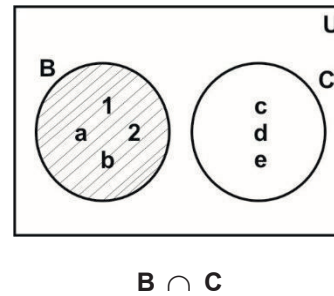


$B \cap C$

Propiedades de la Intersección:

1. $A \cap A = A$ (Idempotencia)
2. $A \cap \phi = \phi$ (Elemento neutro)
3. $A \cap U = A$ (Elemento neutro)
4. $A \cap B = B \cap A$ (Conmutativa)
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Asociativa).
6. $(A \cap B) \subset A$ y $(A \cap B) \subset B$

7. Si: $A \subset B \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C), \forall C$
 8. Si: $A \subset C$ y $B \subset D \Rightarrow (A \cap B) \subset (C \cap D)$
 9. Si: $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
 10. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
 11. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 12. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 13. $A \cap (A \cup B) = A$
 14. $A \cup (A \cap B) = A$
- Distributiva
- Ley de Absorción



c. Diferencia

La diferencia de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos del conjunto A que no pertenecen al conjunto B.

Se denota: $A - B$.

Se lee: "A menos B". "A diferencia de B".

Simbólicamente:

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\} \text{ ó}$$

$$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Ejemplo:

(1) Sean los conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{1, a, 2, b\} \text{ y}$$

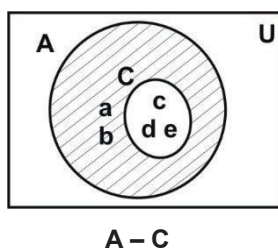
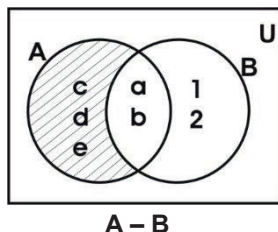
$$C = \{c, d, e\}$$

Hallar: $A - B$, $A - C$ y $B - C$

Solución:

$$A - B = \{c, d, e\}, A - C = \{a, b\} \text{ y}$$

$$B - C = \{1, a, 2, b\}$$



Propiedades de la Diferencia:

1. $A - A = \phi$
2. $A - \phi = A; \forall A: \text{conjunto}$
3. $\phi - A = \phi; \forall A$
4. $A - U = \phi; \forall A$
5. $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$
En general: $A - B \neq B - A$
6. Si: $A \subset B \Rightarrow A - B = \phi$
7. $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$
8. $(A - B) \cap B = \phi$
9. $B = (B - A) \cup (A \cap B)$
10. $A = (A - B) \cup (A \cap B)$
11. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
12. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
13. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
14. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
15. $(A - B) - C = (A - C) - B = A - (B \cup C)$

d. Complemento

- Si A y B son conjuntos tales que $A \subset B$, el complemento de A con respecto a B es la diferencia $B - A$.

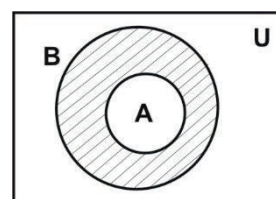
Se denota por: $A' = B - A = \overline{A} = C(A)$

Se lee: "A complemento"

Simbólicamente:

$$A' = B - A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\} \text{ ó}$$

$$x \in A' \Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A.$$



- El complemento de A con respecto de U es el conjunto formado por los elementos del conjunto universal U que no pertenecen a A, es decir:

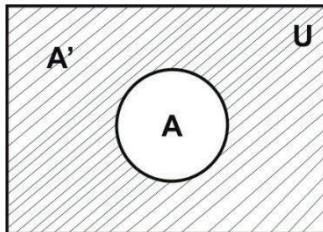
$$U - A$$

Simbólicamente:

$$A' = U - A = \{x/x \in U \wedge x \notin A\} \quad \text{ó}$$

$$A' = \{x/x \notin A\} \quad \text{ó}$$

$$x \in A' \Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A$$



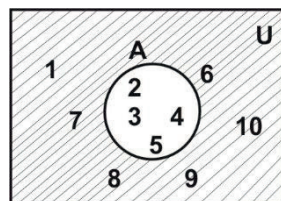
Ejemplo:

Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y los conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 5, 6, 7\}$

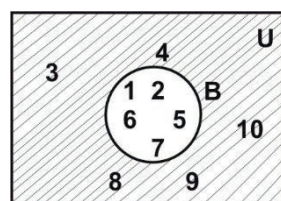
Hallar: A' , B' y $(A \cap B)'$.

Solución:

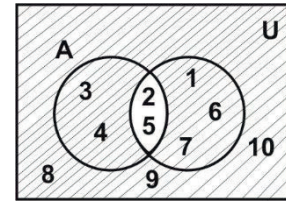
$$A' = U - A = \{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$$



$$B' = U - B = \{3, 4, 8, 9, 10\}$$



$$(A \cap B)' = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$$



Propiedades del Complemento:

Dados los conjuntos A y B en U se cumple:

- $A' \subset B$ y $B' \subset A$
- $A \cup A' = U$
- $A \cap A' = \phi$
- $U' = \phi$
- $\phi' = U$
- $(A')' = A$
- $A - B = A \cap B'$
- Si $A \subset B \rightarrow B' \subset A'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B' = \phi$

e. Diferencia Simétrica

La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o B pero no a ambos.

Se denota por: $A \Delta B$

Se lee: "A diferencia simétrica de B"

Simbólicamente:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \quad \text{ó}$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \quad \text{ó}$$

$$A \Delta B = \{x/(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \quad \text{ó}$$

$$A \Delta B = \{x/x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

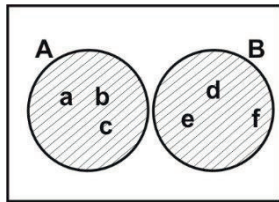
Ejemplo:

(1) Si: $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{d, e, f\}$

Hallar: $A \Delta B$

Solución:

$$A \Delta B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

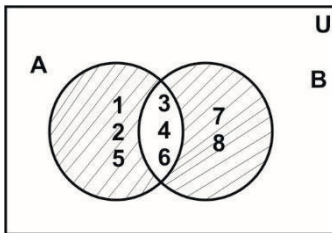


(2) Si: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y
 $B = \{3, 4, 6, 7, 8\}$

Hallar: $A \Delta B$

Solución:

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= \{1, 2, 5\} \cup \{7, 8\} \\ &= \{1, 2, 5, 7, 8\} \end{aligned}$$



Propiedades de la Diferencia Simétrica:

1. $A \Delta A = \phi$
2. $A \Delta \phi = A$ Elemento neutro
3. $A \Delta B = B \Delta A$ Conmutativa
4. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ Asociativa
5. $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$ Distributiva.
6. $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$
7. $A \Delta A' = U$ y $A \Delta U = A'$.

f. Producto Cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, es aquel conjunto cuyos elementos son pares ordenados donde las primeras

componentes pertenecen a A y las segundas componentes pertenecen a B.

Se denota por: $A \times B$

Se lee: "A por B".

Simbólicamente:

$$A \times B = \{(a;b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo:

(1) Si: $A = \{0, 4, 8\}$ y $B = \{m, n\}$

Entonces:

$$A \times B = \{(0;m), (0;n), (4;m), (4;n), (8;m), (8;n)\}$$

$$B \times A = \{(m;0), (m;4), (m;8), (n;0), (n;4), (n;8)\}$$

Recuerda: si $A \neq B$

$$\rightarrow A \times B \neq B \times A$$

CARDINAL DE UN CONJUNTO

El cardinal de un conjunto A es la cantidad o número de elementos diferentes de dicho conjunto.

Se denota por: $n(A)$ ó **card (A)**

Se lee: "cardinal de A" ó

"número de elementos de A"

Ejemplo:

(1) Si: $A = \{a, b, c, f\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$

$$\rightarrow n(A) = 4$$

$$\rightarrow n(B) = 3$$

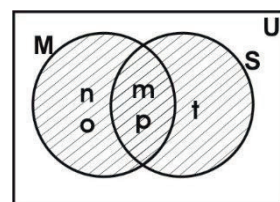
(2) Si $M = \{m, n, o, p\}$ y $S = \{m, p, t\}$

Hallar: $n(M \cup S)$

Solución:

$$M \cup S = \{m, n, o, p, t\}$$

$$\rightarrow n(M \cup S) = 5$$

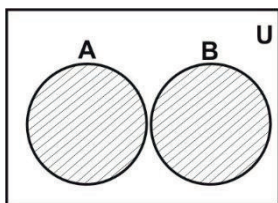


Propiedades del Cardinal de un Conjunto:

- (1) Si A y B son dos conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$).

Entonces:

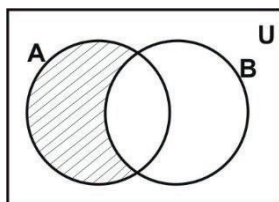
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$



- (2) Si A y B son dos conjuntos cualesquiera.

Entonces:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

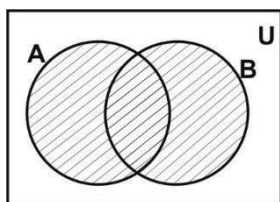


- (3) Si A y B son dos conjuntos tales que

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

Entonces:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

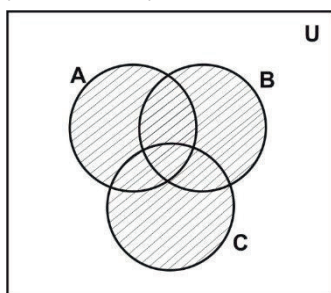


- (4) Si: A, B y C son conjuntos tales que:

$$A \cap B \cap C \neq \emptyset$$

Entonces:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

APLICANDO CONJUNTOS

1. Si $E = \{4, \{5\}, \{4,5\}, 6\}$

¿Cuántos son verdaderos?

$$4 \in A$$

$$5 \in A$$

$$\{4\} \in A$$

$$\{4,5\} \in A$$

$$\{6\} \subset A$$

$$\{5\} \in A$$

$$7 \notin A$$

$$\{\{5\}\} \subset A$$

$$\{\{5\}, 6\} \subset A$$

$$\emptyset \in A$$

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 8 e) 7

Resolución:

Los elementos del conjunto E son:

4, {5}, {4,5} y 6 en total son 4 elementos.

Debemos tener presente que si a un elemento le ponemos signos de colección (llaves) se ha formado un conjunto:

Ejemplo: {4} y {{5}} son conjuntos.

De los enunciados son falsos:

- ✓ $5 \in A$: debe ser $5 \notin A$ (porque no hay elemento 5).
- ✓ $7 \notin A$: debe ser $7 \notin A$ (la relación es de no pertenencia).
- ✓ $\emptyset \in A$: debe ser $\emptyset \subset A$ ($\emptyset$ es conjunto vacío)

Las restantes son verdaderas:

Respuesta: **E**

2. Dado el conjunto: $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

Determinarlo por comprensión:

- a) $B = \{(n+3)^2 / n \in \mathbb{N} \wedge n < 4\}$
- b) $B = \{(n+3)^2 / n \in \mathbb{Z} \wedge -2 < n < 2\}$
- c) $B = \{n^2 / n \in \mathbb{R} \wedge 0 < n < 6\}$
- d) $B = \{(n+3)^2 / n \in \mathbb{Z} \wedge -3 < n < 3\}$
- e) $B = \{(n+3)^2 / n \in \mathbb{Z} \wedge -2 < n < 3\}$

Resolución:

Analizando cada alternativa:

1° Hallamos los valores de n de cada intervalo.

2° Los reemplazamos en la propiedad.

Luego: En la alternativa D el intervalo n es -2, -1, 0, 1 y 2.

Reemplazando estos valores en $(n+3)^2$.

$$\checkmark (n+3)^2 = (-2+3)^2 = 1$$

$$\checkmark (n+3)^2 = (-1+3)^2 = 4$$

$$\checkmark (n+3)^2 = (0+3)^2 = 9$$

$$\checkmark (n+3)^2 = (1+3)^2 = 16$$

$$\checkmark (n+3)^2 = (2+3)^2 = 25$$

Respuesta: **D**

3. Determinar por extensión y dar como respuesta la suma de los elementos de P .

$$P = \left\{ \frac{n^2 - 16}{n - 4} / n \in \mathbb{Z}, 0 < n \leq 5 \right\} y$$

$U = \{x/x \text{ es un número entero}\}.$

Resolución

Del intervalo los valores de n son: 1, 2, 3,

4, 5 y reemplazando en:

$$\frac{n^2 - 16}{n - 4}$$

$$\frac{1^2 - 16}{1 - 4} = 5$$

$$\frac{2^2 - 16}{2 - 4} = 6$$

$$\frac{3^2 - 16}{3 - 4} = 7$$

$$\frac{4^2 - 16}{4 - 4} = \text{indeterminado}$$

$$\frac{5^2 - 16}{5 - 4} = 9$$

Luego: $P = \{5, 6, 7, 9\}$

Sumando los elementos:

$$5 + 6 + 7 + 9 = 27$$

4. Dado los conjuntos: $A = \{3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$ y $C = \{5, 6\}$. Hallar: a) $A \times (B \cup C)$
b) $(A \times B) \cup (A \times C)$

Resolución:

- a. Para hallar $A \times (B \cup C)$; primero hallamos $(B \cup C)$, veamos:

$$\rightarrow B \cup C = \{2, 4\} \cup \{5, 6\}$$

$$\rightarrow B \cup C = \{2, 4, 5, 6\}$$

Luego, calculamos: $A \times (B \cup C)$

$$A \times (B \cup C) = \{3, 4\} \times \{2, 4, 5, 6\}$$

$$= \{(3;2), (3;4), (3;5), (3;6), (4;2), (4;4), (4;5), (4;6)\}.$$

$$\therefore A \times (B \cup C) = \{(3;2), (3;4), (3;5), (3;6), (4;2), (4;4), (4;5), (4;6)\}.$$

- b. Para hallar $(A \times B) \cup (A \times C)$; primero hallamos $(A \times B)$ y $(A \times C)$, veamos:

$$A \times B = \{3, 4\} \times \{2, 4\}$$

$$\therefore A \times B = \{(3;2), (3;4), (4;2), (4;4)\}$$

$$A \times C = \{3, 4\} \times \{5, 6\}$$

$$\therefore A \times C = \{(3;5), (3;6), (4;5), (4;6)\}$$

Luego, calculamos: $(A \times B) \cup (A \times C)$

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(3;2), (3;4), (4;2), (4;4)\} \cup \{(3;5), (3;6), (4;5), (4;6)\}$$

$$\therefore (A \times B) \cup (A \times C) = \{(3;2), (3;4), (3;5), (3;6), (4;2), (4;4), (4;5), (4;6)\}.$$

5. Sabiendo que: $A = \{x \in \mathbb{N} / 3 \leq x < 6\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 2\}$. Hallar el $n(A \cap B)$.

Resolución:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / 3 \leq x < 6\}$$

Los **Números Naturales (N)** mayores o igual que 3, pero menores que 6 son: 3, 4, 5.

$$\therefore A = \{3, 4, 5\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 2\}.$$

Los **Números Enteros (Z)** mayores que -2, pero menores o igual que 2 son: -1, 0, 1, 2.

$$\therefore B = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$\text{Luego: } A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0$$

6. Si: $M = \{2x - 1 / -2 \leq x \leq 1; x \in \mathbb{Z}\}$ y

$$B = \{3x + 1 / -2 < x \leq 0; x \in \mathbb{Z}\}$$

Encontrar: $C(M \cap B)$

Resolución:

$$M = \{2x - 1 / -2 \leq x \leq 1; x \in \mathbb{Z}\}$$

Los valores que toma "x" son: -2, -1, 0, 1

Luego los valores de x los reemplazamos en la expresión: $2x - 1$, para saber cuáles son los elementos del conjunto **M**, veamos:

$$\text{Para: } x = -2 \Rightarrow 2x - 1 = 2(-2) - 1 = -5$$

$$\text{Para: } x = -1 \Rightarrow 2x - 1 = 2(-1) - 1 = -3$$

$$\text{Para: } x = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 2(0) - 1 = -1$$

$$\text{Para: } x = 1 \Rightarrow 2x - 1 = 2(1) - 1 = 1$$

$$\therefore M = \{-5, -3, -1, 1\}$$

$$B = \{3x + 1 / -2 < x \leq 0; x \in \mathbb{Z}\}$$

Los valores que toma "x" son: -1, 0.

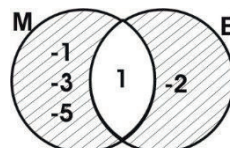
Luego los valores de x los reemplazamos en la expresión: $3x + 1$, para saber cuáles son los elementos del conjunto B, veamos:

$$\text{Para: } x = -1 \Rightarrow 3x + 1 = 3(-1) + 1 = -2$$

$$\text{Para: } x = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 3(0) + 1 = 1$$

$$\therefore B = \{-2, 1\}$$

$$\text{Luego: } M \cap B = \{1\}.$$



$$\therefore C(M \cap B) = \{-5, -3, -2, -1\}$$

7. Indicar el conjunto por comprensión:

$$M = \{10, 13, 16, 19, 22\}$$

Resolución:

$$\left. \begin{array}{c} 10, 13, 16, 19, 22 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \swarrow \quad \downarrow \quad \swarrow \\ 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} t_n = an + b \\ \quad \downarrow \quad \downarrow \\ t_n = 3n + 7 \end{array}$$

$$\therefore M = \{3n + 7 / n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 5\}$$

8. Dados:

$$A = \{x / x^2 - 13x + 40 = 0\}$$

$$B = \{2x + 1 / x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x < 6\}$$

$$C = \{x^2 - 1 / x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\}$$

¿Cuántos subconjuntos tiene F?

$$\text{Si } F = (C - B) \cup A$$

Resolución:

Por extensión:

$$A = \{5, 8\}$$

$$B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$C = \{-1, 0, 3, 8, 15\}$$

$$\text{Luego: } C - B = \{-1, 0, 8, 15\}$$

$$\text{Pero: } F = (C - B) \cup A$$

$$F = \{-1, 0, 5, 8, 15\}$$

F tiene 5 elementos.

Calculamos los subconjuntos de F:

$$2^5 = 32 \text{ subconjuntos}$$

∴ F tiene 32 subconjuntos.

9. La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B se define:

$$A \Delta B = \{x/x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

Si:

$$U = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 10\}$$

$$A = \{x/x \in U \wedge x \text{ es divisor de } 12\}$$

$$B = \{x/x \in U \wedge x \text{ es impar}\}$$

Hallar: $n(A \Delta B)^c$:

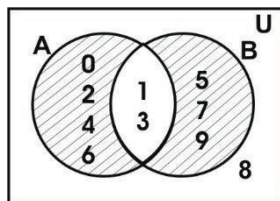
Resolución:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$



$$A \Delta B = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$$

$$(A \Delta B)^c = \{1, 3, 8\}$$

$$n(A \Delta B)^c = 3 \text{ elementos}$$

10. En una encuesta de canales A y B:

65% no ve el canal A.

70% no ve el canal B.

45% ve A o B pero no ambos.

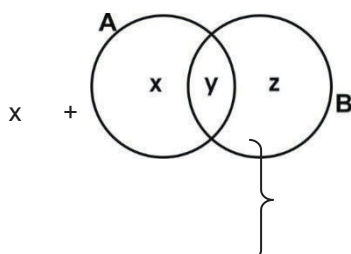
¿Qué tanto por ciento de la población ve los dos canales?.

Resolución:

Ve el canal A : 35%

Ve el canal B : 30%

A ó B : 45%



$$\begin{array}{rcl} y & + & z = 30 \\ x & + & z = 45 \\ \hline 2(x + y + z) & = & 110 \end{array}$$

$$\Rightarrow x + y + z = 55$$

$$y + 45 = 55$$

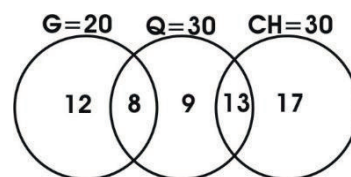
$$\boxed{y = 10}$$

∴ El 10% de la población ve los dos canales

11. En un grupo de personas se sabe que: 20 hablan griego, 30 hablan quechua, 30 hablan chino, 8 griego y quechua, 13 quechua y chino y de los que hablan griego ninguno habla chino. ¿Cuántas personas forman el grupo?.

Resolución:

Graficando con los datos:



Sumando: $12 + 8 + 9 + 13 + 17$

Total: **59 personas.**

12. De 55 alumnos que estudian en la Universidad se obtuvo la siguiente información:

✓ 32 alumnos estudian el curso A.

✓ 22 alumnos estudian el curso B.

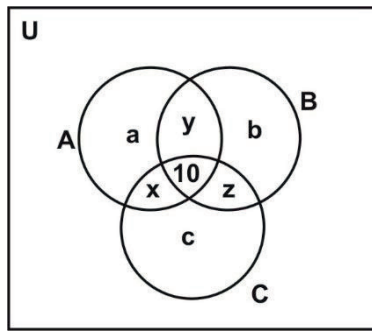
✓ 45 alumnos estudian el curso C.

✓ 10 alumnos estudian los tres cursos.

¿Cuántos alumnos estudian simultáneamente dos cursos?

Resolución:

Sean x, y, z el número de alumnos que estudian dos cursos. La distribución en el diagrama de Ven Euler muestra que:



$$n(A) = a + x + y + 10 = 32$$

$$\Rightarrow a + x + y = 22$$

$$n(B) = b + y + z + 10 = 22$$

$$\Rightarrow b + y + z = 12$$

$$n(C) = c + x + z + 10 = 45$$

$$\Rightarrow c + x + z = 35$$

Sumando estas tres ecuaciones se tiene:

$$a+b+c+x+y+z+(x+y+z) = 69 \dots (I)$$

$$\text{Pero: } a+b+c+x+y+z+10 = 55$$

$$\Rightarrow a+b+c+x+y+z = 45 \dots (II)$$

Luego, reemplazando (II) en (I) :

$$45 + (x + y + z) = 69$$

$$\Rightarrow x + y + z = 24$$

$\therefore$

24 alumnos estudian
simultáneamente dos cursos.

PRÁCTICA

1. Sea el conjunto:

$$A = \{\emptyset \{a\}, b, \{a, b\}\}$$

¿Cuál de las afirmaciones es verdadera o falsa? ¿Porqué?

- a) $\{a\} \in A$
- b) $\{a\} \subset A$
- c) $b \subset A$
- d) $\{b\} \in A$
- e) $\{b\} \subset A$
- f) $b \in A$
- g) $\emptyset \subset A$
- h) $\emptyset \in A$
- i) $\{\emptyset\} \subset A$
- j) $\{\{a\}, b\} = \{a, b\}$

2. Dados los siguientes conjuntos determinados por comprensión, determinarlos por extensión e indicar el cardinal de cada conjunto.

$$A = \{x/x \text{ es un número natural par} \wedge x < 8\}$$

$$B = \{x/x \text{ es un número natural impar} \wedge x < 10\}$$

$$C = \{x/x \text{ es nota musical}\}$$

$$D = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -20 < x < -10\}$$

$$E = \{y/y \in \mathbb{Z}, y = x+1 \wedge 3 < x < 9\}$$

$$F = \{n^2 - 2n / n \in \mathbb{Z}, 1 < n \leq 6\}$$

$$G = \left\{ \frac{n^2 - 9}{n - 3} / n \in \mathbb{N}, 3 < n \leq 7 \right\}$$

3. Determinar por comprensión los siguientes conjuntos:

$$A = \{-2, 1, 4, 7, 10\}$$

$$E = \{\text{yo, tú, el, nosotros, vosotros, ellos}\}.$$

$$B = \{-7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$F = \{o, r, b, i, l\}$$

$$C = \left\{ 1, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{11} \right\}$$

$$G = \{H_2O\}$$

$$D = \left\{ -1, \frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}, 5 \right\}$$

4. Indicar si los siguientes conjuntos son vacíos, unitarios, finitos o infinitos.

$$A = \{x/x \text{ es número natural comprendido entre 3 y 5}\}$$

$$B = \{x/x \text{ es número natural comprendido entre 3 y 4}\}$$

$$C = \{x/x \text{ es un triángulo}\}$$

$$D = \{x/x \text{ es un triángulo de 4 lados}\}$$

$$E = \{\emptyset\}$$

$F = \{x/x \text{ es una arenilla del mar}\}$

$G = \{1, 2, 3, 4, \dots, 111111\}$

$M = \{2, 4, 6, 8, 10, 11, \dots\}$

5. Hallar el conjunto potencia

a) $S = \{3, \{1,4\}\}$

b) $M = \{3, 5, 7\}$

c) $N = \{\{2\}, \{3,2\}\}$

d) $T = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

6. Sean:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$C = \{3, 4, 5, 6\}$

$U = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

Hallar:

a) $A \cup C$

b) $B \cap C$

c) $A - C$

d) $C - B$

e) A'

f) B^c

g) $(A \cup C)'$

h) $A' \cap B'$

i) $A \Delta C$

j) $(A - C) \Delta (B - C)$

k) $(B \Delta C) - (B \Delta A)$

l) $C (B \cap C)$

7. Dado el conjunto $U = \{3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$, definir por extensión los siguientes conjuntos:

$A = \{x/x \in U \text{ y } x \text{ es par}\}.$

$B = \{x/x \in U \text{ y } x \text{ es divisible por } 3\}.$

$C = \{x/x \in U \text{ y } x \text{ es mayor que } 12\}.$

$D = \{x/x \in U, x \text{ es divisible por } 3 \text{ y por } 5\}.$

$E = \{x/x \in U, x \text{ es par y divisible por } 3\}.$

$F = \{x/x \in U, x \text{ es divisible por } 3 \text{ o por } 5\}.$

$G = \{x/x \in U, x \text{ es mayor que } 12 \text{ y es divisible por } 7\}$

$H = \{x/x \in U, x \text{ es mayor que } 12 \text{ y es divisible por } 3 \text{ y por } 8\}.$

$I = \{x/x \in U, x \text{ es menor que } 10 \text{ y es divisible por } 2 \text{ y por } 3\}.$

$J = \{x/x \in U, x \text{ es menor que } 10 \text{ y es divisible por } 2 \text{ o por } 3\}.$

Además completar la siguiente tabla utilizando $\subset$ ó $\not\subset$ según el caso:

	A	B	C	F	U
B					
D					
E	$\subset$	$\subset$	$\not\subset$	$\subset$	$\subset$
G					
I					
J					

8. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{4, 5\}$ y $D = \{1, 5\}$, determinar cada uno de los siguientes conjuntos:

- a) $A \cup B$
- b) $A \cap B$
- c) $C \cap D$
- d) $B \cap D$
- e) $B \cup D$
- f) $(D \cup C) \cup B$
- g) $(A \cup B) \cup (C \cup D)$
- h) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$
- i) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
- j) $A \cap (C \cup D)$

9. Encontrar $A - B$, $B - A$, $(A - B) \cup (B - A)$ si:

$$A = \{x/x \text{ natural y } 4 < x < 18\}$$

$$B = \{y/y \text{ natural y } 0 \leq y \leq 27\}$$

10. De un grupo de 63 postulantes:

- ✓ 29 se presentan a Arquitectura
 - ✓ 35 a Informática
 - ✓ 33 a Derecho
 - ✓ 8 se presentan a las tres opciones
- ¿Cuántos se presentaron a dos opciones?.

11. De 180 alumnos de una Academia Pre-Universitaria que gustan de los cursos “Razonamiento Matemático”, “Álgebra”, ó “Aritmética” se supo que:

- ✓ 34 gustan de “Razonamiento Matemático” pero no de “Álgebra”.
- ✓ 28 gustan de “Razonamiento Matemático” pero no de “Aritmética”.
- ✓ 16 gustan de “Álgebra” pero no de “Razonamiento Matemático”.
- ✓ 24 gustan de “Álgebra” pero no de Aritmética.
- ✓ 48 gustan de “Aritmética” pero no de “Razonamiento Matemático”.
- ✓ 18 gustan de “Aritmética” pero no de “Álgebra”.

¿A cuántos jóvenes le gustan los 3 cursos mencionados?

12. En un grupo de 70 personas, 32 hablan inglés, 26 español, 37 francés, 6 inglés y español, 9 español y francés; y 12 inglés y francés. ¿Cuántos hablan los 3 idiomas?.

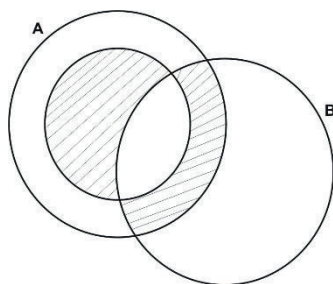
13. Sean A y B dos conjuntos donde $n(A) = 38$, $n(B) = 25$ y el universo correspondiente tiene 180 elementos, además $B \subset A$. Hallar $n(A \cap B)$.

14. De 72 jóvenes que postularon a las Universidades: UNI, UNMSM y/o UNFV se sabe que:

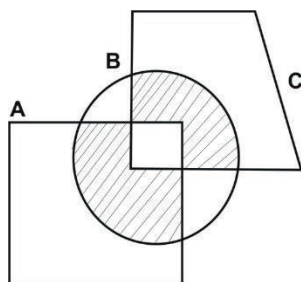
40 postularon a la UNI, 25 a la UNFV, 28 a la UNMSM y 1 postuló a las 3 universidades.

¿Cuántos postularon a sólo 2 de estas universidades?

15. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ y $C = \{4, 5\}$. Entonces: ¿Cuáles son los elementos que deben estar achurados en el diagrama?

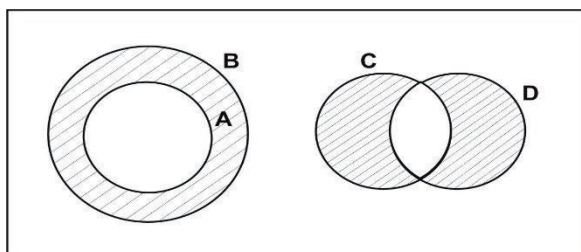


16. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa a la parte sombreada?



- a) $[(A - C) \cap B] \cap [(C - A) \cap B]$
- b) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
- c) $(A - C) \cup (C - A)$
- d) $(A \triangle C) \cap B$
- e) $B - (A \cap C)$

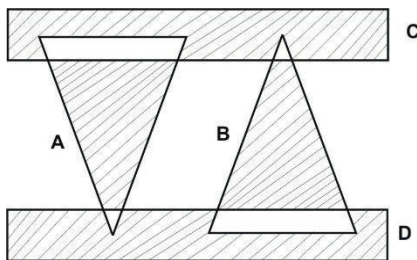
17. La región sombreada representa a:



- a) $(A - B) \cap (C \cup D)$
- b) $(B - A) \cup [(C \cup D) - (C \cap D)]$
- c) a y b correctos.
- d) $(B - A) \cup (C - D) \cup (D - C)$
- e) b y d correctos

18. La región sombreada está representada por:

- a) $(A \cup B) - (C \cup D)$
- b) $(A \cup B) \cup (C - D)^c$
- c) $(A \cup B) \Delta (C \cup D)$
- d) $(A \cup B) \cup (C \cap D)$
- e) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$



19. Sea A el conjunto cuyo único elemento es "a". Hallar el conjunto potencia de A.

20. Si:

$A = \{x/x \text{ es el múltiplo de } 7 \text{ menor de } 150 \text{ cuyas cifras suman no más de } 15\}.$

$B = \{x/x \text{ es el múltiplo de } 35 \text{ menor de } 400 \text{ cuyas cifras suman menos de } 8\}$

Hallar: $n(A - B)$

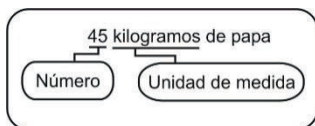
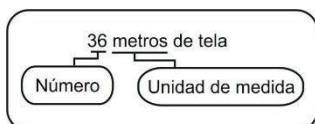
UNIDAD N° 02

SISTEMA DE NÚMEROS REALES

I. INTRODUCCIÓN

Desde la más remota antigüedad se presentó al hombre la necesidad de manejar los números, representados mediante signos fáciles de recordar y nombrar a situaciones tales como:

- ✓ Para indicar el número de objeto de un conjunto (contar, ordenar).
- ✓ Como resultado de una medida. Toda medida de una cantidad viene dada por un número y la unidad empleada por ejemplo).



Ya desde un principio los conceptos de medir (geometría) y de contar (aritmética) han sido fuente de desarrollo comunes y raíces sobre las que ha crecido toda la matemática. Todas estas situaciones y necesidades han permitido consolidar el sistema de números empezando desde los números naturales hasta los complejos.

Antes de dar una definición de los números Reales, debemos comentar acerca de los números Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales.

Las operaciones aritméticas de suma, diferencia, producto, división y radicación

han ido definiéndose paulatinamente según se han formulado los nuevos postulados y las nuevas teorías rigurosas.

1.1. El Conjunto de los Números Naturales

Se llaman números naturales a los que se usan para contar $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ y su representación en la recta es la siguiente:



Operaciones con Números Naturales.

En el conjunto de los números naturales sólo se puede definir las operaciones de adición, multiplicación y potenciación.

- ✓ **La Adición.**- Es una operación cerrada en N . Esto quiere decir que la suma de dos números naturales es un número natural.

Ejemplos:

- a) $3 + 2 = 5$; si $3 \in N$; $2 \in N \Rightarrow 5 \in N$
- b) $9 + 8 = 17$; si $9 \in N$; $8 \in N \Rightarrow 17 \in N$

- ✓ **La Multiplicación.**- Es una operación cerrada en N ; pues quiere decir que el producto de dos números naturales es un número natural.

Ejemplos:

- a) $9 \times 2 = 18$; si $9 \in N$; $2 \in N \Rightarrow 18 \in N$
- b) $5 \times 6 = 30$; si $5 \in N$; $6 \in N \Rightarrow 30 \in N$

- ✓ **La Potenciación.**- Es una operación en N ; pues quiere decir que: un número natural, elevado a un exponente resulta otro número natural.

Ejemplos:

- a) $(3)^2 = 9$; si: $3 \in \mathbb{N}$; $2 \in \mathbb{N}$; $\Rightarrow 9 \in \mathbb{N}$
b) $(3)^3 = 27$; si: $4 \in \mathbb{N}$; $3 \in \mathbb{N}$; $\Rightarrow 64 \in \mathbb{N}$

- ✓ **La Sustracción, la división y la Radicación.**- No son operaciones cerradas en $\mathbb{N}$, pues quiere decir que “la diferencia de dos números naturales no siempre es un número natural”. “El cociente de dos números naturales, no siempre es un número natural”. “La raíz de un número natural, no siempre es un número natural.”

Ejemplos:

- a. $3 - 5 = -2$; si: $3 \in \mathbb{N}$; $5 \in \mathbb{N} \Rightarrow -2 \notin \mathbb{N}$
b. $9 : 4 = 2,25$; si $9 \in \mathbb{N}$; $4 \in \mathbb{N} \Rightarrow 2,25 \notin \mathbb{N}$
c. $\sqrt{3} = \sqrt[2]{3} = 1,7320508\dots$ si: $2 \in \mathbb{N}$; $3 \in \mathbb{N} \Rightarrow 1,7320508 \notin \mathbb{N}$.

✓ Propiedades de $\mathbb{N}$

- 1) El conjunto de números naturales es infinito.
- 2) Tiene primer elemento. **Cero**. No tiene último elemento.
- 3) Todo número natural tiene un **sucesor**. Un número natural y su sucesor se dicen **consecutivos**.

Ejemplo: 5 es sucesor de 4 $\Rightarrow 4$ y 5 son consecutivos.

- 4) Todo número, excepto cero, tiene un **antecesor**.
- 5) Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales. Por eso decimos que el conjunto de números naturales es **discreto**.

Por ejemplo:

- Entre 2 y 3 existe 0 números naturales.
- Entre 2 y 4 existe 1 números naturales.

- Entre 2 y 5 existe 2 números naturales.
- Entre 4 y 13 existe 8 números naturales.

1.2. El Conjunto de los Números Enteros

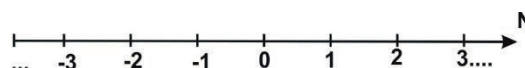
Surge como respuesta al intentar dar medidas negativas y es una ampliación de los números naturales que hacen posible la sustracción en todos los casos.

Los números enteros, salvo el cero se representan mediante los números naturales precedidos de un signo.

+ Entero Positivo - Entero Negativo

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

Su representación en la recta es:



Operaciones con Números Enteros

- ✓ **La Adición.**- Es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$ pues quiere decir: “la adición de dos números enteros es un número entero”.

Ejemplos:

- a. $9 + 4 = 13$; si: $9 \in \mathbb{Z}$; $4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 13 \in \mathbb{Z}$
b. $(-3) + (-8) = -11$; si: $-3 \in \mathbb{Z}$; $-8 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -11 \in \mathbb{Z}$.

- ✓ **Sustracción.**- Es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$, pues quiere decir: “la diferencia de dos números enteros es un número entero”.

Ejemplos:

- a. $7 - 4 = 3$; si: $7 \in \mathbb{Z}$; $4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 \in \mathbb{Z}$
b. $(-3) - (1) = -4$; si: $-3 \in \mathbb{Z}$; $1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -4 \in \mathbb{Z}$.
c. $(-5) - (-6) = 1$; si: $-5 \in \mathbb{Z}$; $-6 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 \in \mathbb{Z}$.

- ✓ **La Multiplicación.**- Es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$ pues quiere decir “el producto de dos números enteros es un número entero”.

Ejemplos:

- a. $2 \times 7 = 14$; si: $2 \in \mathbb{Z}$; $7 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 14 \in \mathbb{Z}$
- b. $(-3) \times (-4) = 12$; si: $-3 \in \mathbb{Z}$; $-4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 12 \in \mathbb{Z}$

- ✓ **La Potenciación.-** No es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$, pues quiere decir: “Un número entero, elevado a un exponente entero, no siempre es un número entero”.

Ejemplos:

- a. $(2)^{-3} = \frac{1}{(2)^3} = \frac{1}{8}$; si: $-3 \in \mathbb{Z}$; $2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{8} \notin \mathbb{Z}$.
- b. $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$ si: $-3 \in \mathbb{Z}$; $-2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{9} \notin \mathbb{Z}$.

- ✓ **La División.-** No es cerrada en $\mathbb{Z}$, pues quiere decir: “Que el cociente de dos números enteros, no siempre es un número entero”

Ejemplos:

- a. $4:5 = 0,8$; si: $4 \in \mathbb{Z}$; $5 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0,8 \notin \mathbb{Z}$
- b. $3:4 = 0,75$; si: $3 \in \mathbb{Z}$; $4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0,75 \notin \mathbb{Z}$

- ✓ **La Radicación.-** No es cerrada en $\mathbb{Z}$; pues decir: “Que la raíz de un número entero no siempre es un número entero”.

Ejemplos:

- a. $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} = 1,4142135 \dots$; si: $2 \in \mathbb{Z}$; $3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1,4142135 \notin \mathbb{Z}$.
- b. $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5} = 2,2360679 \dots$; si: $2 \in \mathbb{Z}$; $5 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2,2360679 \notin \mathbb{Z}$.

- ✓ **Propiedades de $\mathbb{Z}$**

1. El conjunto de números enteros es infinito.
2. No tiene primero ni último elemento.

3. Todo número entero tiene **sucesor**.
Un número entero y su sucesor se dicen **consecutivos**.

Ejemplo: -2 es el sucesor de -3 $\Rightarrow$ -2 y -3 son consecutivos.

4. Todo número enteros tiene un antecesor.

Ejemplo:

- 1 es el antecesor de cero.
- 6 es el antecesor de -5.

5. Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros. Por eso decimos que el conjunto de números enteros es **discreto**.

Ejemplos:

- a. Entre -11 y -4 hay 6 números enteros ($-4 > -11$).
- b. Entre 9 y 21 hay 11 números enteros ($21 > 9$).

1.3. El Conjunto de los Números Racionales

Hasta ahora, podemos resumir que el conjunto de números enteros ($\mathbb{Z}$) está provisto de las operaciones internas de adición, diferencia y multiplicación más no de división.

En el ejemplo:

$$\frac{8}{2} = 4 \in \mathbb{Z}, \text{ pero } \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$$

Notamos una gran diferencia en los resultados que se obtienen al dividir 8 entre 2 y 2 entre 8.

Mientras que la división del número entero 8, entre el número entero 2, da como resultado el número entero 4; en cambio al dividir el número entero 2 entre el número entero 8, da como resultado un número de la forma $\frac{1}{4}$ que no es entero.

Entonces ¿Qué clase de número es $\frac{1}{4}$?

Es aquí donde se introduce un nuevo conjunto numérico llamado **CONJUNTO DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS o CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES** y se denota por Q.

La definición formal de números racionales (Q) es como sigue:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z \wedge b \in Z, \text{ con } b \neq 0 \right\}$$

El conjunto Q (números racionales) está provisto de las operaciones de adición, diferencia, multiplicación y división, pero no está provisto de la operación de radicación.

Por ejemplo, el resultado de extraer la raíz cuadrada de 2 ($\sqrt{2}$) no es número racional. Dicho de otra manera, no existen dos números enteros a y b, tal que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ con } b \neq 0 \text{ y que la fracción } \frac{a}{b}$$

sea "irreducible".

Igualmente la solución de la ecuación:

$x^2 - 3 = 0$ no es precisamente un número racional. Estos particulares problemas nos ayudan a intuir que es preciso definir otro conjunto numérico.

1.4. Conjunto de los Números Irracionales (I)

Se define un número irracional como un número de infinitas cifras decimales, no periódicas, y que, en consecuencia no pueden representarse mediante la razón de dos números enteros.

Diremos que "x" es un número irracional, cuando no existen números enteros a y b,

tal que $x = \frac{a}{b}$, con $b \neq 0$.

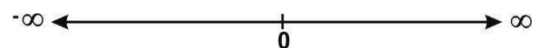
De todo lo dicho, podemos enumerar 3 consecuencias:

- $N \subset Z \subset Q$
- $Q \cap I = \emptyset$
- $Q \cup I = R$, R conjunto de los números reales.

II. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

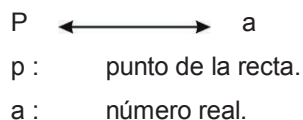
El conjunto de los números reales se obtiene reuniendo el conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales.

Otra manera intuitiva de concebir el conjunto de los números reales es representándolo por una línea RECTA, que llamaremos RECTA REAL.



Cada punto de la RECTA representará un número real, del cero a la derecha quedarán definido los números reales positivos y del cero a la izquierda los números reales negativos.

Geométricamente queda establecida una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta con los números reales. Es decir: "a cada punto de la recta corresponde un número real y recíprocamente, a cada número real corresponde un punto de la recta". Esta característica nos indica que el conjunto R es completo.



La doble flecha indica “correspondencia recíproca”.

Propiedad de los Números Reales

- El conjunto de los números reales es infinito, esto significa que no tiene primero ni último elemento.
- El conjunto de los números reales es denso. Esto significa que entre dos números reales siempre hay otro número real.

Propiedades de la Igualdad

Para a, b, c números reales, $a = b$ es una igualdad y cumple las propiedades siguientes: (tabla adjunta).

NOMBRE	NOTACIÓN SIMBÓLICA
Reflexiva	$a = a$
Simétrica	Si $a = b$, entonces $b = a$.
Transitiva	Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.
Sustitutiva	Si $a = b$, entonces a puede ser reemplazado por b en cualquier proposición matemática y viceversa
Unicidad	Adición: si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ Multiplicación: si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$

Operaciones con Números Reales

En las operaciones con números reales donde intervienen decimales periódicos mixtos, puros o irracionales, es necesario primero realizar una aproximación y después operar.

Las aproximaciones se pueden realizar hasta el orden de las décimas, centésimas, milésimas, diez milésimas, etc. Si es que se quieren contar con 1; 2, 3, etc. Decimales respectivamente.

Para aproximar un número decimal hasta n cifras decimales, se observa la cifra que ocupa el lugar $(n+1)$ después de la coma decimal y:

- ✓ Si esta cifra observada es 5 ó mayor que 5, entonces la cifra anterior (la de orden n) aumenta en una unidad.
- ✓ Si esta cifra observada es menor que 5, entonces la cifra anterior (la de orden n) se escribe igual.

Ejemplo:

Aproximar el irracional $\sqrt{7} = 2,6457513$ hasta el orden de las centésimas.

$$\sqrt{7} = 2,6457513$$

Solución:

Aproximando hasta las centésimas

$$\sqrt{7} = 2,6457513 = 2,65$$

2.1. Adición de los Números Reales

La adición es una operación interna (cerrada o de clausura) definida en R , tal que, a cada par (a,b) de números reales corresponde el único número real $a+b$, llamado la suma de a y b .

Notación:

$$+ : R \times R \longrightarrow R$$

$$(a, b) \longmapsto R$$

Ejemplo:

Hallar la suma de $\sqrt{5}$ y π con aproximación al centésimo.

Solución:

- Primero aproximamos cada decimal hasta el orden de las centésimas.

$$\sqrt{5} = 2,23606..... = 2,24$$

$$\pi = 3,14159..... = 3,14$$

- Luego hallamos la suma

= 5,38 Respuesta

$$\begin{aligned} \cdot : R \times R &\longrightarrow R \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow cb = a, b \neq 0$$

Propiedades

M₁. Si $(a \in R \wedge b \in R) \Rightarrow (a + b) \in R$
(cerradura o clausura).

M₂. $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in R$
(conmutativa)

M₃. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (bc), \forall a, b, c, \in R$
(asociativa).

M₄. $\exists ! 1 \in R / 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a$
(Existencia y unicidad de la identidad multiplicativa).

“La identidad de la multiplicación es el 1”

M₅. $\forall a \neq 0, \exists ! a^{-1} = \frac{1}{a} / a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

(Existencia y unicidad del inverso).

“El opuesto de a es $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ”

Propiedad Distributiva de la Multiplicación Respecto a la Adición

$$a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in R.$$

2.4. El Cociente de Dos Números Reales

En una fábrica embotelladora de jugos de fruta se utilizan botellas de dos litros para su llenado, si en una semana se producirán 2,600 litros ¿Cuántas botellas de dos litros se utilizarán?

Solución:

Si los 2600 litros se distribuyen en botellas de 2 litros tenemos: $2600 \div 2 = 1300$ botellas.

Definición

Dados dos números reales a y b , con $b \neq 0$, llamamos **COCIENTE** de a y b (en este orden) al único número real “ c ”, tal que:

$$\begin{aligned} c &= \frac{a}{b} \\ c &= ab^{-1} \end{aligned}$$

“Llamamos **DIVISION** a la operación que a cada par de números reales (a, b) con $b \neq 0$, le hace corresponder su cociente ab^{-1} ”.

2.5. Potencia de un Número Real

Si consideramos una célula “como primera”, observamos que se reproduce de la siguiente manera:

Una célula
Primera división $\longrightarrow$ Dos células
Segunda división $\longrightarrow$ Cuatro células
Tercera división $\longrightarrow$ Ocho células
Así sucesivamente.....

Como podemos observar, partimos de 1 célula. Está origina 2 células, éstas 2 células originan, cada una, 2 más. Éstas 4 originan, cada una, 2 más, etc.

De: 1 célula
Primera división $\longrightarrow$ 2 células
Segunda división $\longrightarrow$ 2.2. células
Tercera división $\longrightarrow$ 2.2.2. células
Cuarta división $\longrightarrow$ 2.2.2.2. células
Así sucesivamente.....

Si nos propusiéramos escribir el producto resultante en la división nº 56, por ejemplo, tendríamos que escribir:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \longrightarrow 56 \text{ veces}$$

Creo que sería aburrido y engorroso. Para facilitar este tipo de escritura, se creó la potenciación que no es ni más ni menos que la forma abreviada de la multiplicación.

Observa:

2.2.2. $\longrightarrow$ se abrevia 2^3
(3 veces)

2.2.2.2.2. $\longrightarrow$ se abrevia 2^5
(5 veces)

2.2.2.2...2 se abrevia 2^{56}

(56 veces)

Si generalizamos, siendo a un número natural cualquiera, tenemos:

$$\underbrace{a.a.a.a.....a}_{\text{base}} = a^n \quad \leftarrow \text{exponente}$$

Definición

Si $n \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces b^n , llamada n -ésima potencia de b , representa el producto de n factores iguales a b , esto es:

$$b^n = \underbrace{b.b.b.....b}_n$$

En donde, el exponente n indica las veces que se debe repetir la base b como factor.

Propiedades

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$ entonces:

a. $0^n = 0$ donde : $n > 0$

b. $b^1 = b$

c. $b^0 = 1$

d. $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$

e. $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$, donde $b \neq 0$

f. $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$, donde $b \neq 0$

g. $(a.b)^n = a^n.b^n$

h. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, donde $b \neq 0$

i. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

j. $(b^m)^n = b^{m.n}$

k. $[(b^m)^n]^q = b^{m.n.q}$

l. $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^q = \frac{a^{m.q}}{b^{n.q}}$, $b \neq 0$

m. $a^m = a^n \Rightarrow m = n$

Ejemplo:

Hallar el valor de:

$$E = \frac{2^{n+m} \cdot 2^{n-m} \cdot 2^{n+3}}{2^{(2n+1)+(n-2)}} = \frac{2^{3n+3}}{2^{3n-1}}$$

$$= 2^{(3n+3)-(3n-1)} = 2^4 = 16$$

2.6. Radicación de Números Reales

Dos amigos disfrutaban resolviendo problemas y enigmas matemáticas, uno de los problemas que encuentran es: ¿cuál es el número que elevado al cuadrado da por resultado 9?

Escriban esta ecuación: $x^2 = 9$ y la desarrollan así: **$x, x = 9$**

Para llegar a x , que es la base de la potenciación hay que seguir el recorrido contrario.

Se sabe que: $9 = (3)(3) \rightarrow 3^2 = 9$

Pero también $9 = (-3)(-3) \rightarrow (-3)^2 = 9$

De modo que las bases 3 y -3 son llamadas raíces cuadradas de 9.

Radicación.- la raíz n -ésima de a , que se denota por $\sqrt[n]{a}$ es el número r tal que $r^n = a$.

a. Es decir: $\sqrt[n]{a} = r \rightarrow r^n = a$

Donde:

$\sqrt{\quad}$	es el operador radical
n	es el índice del radical
a	es la cantidad subradical o radicando.
r	es la raíz

Ejemplo.

$\sqrt[3]{125} = 5$ porque $(5)^3 = 125$

$\sqrt{0,09} = 0,3$ porque $(0,3)^2 = 0,09$

Propiedades

Para $a \geq 0$, $b \geq 0$, y $n, m \in \mathbb{N}$, se cumplen:

1. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$
2. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
3. $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
5. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, siempre que $b > 0$
6. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
7. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
8. $\sqrt[n]{a^n} = a$
9. $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^k}}$
10. $\sqrt[m]{x^a} \sqrt[n]{x^b} \sqrt[p]{x^c} = x^{\frac{(an+b)p+c}{mnp}}$

Ejemplos:

1. $\sqrt{16x100} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = 4 \cdot 10 = 40$
2. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2 \cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7}$
3. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}} = \sqrt[3 \cdot 2 \cdot 5]{x} = \sqrt[30]{x}$
4. $9^{\frac{5}{2}} = \sqrt{9^5} = (\sqrt{9})^5 = 3^5 = 243$
5. $\sqrt[4]{3^2} = \sqrt{a}$
6. $\sqrt[8]{7^8} = 7$

EJERCICIOS DE R

1. Indicar cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

- a. ☐ Todo número racional es número irracional. **Rpta. F.**
- b. ☐ Todo número irracional es un número real. **Rpta. V.**
- c. ☐ Todo número real es un número racional. **Rpta. F.**
- d. ☐ $\sqrt[3]{343}$ es un número irracional. **Rpta. F.**
- e. ☐ $\sqrt{99}$ es un número irracional. **Rpta. V.**
- f. ☐ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ es un número irracional. **Rpta. F.**
- g. ☐ $\sqrt{2} + (-\sqrt{2})$ es un número racional. **Rpta. V.**
- h. ☐ El producto de dos números irracionales siempre es un número irracional. **Rpta. F.**
- i. ☐ A todo punto sobre la recta le corresponde un número irracional. **Rpta. F.**
- j. ☐ A todo número irracional le corresponde un punto, sobre la recta. **Rpta. V.**
- k. ☐ Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces $-a \in \mathbb{R}^-$. **Rpta. V.**
- l. ☐ El conjunto $\mathbb{R}$ completa la recta numérica. **Rpta. V.**

2.7. Relación de Orden en R

Las axiomas de orden, es el grupo de proposiciones que nos permite establecer una ORDENACIÓN entre los números reales. Según esta ordenación se puede comparar y decidir si un número real es mayor o menor que otro.

Axiomas de Orden

a. Ley de Tricotomía

Para dos números $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ uno y sólo uno de los siguientes enunciados es verdadero.

$$a < b, a = b, a > b$$

b. Ley Transitiva

$$\text{Si } a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$

c. Leyes de Monotonía

- Si $a < b \rightarrow \forall c \in \mathbb{R}, a+c < b+c$
- Si $a < b$ y $c > 0 \rightarrow ab < bc$
- Si $a < b$ y $c < 0 \rightarrow ab > bc$

d. Existe un conjunto de $\mathbb{R}^+$ tal que $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ llamado conjunto de números Reales positivos en donde se cumple:

- Si $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{R}^+$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$.
- $\forall a \neq 0: a \in \mathbb{R}^+ \vee a \in \mathbb{R}^-$, pero no ambos.
- $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Los axiomas que acabamos de enunciar, nos permitirán definir los símbolos:

$<$	:	menos que
$\leq$	:	menor o igual que
$>$	:	mayor que
$\geq$	:	mayor o igual que

2.8. Desigualdades

Se conoce con el nombre de desigualdades a toda proposición donde aparece $<, \leq, >, \geq$ definidos de la manera siguiente para a, b y $c \in \mathbb{R}$.

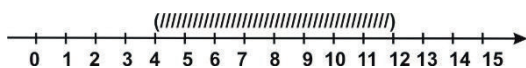
- Si $a > 0 \Leftrightarrow a$ es positivo.
- Si $a < 0 \Leftrightarrow a$ es negativo.
- Si $a > b \Leftrightarrow a-b$ es positivo.
- Si $a < b \Leftrightarrow a-b$ es negativo.
- Si $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$.
- Si $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$.
- Si $a < b < c \Leftrightarrow (a < b) \wedge (b < c)$.
- Si $a < b \leq c \Leftrightarrow [(a < b) \wedge (b < c \vee b = c)]$.

Propiedades

- Si $[a < 0 \wedge b < 0] \Rightarrow ab > 0$
- Si $[a > 0 \wedge b < 0] \Rightarrow ab < 0$
- $ab > 0 \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b > 0] \vee [a < 0 \wedge b < 0]$
- $ab < 0 \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b < 0] \vee [a < 0 \wedge b > 0]$
- Si $a \neq 0$, es $a^2 > 0$
- $a < b$ se cumple
 - a) si $c > 0 \rightarrow ac < bc$
 - b) si $c < 0 \rightarrow ac > bc$
- $a < b \rightarrow -a > -b$
- Si $a > 0 \rightarrow a^{-1} > 0$
Si $a < 0 \rightarrow a^{-1} < 0$
- Si $[a$ y b tienen el mismo signo y $a < b]$
$$\rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$
- Si $b > 0 \rightarrow a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

III. INTERVALOS

En una encuesta que se realizó a una empresa para saber que cantidad de agua se consumía se obtuvo el siguiente informe: Aproximadamente se consume más de 4 litros y menos de 12 litros de agua por día. En forma matemática estos datos se registran por:



Los litros de agua son mayores que 4 y menores que 12:

$$x > 4 \text{ y } x < 12$$

Llamamos x a la cantidad de litros consumidos. Estas desigualdades se pueden expresar:

$$4 < x < 12$$

mayores que menores que

Todos los valores comprendidos entre 4 y 12 forman un intervalo.

3.1. Definiciones

Intervalo Abierto.- Sean a y b dos números reales, tal que $a < b$, definimos el INTERVALO ABIERTO $]a, b[$ ó $<a, b>$ al conjunto:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



Intervalo Cerrado.- Dados dos números reales a y b con $a \leq b$, definimos el intervalo cerrado $[a, b]$, al conjunto:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



- El conjunto $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ se llama intervalo abierto por la izquierda.
- El conjunto $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$ se llama intervalo abierto por la derecha.

Otros Intervalos se denotan por:

$$\checkmark \quad]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$



$$\checkmark \quad]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$



$$\checkmark \quad]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$



$$\checkmark \quad [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$



$$\checkmark \quad]-\infty, +\infty[= \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < +\infty\}$$



3.2. Operaciones con Intervalos

1. Unión de Intervalos ($\cup$)

Sean los intervalos A y B , entonces:

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

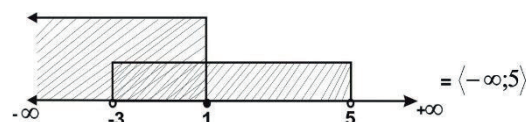
Ejemplo:

$$\text{Hallar } \langle -3; 5 \rangle \cup \langle -\infty; 1 \rangle$$

Recuerda que:

$$U = \cup = \vee$$

Solución:



2. Intersección de Intervalos ($\cap$)

Sean los intervalos A y B , entonces:

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \in B\}$$

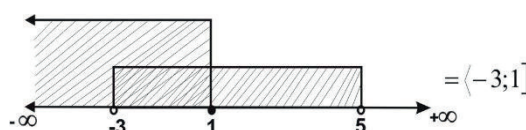
Ejemplo:

$$\text{Hallar: } \langle -3; 5 \rangle \cap \langle -\infty; 1 \rangle$$

Recuerda que:

$$\cap = y = \wedge$$

Solución:



3. Diferencia de Intervalos ($-$)

Sean los intervalos A y B, entonces:

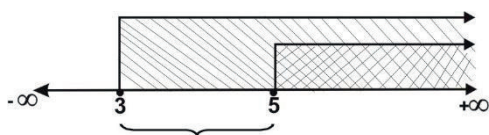
$$A - B = \{x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo:

Hallar : $P - M$, si $P = \langle 3; +\infty \rangle$

y $M = [5; +\infty \rangle$

Solución:



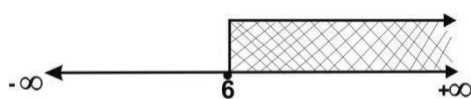
$$P - M = [3; +\infty) - [5; +\infty) = [3; 5]$$

4. Complemento de Intervalo (')

Sea el siguiente intervalo "A",
entonces:

$$A' = \{x \in \mathbb{R} / x \notin A\}$$

Hallar: A' , si $A = [6; +\infty \rangle$



$$A' = \langle -\infty; 6 \rangle$$

3.3. Valor Absoluto

Definición.- El valor absoluto de un número real a, denotado por $|a|$, se define por la regla:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo:

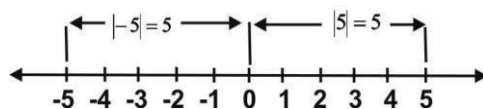
$$\text{Si: } a = 3 \rightarrow |a| = 3$$

$$a = 0 \rightarrow |a| = 0$$

$$a = -5 \rightarrow |-5| = -(-5) = 5$$

Vemos que el valor absoluto de un número positivo o cero es igual al mismo número, mientras que el valor absoluto de un número negativo es el número positivo correspondiente.

Esto significa que para cada número real a, hay un número $-a$, cuyo valor absoluto representa su distancia al origen, el positivo a la derecha y el negativo a la izquierda. Geométricamente se representa:



Para dos números a y b, $|a - b| = |b - a|$

Representa la distancia entre estos puntos, sin importar la dirección.

Ejemplo:

$$|a - b| = |-4 - 3| = |-7| = 7; |b - a| = |3 - (-4)| = |7| = 7$$

Propiedades

$$a. \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$a.1. \quad |a| \geq 0$$

$$a.2. \quad |a| = 0 \leftrightarrow a = 0$$

$$b. \quad \forall a \in \mathbb{R}: |a|^2 = a^2$$

$$c. \quad \forall a \in \mathbb{R}: |a| = \sqrt{a^2}$$

$$d. \quad \forall a \in \mathbb{R}: |a| = |-a|$$

$$e. \quad \forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}: |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$f. \quad \forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \text{ entonces:}$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$g. \quad \forall a, b \in \mathbb{R}: |a + b| \leq |a| + |b|$$

h. $\forall a, b \in R$

✓ $|a - b| \leq |a| + |b|$

✓ $|a| - |b| \leq |a - b|$

i. $|a| = b \leftrightarrow (b \geq 0) \wedge (a = b \vee a = -b)$

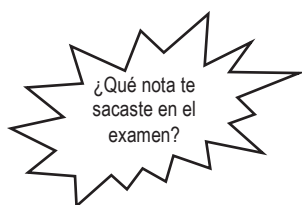
j. $|a| = |b| \leftrightarrow a = b \vee a = -b$

k. Si $b \geq 0$ y $|a| \leq b \leftrightarrow -b \leq a \leq b$

l. Si $|a| \geq b \leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$

m. $\forall a, b \in R = |a| \leq |b| \leftrightarrow a^2 \leq b^2$

IV. ECUACIONES



6 veces la nota que me saqué más 4 es 10.

Transformaremos esta situación en una ecuación matemática.

$$6x + 4 = 10$$

Por propiedad uniforme restamos 4 en ambos miembros:

$$6x + 4 - 4 = 10 - 4$$

Aplicamos la propiedad cancelativa

$$6x = 6$$

$$6x : 6 = 6 : 6$$

Por propiedad uniforme dividimos ambos miembros por 6.

$$x = 1$$

4.1 Definición

Una ecuación es aquella relación de igualdad que se establecen entre dos expresiones matemáticas, que tienen por lo menos una variable llamada también incógnita.

Recuerda: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ y $b = 0$

4.2 Clases de Ecuaciones

I. De Acuerdo a su Conjunto Solución

1. Ecuaciones Compatibles

Son aquellas ecuaciones que tienen por lo menos una solución. Son:

a. Ecuación Compatible Determinada

Es aquella ecuación que tiene un número finito de soluciones.

Ejemplo:

• Resolver $(x+2)(x-3) = 0$

Solución:

$$x + 2 = 0 \quad y \quad x - 3 = 0$$

$$x = -2 \quad x = 3$$

Entonces el conjunto solución es: C.S = $\{-2, 3\}$.

b. Ecuación Compatible

Indeterminada

Es aquella ecuación que tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo:

• Resolver $\frac{x-x}{x} = 0$

• Solución: $\frac{0}{x} = 0$

Entonces el conjunto solución es:

$$C.S = \{x/ 0x = 0\} = \{x \in R\}$$

2. Ecuaciones Incompatibles

Son aquellas ecuaciones que no tienen solución. el conjunto solución es el conjunto vacío, " $\emptyset$ ". Ejemplo: ¿Cuál es la edad de Pedro? Si x es la edad: $3x + 1 = x$.

Solución:

$$3x - x = -1$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Recuerda
Que la edad de Pedro no puede ser negativo.

Entonces el conjunto solución es:

$$\text{C.S.} = \{\emptyset\}$$

II. De Acuerdo a su Forma Estructural

1. Ecuaciones Algebraicas

a. Polinomial.- Son aquellas que tienen esta forma:

$$\blacksquare \quad 3x - 2 = x^2 - 6$$

$$\blacksquare \quad x^2 - 2x = 0$$

$$\blacksquare \quad 3x + 2 = 0$$

$$\blacksquare \quad 3(x + 4) = 2(x - 5)$$

b. Fraccionaria.- Son aquellas que tienen esta forma:

$$\frac{8}{x-2} = x + 1$$

$$\frac{5}{4}x + \frac{x-3}{2} = \frac{2x-1}{12} - \frac{17}{12}$$

$$\frac{x-2}{x-1} = 4$$

c. Irracional.- Son aquellas donde la incógnita se encuentra afectada por el radical. Tiene esta forma:

$$\blacksquare \quad \sqrt{x-3} = \frac{4x+2}{10}$$

$$\blacksquare \quad 2x + 1 = \sqrt[3]{2x+3} - x^2$$

d. Exponencial.- Son aquellas que tienen la incógnita en el exponente. Tienen esta forma:

$$\blacksquare \quad 3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$$

$$\blacksquare \quad 5^{5-3x} = 2^{x+2}$$

$$\blacksquare \quad (3x+4)^{x-y} = 9$$

e. Logarítmica.- Son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo de logaritmo. Tienen esta forma.

$$\blacksquare \quad \log_q(x+8) - \log_q(x+2) = \log_q 7$$

$$\blacksquare \quad \log_8 x \left(\frac{8}{x} \right) + \log_8^2(x) = 1$$

$$\blacksquare \quad x + \log(1+2x) = x \log 5 + \log 6$$

f. Trigonométricas.- Son aquellas que tienen expresiones trigonométricas donde la incógnita es el ángulo. Tiene esta forma:

$$\blacksquare \quad \cos x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\blacksquare \quad 2 \cos 2x = 2 - \sin x$$

$$\blacksquare \quad \sin 2x = \sin x \cdot \cos x$$

$$\blacksquare \quad \tan 2x + \tan x - 3 = \sqrt{3}$$

III. Por un Número de Incógnitas

Una ecuación puede tener una, dos o más incógnitas. Así:

$$\blacksquare \quad 2x+4=6x-12 \text{ una incógnita}$$

$$\blacksquare \quad 5x-2y = 2 \text{ dos incógnitas}$$

$$\blacksquare \quad 2x-3y+z=-8 \text{ tres incógnitas}$$

IV. Por el Grado

Las ecuaciones pueden ser de primer grado, de segundo grado, de tercer grado, etc. Tiene la siguiente forma:

$$\bullet \quad ax + b = 0$$

Primer grado o lineal

$$\bullet \quad ax^2 + bx + c = 0$$

Segundo grado o cuadrático.

$$\bullet \quad 2x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Tercer grado o cúbica.

... etc.

4.3 Resolución de Ecuaciones de

Primer Grado con una Incógnita

Para resolver ecuaciones se aplican ordenadamente las propiedades de la igualdad de números reales, convirtiendo la ecuación dada en otras más sencillas que sea equivalente a la primera.

Ecuaciones Equivalentes.- Dos ecuaciones son equivalentes sí, y sólo sí, tienen el mismo conjunto solución. Para obtener ecuaciones equivalentes, se aplican las propiedades:

- 1) $a = b \Rightarrow a + b = b + c$
igualdad-adición
- 2) $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$
igualdad-multiplicación
- 3) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$
cancelación-adición
- 4) $ac = bc \Rightarrow a = b$, si $c \neq 0$
cancelación-multiplicación

➤ **la propiedad 1 afirma** “si a los dos miembros de una ecuación sumamos un mismo número, obtenemos otra ecuación equivalente a la primera”.

➤ **la propiedad 2 afirma** “si a los dos miembros de una ecuación multiplicamos por un mismo número real diferente de cero, obtendremos otra ecuación equivalente a la primera”.

Ejemplo: Resolver: $5x + 2 = 2x - 3$

Solución: $5x + 2 = 2x - 3$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (5x + 2) + (-2) + (-2x) &= (2x - 3) + (-2) + (-2x) \\ \Leftrightarrow [5x + (-2x)] + [2 + (-2)] &= [2x + (-2x)] + [-3 + (-2)] \\ \Leftrightarrow 3x + 0 &= 0 + (-5) \\ \Leftrightarrow 3x &= -5 \\ \Leftrightarrow 3^{-1}(3x) &= (3^{-1})(-5) \\ \Leftrightarrow (3^{-1}3)x &= (3^{-1})(-5) \\ \Leftrightarrow 1 \cdot x &= \frac{1}{3}(-5) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-5}{3} \end{aligned}$$

4.4 Resolución de Problemas

mediante ecuaciones de

Primer Grado con una Incógnita

Las ecuaciones tienen una amplia aplicación en la resolución de problemas. Todo problema implica una relación entre los elementos que en él intervienen, de los cuales al menos uno es desconocido. Esta relación se puede expresar en lenguaje algebraico, dando origen generalmente a una ecuación. A continuación, veremos cómo se traduce algunas expresiones de nuestro lenguaje habitual al lenguaje algebraico. → Para cada una de las siguientes expresiones el número incógnita será “x”.

Lenguaje Común	Lenguaje Algebraico
Un número aumentado en 10	$x + 10$
Un número disminuido en 7.	$x - 7$
El doble de un número	$2x$
La mitad de un número	$x/2$ ó $\frac{1}{2}x$
El cuadrado de un número	x^2
Un número más su mitad	$x + x/2$
Un número disminuido en sus $\frac{3}{4}$ partes	$x - \frac{3}{4}x$
El triple de un número, aumentado en 5	$3x + 5$
El doble de un número aumentado en 9	$2(x + 9)$
El exceso de un número sobre 16	$x - 16$
El exceso de 50 sobre un número	$50 - x$
La suma de tres números enteros consecutivos	$x + (x + 1) + (x + 2)$

Para resolver un problema, es preciso leer y comprender el enunciado, lo que facilitará identificar la relación

indicada y plantear la ecuación correspondiente.

A continuación desarrollaremos algunos problemas.

Problema 1

Hallar un número, sabiendo que aumentado en 18 equivale al triple de su valor.

Solución:

→ sea el número : x

→ según el enunciado del problema:

$$x + 18 = 3x$$

Resolviendo:

$$x + 18 = 3x$$

$$18 = 2x$$

$$x = 9 \quad \therefore \text{el número es } 9$$

Problema 2

La suma de tres números enteros consecutivos es 47 unidades más que el número menor. Hallar el mayor de los tres números.

Solución:

→ sean los tres números enteros consecutivos

menor : x

intermedio : $(x+1)$

mayor : $(x+2)$

→ de acuerdo a los datos del problema

$$x + (x+1) + (x+2) = 47 + x$$

Resolviendo:

$$3x + 3 = x + 47$$

$$2x = 44$$

$$x = 22$$

→ entonces el # mayor es 24.

PROBLEMAS

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno:

- 1) Hallar un número que, aumentado en 14, equivale al triple del mismo número.
- 2) La suma de dos números enteros consecutivos es 35. ¿Cuáles son esos números?.
- 3) Hallar dos números sabiendo que uno excede en 8 unidades al otro y que el menor aumentado en sus $\frac{3}{5}$ es 5 unidades menos que el mayor.
- 4) El triple de un número aumentado en 16 equivale al exceso de 60 sobre el mismo número. Hallar dicho número.
- 5) Un número más su mitad iguala al exceso del doble del mismo sobre 9. hallar el doble de dicho número.
- 6) A un alambre se le da dos cortes de manera que la longitud del primer trozo es los $\frac{2}{9}$ del total, la del segundo 6 metros más que el primero y la del tercero los $\frac{4}{9}$ del total. ¿Cuál era la longitud total del alambre?.
- 7) La edad de Ernesto dentro de 8 años será el doble de la edad que tuvo hace 5 años. ¿Cuál es su edad actual?.
- 8) Hallar un número cuyos $\frac{7}{8}$ excedan a sus $\frac{3}{4}$ en 5.
- 9) Si un número aumentado en 8 se multiplica por el mismo número disminuido en 3, resulta el cuadrado del número, más 76, ¿Cuál es el número?.
- 10) La suma de tres números enteros consecutivos es lo mismo que el exceso de 39 sobre el menor de los números ¿Cuál es el número mayor?.
- 11) Si a un número se le suma 5, se multiplica la suma por 3, se resta 6 del producto y se divide la diferencia por 7, se obtiene un número que tiene 5 unidades menos que

el número inicial. Hallar el número aumentado en 3.

- 12) Ángel tiene 18 años más que Frank. Hace 18 años, la edad de ángel equivalía a los $\frac{5}{2}$ de la edad de Frank. Hallar la edad que tiene Ángel.
- 13) Si al cuádruple de la edad que tenía hace 3 años, le resto el doble de la edad que tendré dentro de 4 años, obtengo mi edad ¿Cuál es mi edad?
- 14) Las edades de Ángel, Beto y Carlos suman 53 años. La edad de Beto es $\frac{1}{3}$ de la edad de Carlos y la edad de ángel es 4 años más que la edad de Carlos. ¿Cuál es la edad de Beto?
- 15) Andrea tenía cierta suma de dinero. Gastó S/. 30 en libros y los $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba después del gasto anterior, en ropa. Si todavía le quedan S/. 30. ¿Cuánto tenía al principio?
- 16) En 3 días Fiorella ganó 185 soles. Si cada día ganó los $\frac{3}{4}$ de lo que ganó el día anterior. ¿Cuánto ganó el primer día?

Respuesta del Taller

- 1) 7
- 2) 17 y 28
- 3) 13 y 5
- 4) 3
- 5) 36
- 6) 54 metros
- 7) 18 años
- 8) 40
- 9) 20
- 10) 11
- 11) 14
- 12) 48 años
- 13) 20 años
- 14) 7 años
- 15) S/. 150
- 16) S/. 80

4.5 Ecuaciones de Segundo Grado

1. **Definición.-** Una ecuación se llama de segundo grado o cuadrática, cuando después de simplificar adopta la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde:

a, b y c son coeficientes.



Observación:

Si, a, b y c son diferentes de cero, la ecuación se llama completa y si b o c, ambos, son ceros, la ecuación se llama incompleta; a no puede ser cero, porque entonces dejaría de ser una ecuación de segundo grado.

Así dada la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si: } b \neq 0; \quad c \neq 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \\ \text{Si: } b = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + c = 0 \\ \text{Si: } c = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx = 0 \\ \text{Si: } b = c = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ec. completa} \\ \text{Ec. incompletas} \end{array}$$

2. Resolución de una ecuación de segundo grado

En general, una ecuación de segundo grado con una incógnita puede resolverse:

- a. Por medio de la factorización, siempre que la factorización sea posible.
- b. Empleando la fórmula general.

A. Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

Para resolver una ecuación cuadrática por medio de la factorización, se recomienda lo siguiente:

- Se trasladan todos los términos a un solo miembro, de modo que en el otro miembro quede cero.
- Se factoriza la expresión simplificada.
- Se iguala cada factor a cero de donde se obtienen las raíces o soluciones.

Ejemplo 1

Resolver $x^2 + 10x + 21 = 0$

Resolución

→ Factorizando el primer miembro:

$$x^2 + 10x + 21 = 0$$

$$(x + 3)(x + 7) = 0$$

→ Igualamos cada factor a cero

$$x + 3 = 0$$

$$x + 7 = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -7$$

Luego el conjunto solución de la ecuación es: C.S. = $\{-3; -7\}$.

EJERCICIOS

Resuelve por factorización las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 11x + 30 = 0$
2. $x^2 - 7x - 8 = 0$
3. $x^2 - 9x + 18 = 0$
4. $x^2 + 3x - 28 = 0$
5. $2x^2 - 12x = 0$
6. $x^2 - 25 = 0$
7. $6x^2 - 17x + 5 = 0$
8. $4x^2 - 19x - 5 = 0$
9. $10x^2 + 7x - 12 = 0$
10. $7x^2 + 40x - 12 = 0$
11. $(x-1)(x-5) = -3$
12. $(x+1)(x+6) = -6$

Respuestas del Taller

1. C.S. = $\{-5; -6\}$
2. C.S. = $\{8; -1\}$

3. C.S. = $\{3; 6\}$
4. C.S. = $\{4; -7\}$
5. C.S. = $\{0; 6\}$
6. C.S. = $\{5; -5\}$
7. C.S. = $\left\{\frac{1}{3}; \frac{5}{2}\right\}$
8. C.S. = $\left\{-\frac{1}{4}; 5\right\}$
9. C.S. = $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{4}{5}\right\}$
10. C.S. = $\left\{\frac{2}{7}; -6\right\}$
11. C.S. = $\{2; 4\}$
12. C.S. = $\{-3; -4\}$

B. Resolución de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general

Este procedimiento se sigue generalmente cuando la factorización no es posible. Para deducir esta fórmula, se transforma el primer miembro en un cuadrado perfecto. Así: dada la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

➤ Pasamos c al segundo miembro:

$$ax^2 + bx = -c$$

➤ Multiplicamos por 4a a ambos miembros:

$$4a(ax^2) + 4a(bx) = 4a(-c)$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

➤ Sumamos b^2 a ambos miembros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

➤ Factorizamos el primer miembro:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

➤ Extrayendo la raíz cuadrada

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

➤ Despejando la incógnita x

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Luego las dos raíces o soluciones son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Primera solución

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Segunda solución

Ejemplo 1

Resolver: $2x^2 + 5x - 12 = 0$

Resolución:

→ En la ecuación $2x^2 + 5x - 12 = 0$

Que es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se deduce que: $a=2$; $b=5$; $c=-12$.

→ Reemplazamos estos valores en la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obtenemos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-12)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 11}{4} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-5 + 11}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{-5 - 11}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \end{array} \right.$$

∴ El conjunto solución de la ecuación es:

$$C.S. = \left\{ \frac{3}{2}; -4 \right\}$$

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones, empleando la fórmula general:

1. $2x^2 - 7x + 3 = 0$

2. $2x^2 - x - 3 = 0$

3. $x^2 - 14x + 40 = 0$

4. $x^2 + 3x - 10 = 0$

5. $3x^2 - 13x - 30 = 0$

6. $x^2 + 2x - 5 = 0$

7. $3x^2 - 2x - 6 = 0$

Respuestas del Taller

1) $C.S. = \left\{ \frac{1}{2}; 3 \right\}$

2) $C.S. = \left\{ \frac{3}{2}; -1 \right\}$

3) $C.S. = \{4; 10\}$

4) $C.S. = \{-5; 2\}$

5) $C.S. = \left\{ \frac{-5}{3}; 6 \right\}$

6) $C.S. = \{-1 + \sqrt{6}; -1 - \sqrt{6}\}$

7) $C.S. = \left\{ \frac{1 + \sqrt{19}}{3}; \frac{1 - \sqrt{19}}{3} \right\}$

3. Resolución de Problemas mediante ecuaciones de segundo grado

Problema 1.- La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 61. Hallar dichos números, sabiendo que son positivos.

Resolución:

→ Sean los números enteros consecutivos

$$x; (x + 1)$$

→ Según datos del problema se plantea la siguiente ecuación:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 61$$

Resolviendo:

$$x^2 + (x^2 + 2x + 1) = 61$$

$$2x^2 + 2x - 60 = 0$$

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$$(x + 6)(x - 5) = 0$$

$$\text{i) } x + 6 = 0$$

$$x = -6$$

$$\text{ii) } x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

→ Según la condición del problema, los números son positivos, entonces la solución que se considera es $x = 5$,
Luego:

∴ **Los números son 5 y 6 Rpta.**

Problema 2.-El producto de dos números positivos que se diferencian en 4 es igual a diez veces el menor, aumentando en 7, Hallar el mayor de dichos números.

Resolviendo:

→ El hecho de que dos números se diferencian en 4 significa que el mayor de ellos es 4 unidades más que el menor.

Luego: # menor = x

mayor = $x + 4 = ?$

→ Según el enunciado:

$$x(x + 4) = 10x + 7$$

$$x^2 + 4x - 10x - 7 = 0$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x - 7)(x + 1) = 0$$

$$\text{i) } x - 7 = 0$$

$$x = 7$$

$$\text{ii) } x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

Nota.- Esta solución se descarta porque los números son positivos.

∴ **El # mayor es $7 + 4 = 11$ Rpta.**

PROBLEMAS

Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas:

- 1) La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 85. Indicar el menor de dichos números.
- 2) Se tienen tres números naturales consecutivos. Si el cuadrado del número mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. ¿cuál es la suma de dichos números?.
- 3) El producto de dos números enteros positivos que se diferencian en 2 es igual a la suma de los mismos aumentado en 14. ¿Cuál es el número menor?.
- 4) Un comerciante compró cierto número de polos por 360 soles. Si cada polo le hubiera costado 2 soles menos, el dinero que invirtió le hubiera alcanzado para comprar 15 polos más. ¿cuántos compró?.
- 5) Un padre pensaba repartir una herencia de 6000 soles equitativamente entre todos sus hijos, pero luego decide incluir en la lista de herederos a un sobrino, motivo por el cual a cada uno de sus hijos le corresponderá 200 soles menos. ¿Cuántos hijos tiene?.
- 6) Un caño A puede llenar una piscina en 15 horas y otro caño B puede llenarlo en 10 horas. Si se abren los dos caños a la vez, ¿en qué tiempo llenarán la piscina?.

Respuestas del Taller

- 1) 6
- 2) 12
- 3) 4

- 4) 45 polos
- 5) 5 hijos
- 6) 6 horas

V. INECUACIONES

5.1. Inecuaciones de Primer Grado con una Incógnita

Las inecuaciones lineales de primer grado con una incógnita, pueden ser de las formas:

$$\begin{aligned} ax + b &< 0 \\ ax + b &\leq 0 \\ ax + b &> 0 \\ ax + b &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Resolver: $\forall x \in R :$

$$3\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{1}{2}(x-3) - 2x$$

Solución: $3\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{1}{2}(x-3) - 2x$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 < \frac{x}{2} - \frac{3}{2} - 2x$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4 < x - 3 - 4x$$

$$\Leftrightarrow 6x - x + 4x < -3 - 4$$

$$\Leftrightarrow 9x < -7$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-7}{9}$$

Luego: $C_s = \{x \in R / x < -7/9\}$



Ejemplo 2

Resolviendo:

$$\forall x \in R : -2x - 3 \leq 4 + 5x < 2 + 8x$$

$$\Leftrightarrow -2x - 3 \leq 4 + 5x \quad \wedge \quad 4 + 5x < 2 + 8x$$

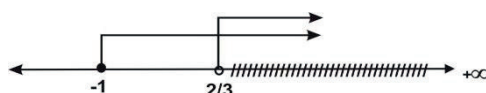
$$\Leftrightarrow -2x - 5x \leq 4 + 3 \quad \wedge \quad 5x - 8x < 2 - 4$$

$$\Leftrightarrow -7x \leq 7 \quad \quad \quad -3x < -2$$

$$7x \geq -7 \quad \quad \quad 3x > 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \quad \wedge \quad x > 2/3$$

$$C_s = \{x \in R / x > 2/3\}$$



5.2. Inecuaciones Racionales

Para resolver inecuaciones racionales se pueden aplicar dos o tres métodos. Para explicar cada método, escogemos un ejemplo:

MÉTODO 1

Reduciendo la inecuación dada a una sola fracción; al trasponer el segundo miembro al primer miembro. Luego analizar los signos de cada factor que se tenga en el numerador y el denominador.

Paso 1:

De

$$\frac{x-5}{x-1} < \frac{x+2}{x+3} \Rightarrow \frac{x-5}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} < 0$$

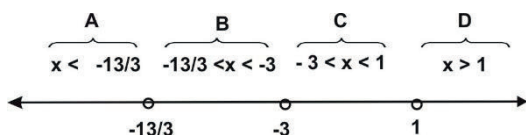
$$\Rightarrow \frac{(x-5)(x+3) - (x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 15 - x^2 - x + 2}{(x-1)(x+3)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3x-13}{(x-1)(x+3)} < 0 \Rightarrow \boxed{\frac{3x+13}{(x-1)(x+3)} > 0}$$

Paso 2:

Graficar en la recta real, los puntos críticos que se obtienen del numerador y del denominador en la inecuación (I)



Paso 3:

Analizar el signo de cada factor que se tiene en (I) a partir de los conjuntos A, B, C, D,

i) En A: a partir de $x < -13/3$

Se obtiene:

$$\frac{\overbrace{(3x+3)}^{(-)}}{\underbrace{(X-1)}_{(-)} \underbrace{(x+3)}_{(-)}} = (-) < 0 \quad \text{contradice a (I)}$$

Luego A no es solución.

ii) En B: a partir de $-13/3 < x < -3$, se obtiene

$$\frac{\overbrace{(3x+13)}^{(+)}}{\underbrace{(X-1)}_{(+)} \underbrace{(x+3)}_{(+)}} = (+) > 0 \quad \text{satisface a (I)}$$

Por tanto: **B es solución**

iii) En C: a partir de $-3 < x < 1$, se obtiene

$$\frac{\overbrace{(3x+13)}^{(+)}}{\underbrace{(X-1)}_{(-)} \underbrace{(x+3)}_{(+)}} = (-) < 0 \quad \text{no satisface a (I)}$$

En consecuencia C no es solución.

iv) En D: a partir de $x > 1$, se obtiene:

$$\frac{\overbrace{(3x+13)}^{(+)}}{\underbrace{(X-1)}_{(+)} \underbrace{(x+3)}_{(+)}} = (+) > 0 \quad \text{satisface a (I)}$$

Lo cual indica que **D es solución.**

Conclusión.- El conjunto solución es:

$$C_s = B \cup D = \{X \in R / -13/3 < X < -3\} \cup \{X \in R / X > 1\}$$

MÉTODO 2 – Regla de los Signos

V. Para la multiplicación

Casos:

- ① $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
- ② $ab \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)$
- ③ $ab < 0 \Leftrightarrow (a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$
- ④ $ab \leq 0 \Leftrightarrow (a \leq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \geq 0 \wedge b \leq 0)$

VI. Para la División

- ① $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
- ② $\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a \leq 0 \wedge b < 0)$
- ③ $\frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow (a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$
- ④ $\frac{a}{b} \leq 0 \Leftrightarrow (a \leq 0 \wedge b > 0) \vee (a \geq 0 \wedge b < 0)$

MÉTODO 3 – Regla Práctica de los Puntos Críticos.

Este método es una combinación de los métodos 1 y 2 y se aplica cuando la inecuación está expresado como producto de dos o más factores lineales, tales como:

$$1. -5(x-1)^2(x+3)(2-3x)^4(2-7x)(x-4) \leq 0.$$

$$2. \quad -\frac{2}{3}(1-2x)(x-3)^5(3x-1)^{17} > 0$$

$$3. \quad \frac{9(1-5x)(4x-1)(x-2)}{(x-2)^3(x+3)} \leq 0$$

$$4. \quad \frac{(x+3)(4-x)(2-3x)}{(x+3)^2(x-1)(2-5x)^5} > 0$$

PASOS A SEGUIR:

Paso 1

Simplificar los factores positivos, reduciendo la inecuación a su mínima expresión.

Paso 2

Graficar los puntos críticos en la recta real, obtenidos de cada factor lineal.

Paso 3

Analizar el signo de cada factor lineal, a partir de cada subconjunto obtenido en el paso 2. Este paso se puede reducir en todos los factores lineales se cumple que los coeficientes de la incógnita son positivos.

A continuación asignamos el signo (+) al primer subconjunto de la derecha, luego de derecha a izquierda asignamos los signos (-), (+), (-), (+), (-),...etc. hasta concluir con el subconjunto del extremo izquierdo.

Paso 4

El conjunto solución será la UNIÓN de todos los subconjuntos que satisfacen a la inecuación dada.

Ejemplos:

1. Resolver $\forall x \in R$:

$$-5(x-1)^2(x+3)(2-3x)^4(2-7x)(x-4) \leq 0$$

Solución:

Paso 1

Simplificar los factores 5, $(x-1)^2$ y $(2-3x)^4$ por positivos o cero y la inecuación dada se reduce en:

$$-(x+3)(2-7x)(x-4) \leq 0$$

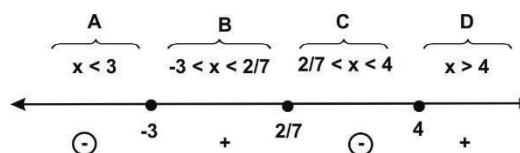
Multiplicar por (-1): $(x+3)(2-7x)(x-4) \geq 0$

cambiar el signo

$$\Rightarrow \boxed{(x+3)(7x-2)(x-4) \leq 0} \quad (I)$$

Paso 2

Graficar en la recta, los puntos críticos: $x=-3$, $2/7$, 4 obtenidos en I.



Paso 3

Al primer intervalo de la derecha le asignamos el signo (+), luego de derecha a izquierda asignamos los signos: (-), (+) y (-), hasta terminar con el conjunto del extremo izquierdo.

Paso 4

El conjunto solución es la unión de los subconjuntos A y C que están asignados con el signo (-), que son los subconjuntos que satisfacen la inecuación dada en (I).

$$C_s = \{X \in R / X \leq -3\} \cup \{X \in R / 2/7 \leq X \leq 4\}$$

Resolver:

$$-\frac{2}{3}(1-2x)(x-3)^5(3x-1)^{17} > 0$$

$$C_s = \{X \in R / 1/3 < 1/2 \vee X > 3\}$$

Solución:

Simplificar los factores:

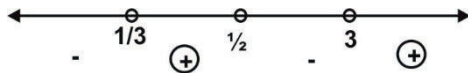
$$\frac{2}{3}, (x-3)^4 y (3x-1)^{16} \text{ con } x \neq 3, x \neq 1/3$$

$$\Rightarrow -(1-2x)(x-3)(3x-1) > 0$$



Cambiar de signo: Un número par de cambios de signos en los factores, el sentido de la desigualdad No cambia: es regla de los signos.

$$\Rightarrow (2x-1)(x-3)(3x-1) > 0$$



UNIDAD N° 03

F U N C I O N E S

INTRODUCCIÓN

El término matemático “función”, o su equivalente en latín, se remonta a finales del siglo XVII, cuando el cálculo se encontraba en sus primeras etapas de desarrollo. Este concepto importante es ahora fundamental en los cursos e indispensable en todos los campos de la ciencia.

Con frecuencia, en las aplicaciones prácticas el valor de una variable depende del valor de otra. Ejemplos de dependencia lo podemos percibir a menudo en el desarrollo de nuestra vida o en conocimientos adquiridos en la escuela como: “El área de un círculo depende del radio que lo define”, “La distancia recorrida por un móvil depende del tiempo transcurrido a partir del instante en que parte de un punto dado, así como también de otros factores”, “El precio de venta de cierto producto depende del costo de la mano de obra, precio de las materias primas, así como también de otros factores”.

La relación entre este tipo de cantidades suele expresarse mediante una función.

En la presente unidad daremos mayor importancia a las funciones que dependen de una sola variable, por ser las de mayor uso en las escuelas primarias, secundarias e incluso en los primeros ciclos de las Carreras Universitarias de Educación.

Para fines exclusivos de esta unidad, las cantidades involucradas en estas relaciones son números reales, sin dejar de lado la parte aplicativa de las funciones en la vida real.

III UNIDAD

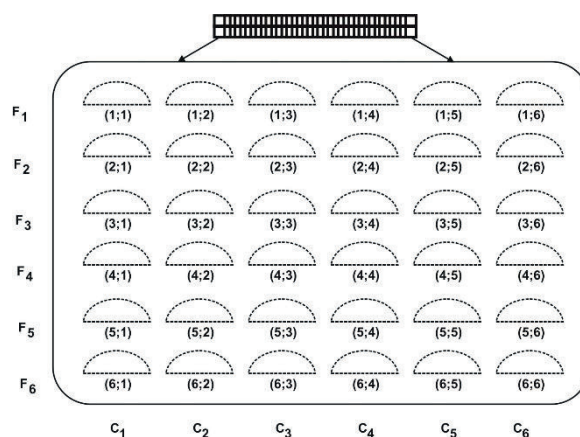
RELACIONES Y FUNCIONES

3.1. RELACIÓN

3.1.1. Par ordenado

Situación Problemática

Al ingresar Jhon y Mary al cinema “Plaza”, tienen un inconveniente de donde ubicarse para espectar mejor la película. El cinema dispone de las butacas mostradas en el siguiente gráfico:



Si sólo están disponibles las butacas (2;4) y (4;2). Jhon que es todo un caballero cede la butaca (2;4) a su amiga Mary. ¿Quién de ellos podrá espectar mejor la función?.

En esta situación problemática interesa el orden o la ubicación del espectador, ya que no es lo mismo estar ubicado en la butaca (2;4) que estar ubicado en la butaca (4;2). En ese orden Mary espectará mejor la función que su amigo Jhon.

Matemáticamente: $(2;4)$ expresa un par ordenado que indica que la butaca donde se sienta Mary, la primera componente pertenece a la fila 2 y la segunda componente corresponde a la columna 4.

$(4;2)$ expresa un par ordenado que indica que la butaca donde se sienta Jhon, la primera componente pertenece a la fila 4 y la segunda componente a la columna 2.

Por lo expuesto: $(2;4) \neq (4;2)$.

*En general: Llamaremos “par ordenado” de números reales a la expresión (a,b) donde **a** es llamada primera componente y **b** es llamada la segunda componente, en el que se respeta estrictamente el orden de ubicación de estos elementos.*

Ejemplos:

$(3;5)$, $(-2; 3)$.

- **Igualdad de Pares Ordenados**

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Ejemplo determinar el valor de “x” e “y” de tal manera que:

$$(5x+2y, -4) = (-1; 2x-y)$$

$$5x+2y=-1 \wedge -4 = 2x-y$$

$$X = -1, \quad y = 2$$

3.1.2. Producto Cartesiano

Situación problemática.- Robert, Kati y Sara son alumnos del programa LEMM que tienen planificado realizar secciones de estudio para los exámenes de fin de ciclo, para esto disponen de los textos: Teoría del Aprendizaje, Matemática Básica y Economía de la Educación. De que

forma podrán estudiar diariamente un texto diferente cada uno de ellos.

Solución:

Sea:

➤ A el conjunto de los alumnos del programa LEMM.

➤ B el conjunto de textos por estudiar.

Dichos conjuntos los expresaremos como:

➤ $A = \{\text{Robert, Katy, Sara}\} = \{R, K, S\}$

➤ $B = \{\text{Teoría del Aprendizaje, Matemática Básica y Economía de la Educación}\} = \{TA, MB, EE\}$.

Para que cada estudiante lea un texto diferente diariamente, podemos establecer la siguiente correspondencia.

➤ **1er día de estudio**

→ $(K, TA), (R, EE), (S, MB)$

➤ **2do día de estudio**

→ $(K, EE), (R, MB), (S, TA)$

➤ **3er día de estudio**

→ $(K, MB), (R, TA), (S, EE)$

A todas estas posibles formas de estudiar cada alumno tomará un texto diferente; es la que llamaremos **producto cartesiano** de $A \times B$, como el conjunto denotado por:



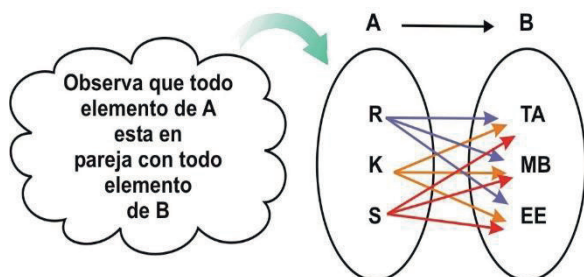
$A \times B = \{(K, TA), (R, EE), (S, MB), (K, EE), (R, MB), (S, TA), (K, MB), (R, TA), (S, EE)\}$.

Dado dos conjuntos A y B se define el producto cartesiano $A \times B$. Como el conjunto $A \times B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$ Este es un conjunto de pares ordenados (a,b) cuyas primeras componentes se encuentran en el conjunto A y sus segundas componentes en el conjunto B.

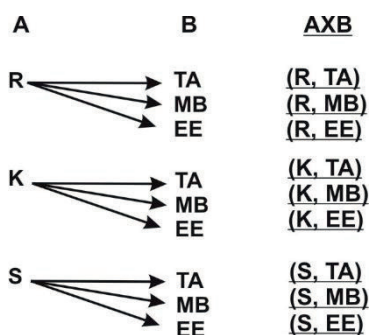
Diagramas

Si : $A = \{R, K, S\}$ y $B = \{TA, MB, EE\}$

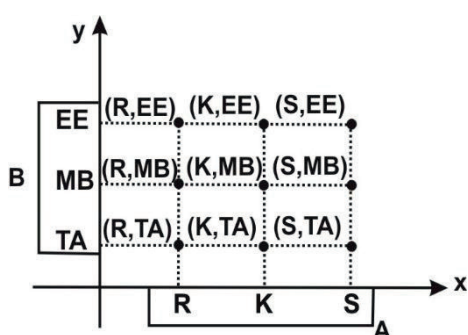
a. Diagrama de Flecha o Sagital



b. Diagrama del Árbol



c. Diagrama Cartesiano



d. Diagrama Tabla de Doble Entrada

B \ A	TA	MB	EE
R	(R, TA)	(R, MB)	(R, EE)
K	(K, TA)	(K, MB)	(K, EE)
S	(S, TA)	(S, MB)	(S, EE)

3.1.3. Propiedades del Producto Cartesiano

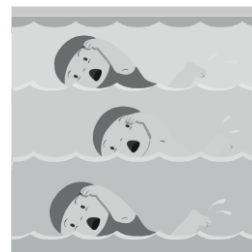
- $A \times B \neq B \times A$
- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$
- $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$
- $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- Si $A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C, \forall C$
- Si $A \subset C$ y $B \subset D \Rightarrow A \times B \subset C \times D$

3.2. Relaciones Binarias

Situación problemática

La Escuela de Educación Física de la Universidad Nacional "Lambayeque" ha enviado una delegación deportiva, integrada por dos de sus mejores alumnos: César y Denis que participarán en Natación en las Olimpiadas Universitarias a desarrollarse en la ciudad de Lima.

¿Cuántas formas de participar tendrá el



entrenador de la delegación, si el Comité Organizador tiene programado 4 días de competencia?.

Solución:

Podemos organizar estos datos de la siguiente forma:

Sea:

A el conjunto de alumnos participantes

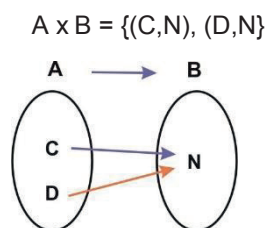
B el conjunto de disciplina deportiva que Practican

En el lenguaje matemático expresamos los conjuntos como:

$A = \{\text{César, Denis}\} = \{C, D\}$

$B = \{\text{Natación}\} = \{N\}$

El producto cartesiano se expresa como el conjunto:



El entrenador de la delegación puede establecer la Relación “R”

R: “.....participará en.....”

Teniendo las siguientes posibilidades:

- 1er día $\rightarrow R_1 = \{(C,N)\}$, “César participará en natación”.
- 2do día $\rightarrow R_2 = \{(D,N)\}$, “Denis participará en natación”.
- 3er día $\rightarrow R_3 = \{(C,N), (D,N)\}$, “César y Denis participarán en natación”.
- 4to día $\rightarrow R_4 = \{ \} = \emptyset$, “César y Denis no participarán en natación”. (el 3er día fueron eliminados).

A los conjuntos “R” de pares ordenados expresados anteriormente y que son subconjuntos de $A \times B$, le llamaremos Relaciones Binarias de A en B.

Definición.- Sean A y B dos conjuntos no vacíos, llamaremos relación binaria de A en B ó relación de los elementos de A y B a todo subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$, esto es:
R es una Relación de A en B $\leftrightarrow R \subseteq A \times B$

Ejemplo:

Sea $A = \{2,4\}$ y $B = \{1,3\}$ entonces
 $A \times B = \{(2,1), (2,3), (4,1), (4,3)\}$.

$R_1 = \{(2,1)\}$, $R_2 = \{(2,1), (4,3)\}$, $R_3 = \{(2,1), (2,3)\}$
 $R_4 = \{(1,2), (2,3)\}$, $R_5 = \{(2,1), (3,2)\}$

- R_1, R_2, R_3 son relaciones de A en B.

- R_4 y R_5 no son relaciones de A en B, pues $(1,2) \notin A \times B$ y $(3,2) \notin A \times B$.

Observación:

- Si A tiene “p” elementos y B” tiene “q” elementos, entonces $\exists 2^n$ relaciones de A en B. donde $n = p \cdot q$.
- En R, al conjunto A llamaremos conjunto de partida y al conjunto B, llamaremos conjunto de llegada.

3.2.1. Dominio y Rango de una Relación

Situación Problemática

Los alumnos de la especialidad de matemática y computación tienen organizada una “cadena telefónica” para el caso en que por alguna razón, deban comunicarse una noticia. El profesor Carlos tuvo un contratiempo y debió suspender su clase, se encargó personalmente de avisarles la noticia a Rosa, Katy, Gloria y Jessica quienes iniciaron la cadena.

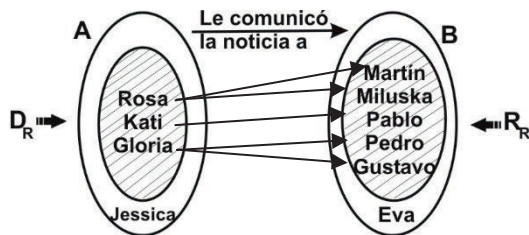
Rosa llama a Martín y Miluska. Katy se comunicó con Pablo; Gloria le avisó a Pedro y Gustavo; Jessica que debía hablar con Eva, pero como no pudo comunicarse, por lo que Eva no se enteró.

Solución:

Expresaremos tal situación considerando.

- **A** el conjunto de las personas que comunicaron la noticia.
- **B** el conjunto de personas que recibieron la noticia.

Se establece la relación: “..... le comunicó la noticia a.....” entre A y B.



A los alumnos que comunicaron la noticia en A, le llamaremos Dominio de la Relación y a los alumnos que recibieron la noticia en B, llamaremos Rango de la relación.

$D_R = \{\text{Rosa, Katy, Gloria}\}$

$R_R = \{\text{Martín, Miluska, Pablo, Pedro, Gustavo}\}.$

Si R es una relación de A en B , es decir $R \subset A \times B$, definimos:

- El dominio de la Relación $R(D_R)$, como el conjunto.

$$D_R = \{a \in A / \exists b \in B \wedge (a, b) \in R\}$$

- El rango de la relación $R(R_R)$, como el conjunto

$$R_R = \{b \in B / \exists a \in A \wedge (a, b) \in R\}$$

Ejemplo 1:

Si $B = \{1, 4, 6\}$ y $A = \{2, 3, 8\}$

$R = \{(2, 1), (3, 6), (8, 4)\}$ entonces

$D_R = \{2, 3, 8\}$, $R_R = \{1, 4, 6\}$

Ejemplo 2:

$R_2 = \{(x, y) \in R^2 / xy - 2y - x = 0\}$

Hallamos el dominio

- Despejamos “y”

$$xy - 2y - x = 0$$

$$y = \frac{x}{x-2}$$

$$D_{R_2} = R - \{2\}$$

Hallamos el rango

- Despejamos “x”

$$xy - 2y - x = 0$$

$$x = \frac{2y}{y-1}$$

$$R_{R_2} = R - \{1\}$$

3.3. Funciones

Uno de los más importantes conceptos de la matemática se refiere a un tipo especial de relaciones entre elementos de dos conjuntos A y B, llamados funciones de A en B. Una función expresa la idea de una cantidad que depende de otra o está determinada por otra.

Situación problemática

La empresa de turismo “Lambayeque”

alquila un bus a

S/.80.00 diarios.

Si un grupo de

turistas franceses

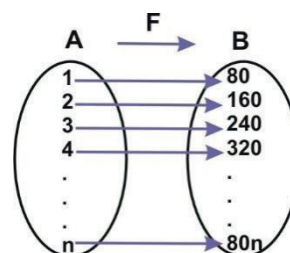
alquilan un bus, el

costo de alquiler

depende del número de días que utilicen

su servicio, la cuál se puede representar

en el siguiente diagrama.



Donde:

- **A:** conjunto de números de días de alquiler.
- **B:** conjunto de costo de alquiler.

En matemática, el costo de alquiler es una función del número de días que preste

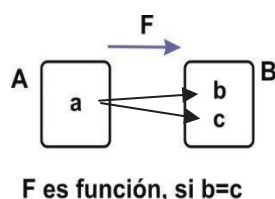
servicio el bus de la empresa. Aquí la necesidad que existan dos conjuntos $A=\{1,2,3,\dots,n\}$; cuyos elementos corresponden a **un único elemento en B**, esta correspondencia puede ser definida por un conjunto de pares ordenados, $\{(1,80), (2,160), (3,240), (4,320), \dots, (n,80n)\}$.

Denominándose esta clase de Relación especial **FUNCIÓN**.

a. Definición

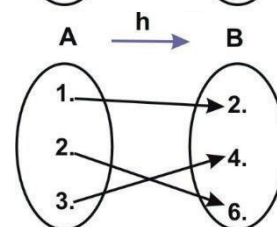
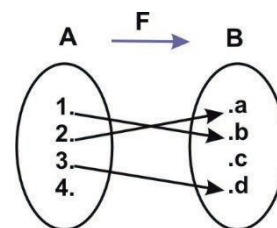
Dados dos conjuntos A y B, la relación binaria F de A en B le llamaremos función de A en B, si y sólo si verifica:

- ✓ $F \subseteq A \times B$
- ✓ $(a,b) \in F \wedge (a,c) \in F \Rightarrow b=c$

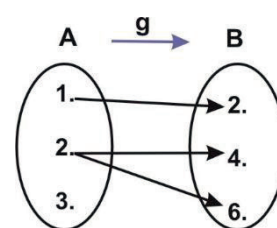


Observaciones

1. No debe existir en F, dos ó más pares ordenados distintos con la primera componente, es decir gráficamente de cada elemento de A debe salir a lo máximo una flecha, para un único elemento en B.
2. Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.
3. A "F" se le puede expresar como $F=\{(x,y) \in R \times R / y=F(x)\}$, donde $y=F(x)$ es la regla correspondencia.



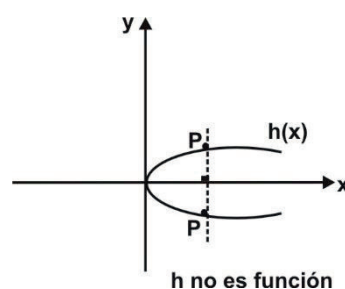
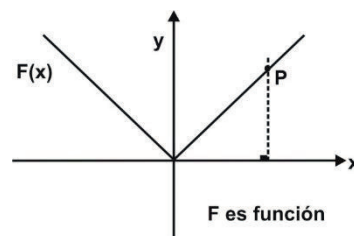
h es función



g no es función

b. Definición Geométrica

F es función si toda recta perpendicular al eje x corta a la gráfica de F en un solo punto.



3.3.1. Dominio y Rango de una Función

Situación Problemática

El profesor Luis debe salir de viaje de Chiclayo a Lima, por eso debe saber entre cosas, el consumo de petróleo Diesel



de su vehículo en función de la distancia que tendrá que recorrer. Estos cálculos se muestran a continuación.

Distancia (Km)	Consumo (galones)
3	1
6	2
90	30
170	50
350	80

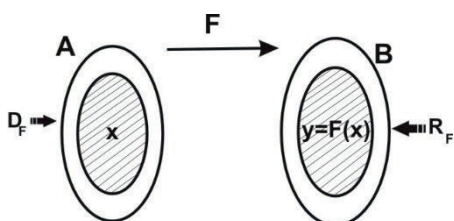
La situación anterior expresa la relación de elementos de un conjunto con respecto a elementos de otro conjunto; a quienes llamaremos Dominio y Rango respectivamente.

- El **Dominio** de una función es el conjunto de todas las primeras componentes y se denota por:

$$D_F = \{x \in A / \exists y \in B \wedge (x, y) \in F\} \subset A$$

- El **Rango** de una función F es el conjunto de las imágenes de todos los elementos de A , mediante F , y denotamos como:

$$R_F = \{y \in B / \exists x \in A \wedge y = F(x)\} \subset B$$



Sea $F = \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)\}$

$D_F = \{1,3,5,7\}$ $R_F = \{2,4,6,8\}$

Ejemplo 2

Sea $A = \{0,1,3,4\}$ y $B = \{-1,0,8,18\}$ y

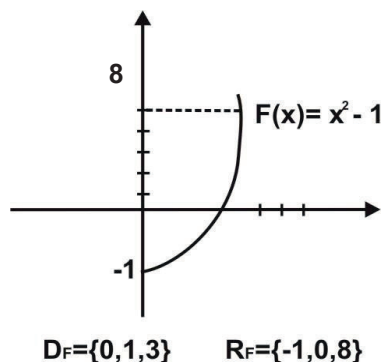
$F: A \rightarrow B$

$$x \rightarrow F(x) = x^2 - 1$$

Hallar el dominio y Rango en F .

Solución:

x	0	1	3	4	← no cumple
y	-1	0	8	15	← no cumple



Ejemplo 3

$$F(x) = \frac{x^2}{(x-2)}$$

- Cálculo del dominio; analizando los valores de "x" para que "y" sea real, se restringe el valor de $x \neq 2$.

$$\text{Dom}(F) = \mathbb{R} - \{2\}.$$

- Cálculo de $\text{Ran}(F)$, despejamos "x" en función de "y".

$$y = \frac{x^2}{(x-2)}$$

$$yx - 2y = x^2$$

$$x^2 - yx - 2y = 0$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 8y}}{2}$$

"x" será real, si $y^2 + 8y \geq 0$

$$R_F = \langle -\infty, -8 \rangle \cup [0, +\infty)$$

Ejemplo 4

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{Si } x < 4 \\ 5x - 2, & \text{Si } x \geq 4 \end{cases}$$

Cálculo del Dominio

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = x^2 - 9, & x < 4 \\ F_2(x) = 5x - 2, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$D_{F_1} = \langle -\infty, 4 \rangle$$

$$D_{F_2} = [4, +\infty)$$

Luego:

$$D_F = D_{F_1} \cup D_{F_2} = \langle -\infty, 4 \rangle \cup [4, +\infty) \\ \therefore D_F = \mathbb{R}$$

Cálculo del Rango

$$\text{Si } x < 4, F_1(x) = x^2 - 9 \Rightarrow y = x^2 - 9$$

$$x = \pm \sqrt{y+9} \Rightarrow x = -\sqrt{y+9} < 4 \\ \sqrt{y+9} > -4$$

Para que "x" sea real $y+9 \geq 0$

$$y \in [-9, +\infty)$$

$$\text{Si } x \geq 4, F_2(x) = 5x - 2$$

$$y = 5x - 2$$

$$x = \frac{y+2}{5} \geq 4$$

$$y \geq 18$$

$$y \in [18, +\infty)$$

$$R_F = [-9, +\infty) \cup [18, +\infty) = [-9, +\infty) \\ \therefore R_F = [-9, +\infty)$$

3.4. APLICACIÓN DE A EN B

A una función f , le llamaremos aplicación de A en B, si y solo si: $D_f = A$.

En forma simbólica:

Un conjunto $f \subseteq A \times B$ es una aplicación de A en B $\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B$, tal que $y = f(x)$.

Observación

Una aplicación es un caso particular de una función. Luego toda aplicación, es una función, pero toda función no siempre es una aplicación.

Ejemplo:

Sea $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, calculando $A \times B$.

$$A \times B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6), (5,2), (5,4), (5,6)\}$$

- a) El conjunto $f = \{(1,4), (3,2)\}$ es función donde $D_f = \{1,3\}$ y $R_f = \{4,2\}$ pero f no es una aplicación de A en B puesto que $D_f \neq A$.
- b) El conjunto $f = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ es una función donde: $D_f = \{1, 3, 5\}$ y $R_f = \{2,4,6\}$ como $D_f = A$ entonces f es una aplicación de A en B.

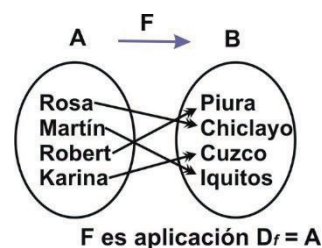
Situación Problemática

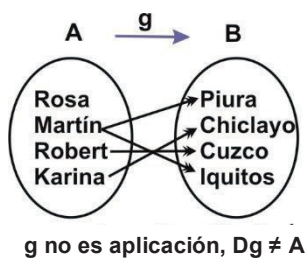
El departamento de sociología de la Universidad nacional Pedro Ruiz Gallo desea estudiar los rasgos culturales de un grupo de estudiantes de diversas regiones del país, se consideran los siguientes conjuntos.

$$A = \{\text{Rosa, Martín, Robert, Karina}\}$$

$$B = \{\text{Piura, Chiclayo, Cuzco, Iquitos}\}$$

Expresar dicho estudio como una aplicación

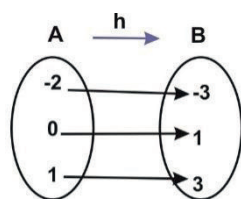




Ejemplos:

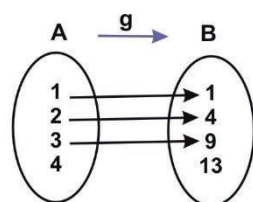
$$h: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow F(x) = 2x + 1$$



$$g: A \rightarrow B$$

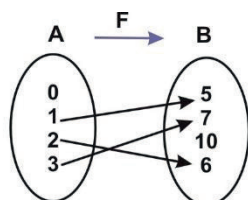
$$x \rightarrow F(x) = x^2$$



$$F: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow F(x) = |x| + 4$$

$$\text{si } 0 < x \leq 3, x \in \mathbb{Z}^+$$



¿Cómo identificar una aplicación?

$\forall x \in A$ debe salir a lo máximo una flecha que tenga sólo una imagen en B.

3.5. FUNCIONES ESPECIALES

1. Función Constante

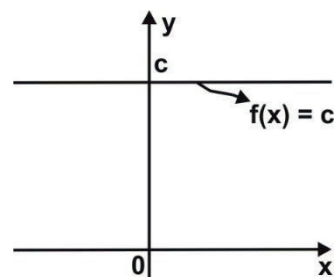
A la función f , le llamaremos función constante, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = c, \text{ donde } c \text{ es una constante}$$

También a la función constante, se puede definir por:

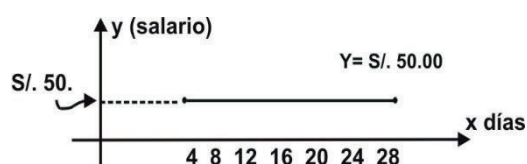
$$f(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = c, c \text{ constante}\}$$

Donde su dominio es $D_f = \mathbb{R}$, su rango es $R_f = \{c\}$ y su gráfica es:



Situación Problemática

La Empresa "Editorial Nava" contrata a un empleado por 24 días, pagándole S/. 50.00 diariamente. Si dicho empleado comienza a trabajar el día 4 de Agosto. Expresar mediante la función constante tal situación.

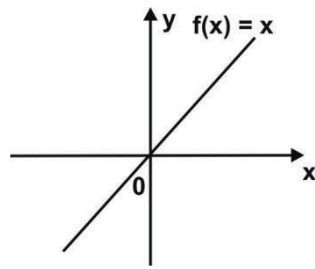


2. Función Identidad

A la función f , le llamaremos función identidad, si su regla de corresponde es:

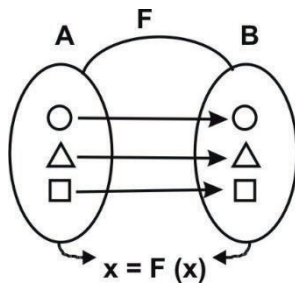
$$f(x) = x$$

y su gráfica es:



También a la función identidad se define:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x\}, \text{ donde } D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}$$



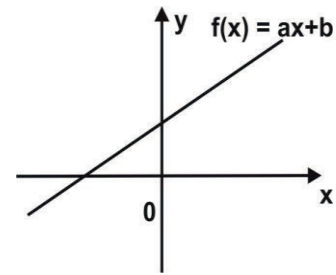
3. Función Lineal

A la función f , le llamaremos función lineal, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = ax + b$$

Donde a, b son constantes y $a \neq 0$. También a la función lineal se puede expresar en la forma:

$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = ax + b\}$, donde $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, cuya gráfica es:



Situación Problemática

La Empresa "San Juan" que se dedica a la producción de Jugos "El Nectarito" paga por costos indirectos (transporte, envase, etc.) La suma de S/.400.00 por semana y otros costos llegan a los S/.3 por cada unidad producida. Encuentre la expresión del costo total por semana para cada unidad producida.

Solución:

Sea C , la función costo total, la que puede ser expresada por:

$$C(x) = 3x + 400$$

Si $x = 1$ (semana)

$$C(1) = 3(1) + 400 = 403$$

La empresa tiene un costo total de S/. 403 semanal por unidad producida.

4. Función Raíz Cuadrada

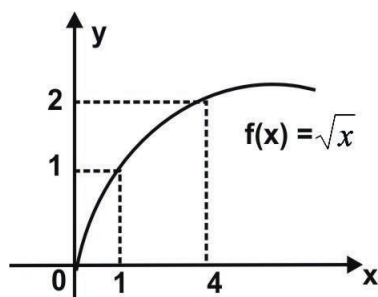
A la función f , le llamaremos función raíz cuadrada, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

También se puede expresar en la forma:

$$f(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x}\}$$

Donde $D_f = \mathbb{R}^+$ y $R_f = [0, +\infty)$



Situación Problemática

La Librería “Nova” tiene registrada la demanda de banderines, los que está ofertando con descuento a mayor demanda. Tal registro se muestra en la siguiente tabla:

Precio (S/.)	Venta
1.00	1
2.00	4
3.00	9
4.00	16
.	.
.	.
.	.

¿Cuál es el registro que tiene la librería por la venta de 64 banderines?

Solución:

La demanda de banderines sigue una ecuación $y = \sqrt{x}$.

Por lo que si $X = 64$ banderines, entonces se tendrá como ingreso S/. 8.00

$$Y = \sqrt{x} = \sqrt{64} = 8 \quad Y = \text{S/. } 8.00$$

5. Función Valor Absoluto

Situación Problemática

Jorge, gerente de la Compañía “Forplast” viaja constantemente a las ciudades de Huancayo y Chimbote. En uno de sus viajes ha constatado que en un determinado lugar “x” viajando a la ciudad de Huancayo esta a 180mt sobre el nivel del mar y viajando a la ciudad de Chimbote en un lugar “y” está a 180 mt. debajo del nivel del mar; tal como lo muestra el siguiente gráfico.



Del gráfico anterior, nos interesa analizar dos situaciones:

1° Cuando Jorge está en “x”, nos interesa la **distancia** de “x” al punto “N” sobre el nivel del mar, siendo esta distancia 180 mt.

2° Cuando Jorge está en “y”, nos interesa la **distancia** de “y” al punto “M” (debajo del nivel del mar), siendo esta distancia 180 mt.

Por lo expuesto, la **DISTANCIA** del lugar “x” y del lugar “y” a la línea nivel del mar (línea de referencia) es lo que denominaremos **Valor Absoluto** (punto de vista geométrico).

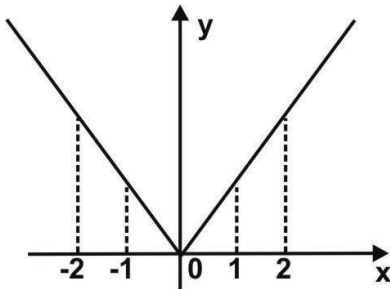
A la función f , la llamaremos función valor absoluto, si su regla de correspondencia es:

$$f(x)=|x|, \text{ donde } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

También se puede expresar en la forma:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x|\}$$

Donde $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = [0, +\infty)$ y su gráfica es:



Ejemplo

Determinar el dominio y graficar la función

$$f(x) = |x| + |x-1|$$

Solución:

Por definición del valor absoluto se tiene:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Ahora calculando las reglas de correspondencia de $f(x)$

$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow |x| = -x, \quad |x-1| = 1-x$$

Como:

$$f(x) = |x| + |x-1| \Rightarrow f(x) = -x + 1 - x =$$

$$1-2x, \text{ para } x < 0.$$

$$\text{Si } 0 \leq x < 1 \Rightarrow |x| = x, \quad |x-1| = 1-x$$

Como:

$$f(x) = |x| + |x-1| = x + 1 - x = 1 \Rightarrow f(x) = 1$$

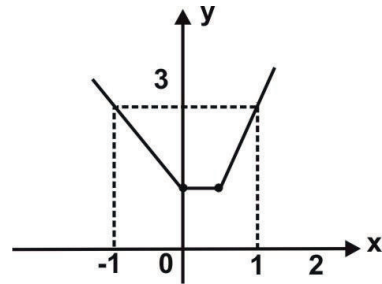
para $0 \leq x < 1$.

$$\text{Si } x \geq 1 \Rightarrow |x| = x, \quad |x-1| = x-1$$

Como:

$$f(x) = |x| + |x-1| = x + x - 1 = 2x - 1 \Rightarrow f(x) =$$

$$2x-1, \text{ para } x \geq 1$$



La función toma la forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

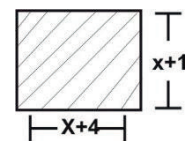
Su dominio $D_f = \mathbb{R}$ y su rango es:

$$R_f = [1, +\infty)$$

6. Función Cuadrática

Situación Problemática

Los alumnos del quinto "B" del colegio "San Jorge", tienen programado ejecutar su proyecto del biohuerto "Cultivos alternativos de pan llevar en la Región Lambayeque". Para esto disponen un terreno de 28 m^2 como se muestra en el siguiente gráfico. Hallar las dimensiones de dicho terreno.



Solución:

De la Geometría plana, sabemos que:

$$\text{Área} = \text{Base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Área} = (x + 4)(x + 1)$$

$$28 = x^2 + 5x + 4$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \text{ (expresión cuadrática)}$$

$$(x + 8)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 8) = 0 \text{ ó } (x - 3) = 0$$

(propiedad de números reales).

Hallamos las dimensiones de la base y altura con $x = 3$.

$$\text{Base} = B = x + 4 = 3 + 4 = 7 \text{ mt.}$$

$$\text{Altura} = A = x + 1 = 3 + 1 = 4 \text{ mt.}$$

Las dimensiones son 7 y 4 mts respectivamente.

Ahora estudiemos las expresiones denominadas cuadráticas, veamos.

A la función f , le llamaremos función cuadrática, si su correspondencia es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c, \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Y se expresa así:

$$f(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = ax^2 + bx + c, \\ a, b, c, \in \mathbb{R}, a \neq 0\}.$$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola con eje perpendicular al eje x en el cual se presenta dos casos.

Si $a > 0$ la gráfica se abre hacia arriba.

Si $a < 0$ la gráfica se abre hacia abajo.

El dominio de la función cuadrática es:

$D_f = \mathbb{R}$, el rango se determina completando cuadrados.

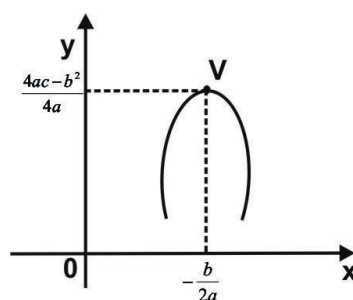
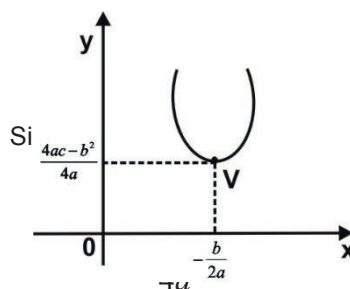
$$\text{Como } f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Luego el vértice de la parábola es:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$



Si $a < 0$ se tiene:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$$

Ejemplo:

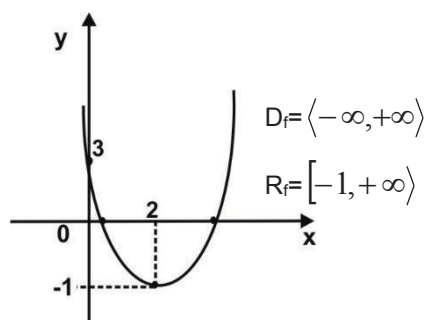
$$F(x) = x^2 - 4x + 3$$

Completando cuadrados

$$F(x) = (x - 2)^2 - 1$$

El vértice de la parábola es $V(2, -1)$.

$1 > 0$, la parábola se abre hacia arriba.



3.6. OPERACIONES CON FUNCIONES

Consideramos dos funciones reales de variable real, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si $D_f \cap D_g \neq \emptyset$, entonces:

a. Suma de Funciones

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente, entonces a la suma de f y g denotado por $f + g$ se define:

$$i) D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$ii) (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$$

b. Diferencia de Funciones

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente entonces a la diferencia de f y g denotada por $f - g$ se define:

$$i) D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$ii) (f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$$

c. Multiplicación de Funciones

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente entonces a la multiplicación de f y g denotada por $f \cdot g$ se define:

$$i) D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$ii) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$$

d. Cociente de Funciones

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente entonces el cociente de f y g denotada por f/g se define:

$$i) D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g / g(x) = 0\}$$

$$ii) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in D_{f/g}$$

Ejemplo: Dado las funciones:

$$f = \{(-1,2), (0,1), (1,2), (2,5)\}$$

$$g = \{(0,3), (1,0), (2,0), (3,6), (4,8)\}$$

Hallar: a) $f + g$, b) $f - g$ c) fg d) f/g

Solución:

1. En primer lugar, hallemos la intersección de los dominios de f y g

Se tiene:

$$Dom(f) = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$Dom(g) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$Dom(f) \cap Dom(g) = \{0, 1, 2\}$$

2. En segundo lugar, hagamos las operaciones que se piden:

$$a) (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$b) (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$c) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$d) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g / g(x) = 0\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{0, 1, 2\} - \{1, 2\} = \{0\}$$

$$\therefore x = 0 \rightarrow \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{3} \rightarrow \left(0, \frac{1}{3}\right) \in \frac{f}{g}$$

Ejemplo:

Dadas las funciones:

$$F(x) = \begin{cases} x + 3, & x \in \langle -4, 0 \rangle \\ 3x + 2, & x \in \langle 0, 5 \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \in [-3, 2] \\ 2 - x, & x \in \langle 2, 8 \rangle \end{cases}$$

Hallar $F+g$, $F-g$, $F \cdot g$ y $\frac{F}{g}$

Solución:

1º Representar gráficamente en una recta horizontal, cada función con sus dominios y sus imágenes respectivamente.

2º Buscar la intersección de los dominios que se pueden apreciar en la gráfica del paso 1.

$$D_f \cap D_g = [-3,0] \cup \langle 0,2 \rangle \cup \langle 2,5 \rangle$$

3º Como existen las intersecciones de los dominios de las funciones, entonces operamos a sumar, (restar, multiplicar o dividir) las imágenes de las funciones, Esta operación se realiza con todos los intervalos.

4º Con los intervalos del paso 2, se operan las imágenes de F y g, obteniéndose:

$$(F+g)(x) = \begin{cases} (x+3) + (2x-4) = 3x-1, & \text{si } x \in [-3,0] \\ (3x+2) + (2x-4) = 5x-2, & \text{si } x \in \langle 0,2 \rangle \\ (3x+2) + (2-x) = 2x+4, & \text{si } x \in \langle 2,5 \rangle \end{cases}$$

$$(F \cdot g)(x) = \begin{cases} (x+3)(2x-4) = 2x^2+2x-12, & \text{si } x \in [-3,0] \\ (3x+2)(2x-4) = 6x^2-8x-8, & \text{si } x \in \langle 0,2 \rangle \\ (3x+2)(2-x) = -3x^2+4x+4, & \text{si } x \in \langle 2,5 \rangle \end{cases}$$

Hallamos la división, definiendo el dominio

$$D_{\frac{F}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g / g(x)=0\}$$

$$D_{\frac{F}{g}} = [-3,0] \cup \langle 0,2 \rangle \cup \langle 2,5 \rangle - \{2\}$$

3.7. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Definición.- Dadas las funciones f y g, tales que: $f: A \rightarrow B$; $g: B \rightarrow C$ y que $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, entonces la función compuesta g o f es aquella función definida por:

$$i) \quad D_{g \circ f} = \{x/x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$

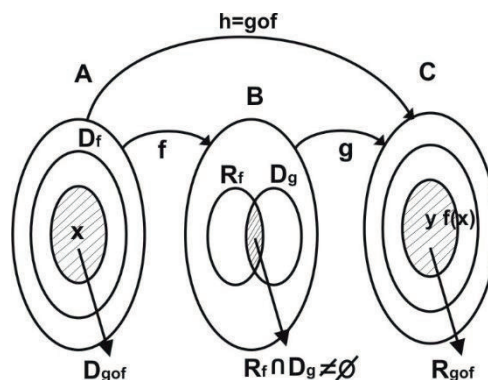
ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es la regla de la correspondencia.

Observación:

Para que exista la composición de funciones g o f es necesario que:

$$R_f \cap D_g \neq \emptyset$$

Ilustración Gráfica



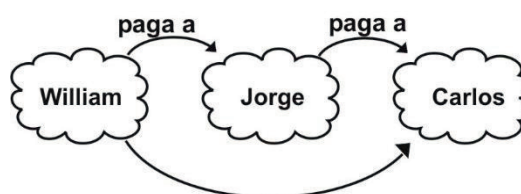
En esta representación gráfica se tiene:

$$i) \quad D_{g \circ f} \subseteq D_f \subseteq A$$

$$ii) \quad R_{g \circ f} \subseteq R_g \subseteq C$$

Situación Problemática

En la vida hay problemas que se pueden solucionar a través de nexos, tal es el caso de la composición de funciones, veamos: William le debe a Jorge S/. 20.00; a su vez Jorge le debe S/. 20.00 a Carlos. Cierta día se encuentran para saldar la deuda ¿Es necesario que Jorge asista al encuentro? No necesariamente Si William y Carlos se conocen bien podría William darle S/. 20.00 a Carlos y todo quedaría solucionado.



1. Dadas las funciones definidas por:
 $f = \{(0,0), (4,3), (2,4), (-3,2), (3,-1)\}$ y
 $g = \{(6,2), (3,4), (2,0), (4,7)\}$

Calcular $F \circ g$

Calculando:

$D_{f \circ g}$ es decir:

$$D_{f \circ g} = \{x/x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

$D_g = \{$	$2,$	$3,$	$4,$	$6\}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$	$g(6)$
	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$
	0	4	7	2
	$\underbrace{\hspace{10em}}$			

Veremos cuales pertenecen al D_f

Se observa que:

$$0 \in D_f, 4 \in D_f, 2 \in D_f,$$

Entonces $D_{f \circ g} = \{2, 3, 6\}$

Ahora calculamos los elementos de $f \circ g$.

$$\therefore F \circ g = \{(2,0), (3,3), (6,4)\}$$

2. Composición de Funciones

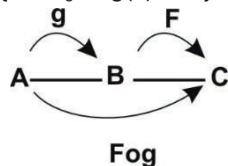
$$\text{Si } F(x) = \sqrt{x+4}, x \in [0,6]$$

$$g(x) = x^2 + 2, x \in [-1,3]$$

Solución:

De acuerdo a la definición se debe cumplir.

$$i. D_{f \circ g} = \{x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$



Hallamos el $D_{f \circ g}$

$$D_{f \circ g} = \{x \in [-1,3] \wedge x^2 + 2 \in [0,6]\}$$

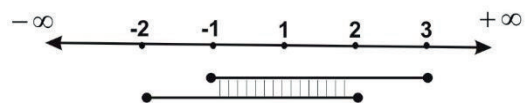
$$-1 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq x^2 + 2 \leq 6$$

$$-1 \leq x \leq 3 \wedge -2 \leq x^2 \leq 4$$

$$-1 \leq x \leq 3 \wedge \underbrace{-2 \leq x^2}_{\vee} \wedge x^2 \leq 4$$

$$-1 \leq x \leq 3 \wedge x^2 \leq 4$$

$$-1 \leq x \leq 3 \wedge -2 \leq x \leq 2$$



$$D_{f \circ g} = [-1, 2]$$

$$ii. (F \circ g)(x) = F(g(x))$$

$$\text{Si } F(x) = \sqrt{x+4}$$

Entonces:

$$F(g(x)) = \sqrt{g(x)+4}$$

$$F(g(x)) = \sqrt{x^2 + 2 + 4}$$

$$F(g(x)) = \sqrt{x^2 + 6}, x \in [-1, 2]$$

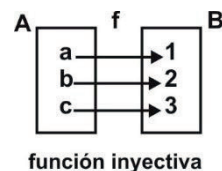
3.8. FUNCIONES : INYECTIVAS, SURYECTIVAS Y BIYECTIVAS

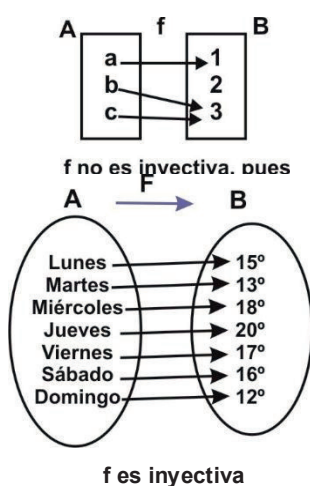
a) Función Inyectiva

La $f: A \rightarrow B$ es inyectiva (univalente) si a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango, es decir, si existen dos elementos $x_1, x_2 \in D_f$ distintos $x_1 \neq x_2$ cuyas imágenes son distintas $f(x_1) \neq f(x_2)$ lo que es equivalente a decir:

Si $x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ que es la forma más práctica para determinar si una función es inyectiva.

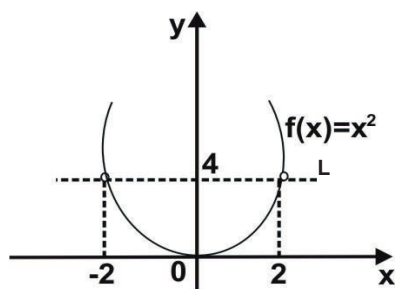
Ejemplo:



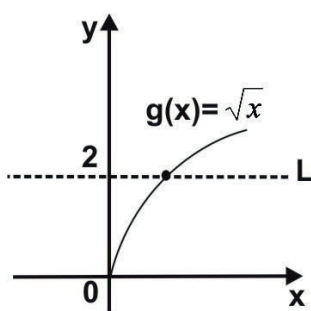


Observación.- En forma gráfica se puede determinar si una función es inyectiva o no, para esto tracemos una recta paralela al eje X, si dicha recta corta a la gráfica en dos puntos o más, entonces la función f no es inyectiva y si corta en un solo punto, entonces la función f es inyectiva.

Ejemplo: Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$



f no es función inyectiva

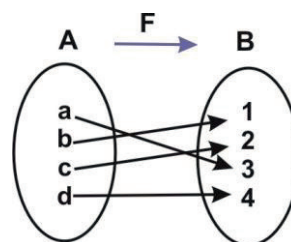
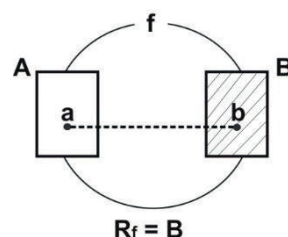


g es inyectiva

b) Función Suryectiva

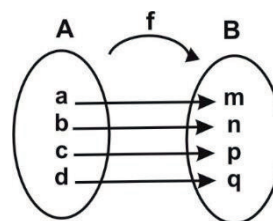
La función $F: A \rightarrow B$ es suryectiva (o sobre) si y solo sí, $\forall y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$; esto quiere decir que todo elemento de B es imagen por lo menos de un elemento de A es decir que $f: A \rightarrow B$ es suryectiva Si $R_f = B$.

Observación.- F no es suryectiva si sobran elementos en el conjunto de llegada (B).

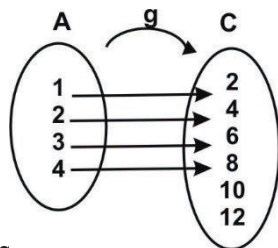


c) Función Biyectiva

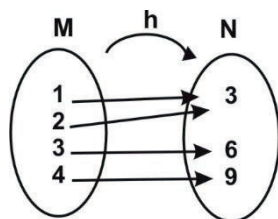
La función $f: A \rightarrow B$ se llama función biyectiva, si la función es inyectiva y suryectiva simultáneamente.



1. f es inyectiva
2. f es suryectiva
3. f es biyectiva



1. g es inyectiva
2. g no es suryectiva
3. g no es biyectiva



1. h no es inyectiva porque $3 \in N$ tiene dos pre imágenes 1 y 2.
2. h es suryectiva
3. h no es biyectiva

Ejemplo:

Determinar la función:

$$F: [0, 2) \rightarrow (-\infty, 0]$$

$$x \rightarrow F(x) = \frac{x}{x-2}$$

Sea biyectiva.

Solución:

1° Comprobemos si F es inyectiva

$$F(x_1) = F(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{x_1}{x_1-2} \rightarrow xx_1 - 2x = x_1x - 2x_1$$

$$-2x = -2x_1 \rightarrow x = x_1 \therefore F \text{ es inyectiva}$$

2° Comprobamos si F es suryectiva

$$y = \frac{x}{x-2} \Rightarrow x = \frac{2y}{y-1} \in [0, 2)$$

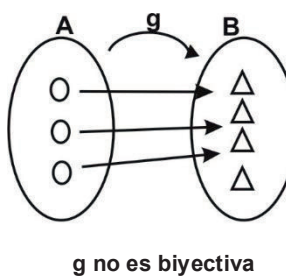
$$0 \leq \frac{2y}{y-1} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2y}{y-1} \wedge \frac{2y}{y-1} < 2$$

$$0 \leq \frac{2y}{y-1} \wedge \frac{1}{y-1} < 0$$

$$\text{Luego } y \in \langle -\infty, 0 \rangle = R_f$$

Como F es inyectiva y suryectiva, entonces es biyectiva.

Ejemplo:



3.9. INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Situación Problemática

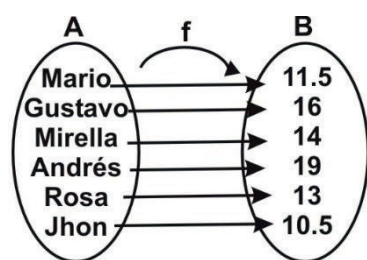
En la evaluación del curso de matemática básica, se obtuvieron los siguientes resultados mostrados en la siguiente tabla. Se estableció que aprobaría el examen el alumno que obtendría una nota mayor de 10.5.

Alumno	Puntaje
Mario	11.50
Gustavo	16
Mirella	14
Andrés	19
Rosa	13
Jhon	10.5

Se definió la función:

F: “.....aprobó el examen.....”

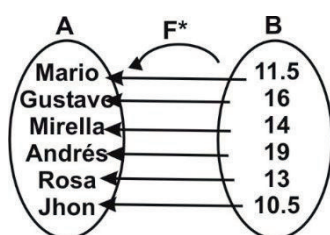
Representando “f” en un diagrama sagital.



Se observa que F es univalente o inyectiva.
Aquellas funciones que cumplen tal condición
se dice que tienen Función Inversa.

A partir de F, se puede definir una correspondencia inversa a la que llamaremos **FUNCIÓN INVERSA**. Del ejemplo anterior se establece:

F⁻¹ ó F*: “.....fue aprobado por.....”



- a. **Definición.-** Consideremos la función:
 $f=\{(x,f(x))/x \in D_f\}$ con dominio D_f y rango R_f
entonces diremos que existe la función inversa de f, si y solo si, f es inyectiva. A la función inversa denotaremos por f^* ó f^{-1} , la cual es definida en la forma siguiente:

$$f^*=\{(f(x),x)/x \in D_f\}$$

Donde:

$$D_{f^*}=R_f \text{ y } R_{f^*}=D_f$$

Ejemplo:

Consideremos una función inyectiva

$f=\{(1,3), (2,5),(4,7),(6,9),(8,11)\}$ entonces

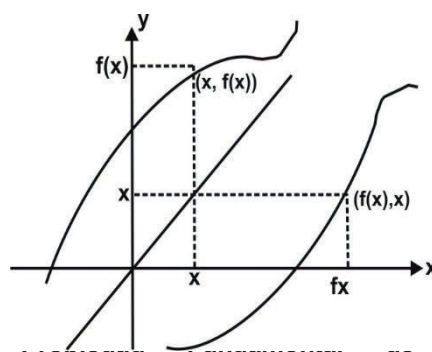
la función inversa de f es:

$f^*=\{(3,1), (5,2), (7,4), (9,6), (11,8)\}$ donde

$D_{f^*}=\{3,5,7,9,11\}=R_f$ y $R_{f^*}=\{1,2,4,6,8\}=D_f$

b. Gráfico de la función Inversa

Consideremos una función f y su función f^* , el gráfico de la función inversa f^* es simétrica a la función f con respecto a la función identidad $I(x)=x$ por tal motivo dicho gráfico se obtiene por reflexión con respecto a la recta $I(x)=x$.



c. las

Funciones Inversas

Si $f: A \rightarrow B$ es una función inyectiva y f^* :

$B \rightarrow A$ es la función inversa de f entonces:

$$f^*(f(x))=x, \forall x \in D_f$$

$$f(f^*(x))=x, \forall x \in D_{f^*}$$

d. Cálculo de la Función Inversa

Sea $f: A \rightarrow B$ inyectiva, entonces a la función inversa $f^*: B \rightarrow A$ se puede hallar resolviendo la ecuación:

$$f(f^*(x))=x$$

Ejemplo:

Sea F una función real de variable real

definida por $F(x)=\frac{2x+1}{x-2}, x \neq 2$.

Determinar su inversa, si existe.

Solución:

Para determinar si existe la inversa de F debemos probar que $F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (inyectividad).

En efecto:

$$\frac{2x_1 + 1}{x_1 - 2} = \frac{2x_2 + 1}{x_2 - 2}$$

$$2x_1x_2 + x_2 - 4x_1 - 2 = 2x_1x_2 - 4x_2 + x_1 - 2$$

$$x_2 + 4x_2 = x_1 + 4x_1$$

$$5x_2 = 5x_1 \rightarrow x_1 = x_2 \text{ si cumple}$$

F es inyectiva, entonces tiene inversa.

Calculamos la inversa, con la ecuación

$$F(F^*(x)) = x.$$

$$\frac{2F^*(x) + 1}{F^*(x) - 2} = x$$

$$2F^*(x) + 1 = xF^*(x) - 2x$$

$$2F^*(x) - xF^*(x) = -1 - 2x$$

$$F^*(x)(2-x) = -1 - 2x$$

$$F^*(x) = \frac{-(1+2x)}{-(x-2)} \Rightarrow F^*(x) = \frac{2x+1}{x-2}, x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

3.10. EJERCICIOS DESARROLLADOS**1. Sean los conjuntos**

$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$ hallar las relaciones

$$R_1 = \{(x, y), \in A \times B / x > y\}$$

$$R_2 = \{(x, y), \in A \times B / x \cdot y = 6\}$$

Solución :

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (6, 1), (6, 3), (6, 5), (6, 7)\}.$$

$$R_1 = \{(2, 1), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\} \subset A \times B$$

$$D_{R_1} = \{2, 4, 6\} \quad R_{R_1} = \{1, 3, 5\}$$

$$R_2 = \{(2, 3), (6, 1)\} \subset A \times B$$

$$D_{R_2} = \{2, 6\} \quad R_{R_2} = \{1, 3\}$$

2. Encontrar el rango de la función

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}, x \in \langle -2, 5 \rangle$$

Solución:

• El $D_F = \langle -2, 5 \rangle$.

• Para hallar el rango; expresamos "x" en función de "y"

$$F(x) = y = \frac{x+3}{x+2}$$

$$yx + 2y = x + 3$$

$$yx - x = 3 - 2y$$

$$x(y-1) = 3 - 2y$$

$$x = \frac{3-2y}{y-1}$$

Como: $x \in \langle -2, 5 \rangle$

$$\text{Entonces: } -2 < \frac{3-2y}{y-1} < 5$$

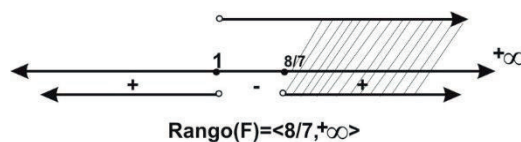
$$-2 < \frac{3-2y}{y-1} \wedge \frac{3-2y}{y-1} < 5$$

$$0 < \frac{3-2y}{y-1} + 2 \wedge \frac{3-2y}{y-1} - 5 < 0$$

$$0 < \frac{3-2y+2y-2}{y-1} \wedge \frac{3-2y-5y+5}{y-1} < 0$$

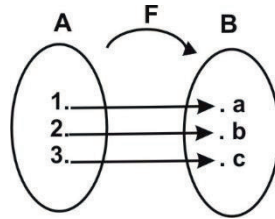
$$0 < \frac{1}{y-1} \wedge \frac{-7y+8}{y-1} < 0$$

$$0 < \frac{1}{y-1} \wedge \frac{7y-8}{y-1} > 0$$

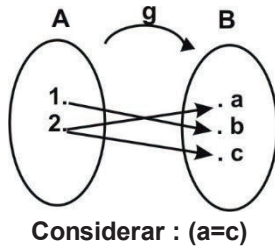


3. Indicar cuáles son funciones y aplicaciones en cada caso:

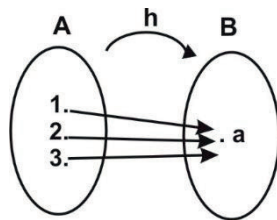
a)



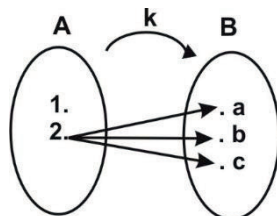
b)



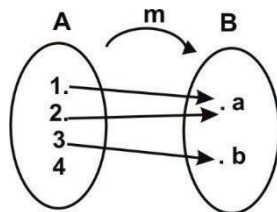
c)



d)



e)



Solución:

a. F es función; pues a cada elemento de A, le corresponde un único elemento en B, F es aplicación porque $\text{Dom}(F)=\{1,2,3\}=A$.

b. g es función, porque (2,a), (2,c); $a=c$, g es aplicación porque $\text{Dom}(F)=\{1,2\}=A$.

c. h es función y también es aplicación.

d. k no es función; además no es aplicación pues $\text{Dom}(F)=\{2\} \neq A$

e. m es función, pero no es aplicación, porque $\text{Dom}(m)=\{1,2,3\} \neq A$.

4. Hallar $F+g$, $F-g$, $F \cdot g$ y $\frac{F}{g}$

Si $F(x)=2x+1$, si $x \geq -1$ y $g(x)=3x+1$, si $x \leq 8$

F y g son funciones en $\mathbb{R}$.

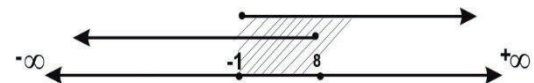
Solución:

Paso1.- Calculamos el dominio de F y g respectivamente.

$$D_F = [-1, +\infty] \text{ y } D_g = (-\infty, 8]$$

Luego calculamos el dominio de la suma $f+g$.

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$



$$\text{Luego: } D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-1, 8]$$

Paso2.- Ahora definimos la $F+g$, $F-g$, $F \cdot g$ y $\frac{F}{g}$ en el intervalo $[-1, 8]$.

$\frac{F}{g}$ en el intervalo $[-1, 8]$.

Suma

$$(F+g)(x)=F(x)+g(x)=(2x+1)+(3x+1)=5x+2$$

$$(F+g)=5x+2, \text{ si } x \in [-1, 8].$$

Diferencia

$$(F-g)(x)=F(x)-g(x)=(2x+1)-(3x+1)= -x$$

$$(F-g)= -x, \text{ si } x \in [-1, 8].$$

Producto

$$(F \cdot g)(x) = F(x) \cdot g(x) = (2x+1) \cdot (3x+1)$$

$$(F \cdot g) = 6x^2 + 5x + 1, \text{ si } x \in [-1, 8].$$

División

Hallamos el dominio de $\frac{F}{g}$

$$D_{\frac{F}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g / g(x) = 0\}$$

$$D_{\frac{F}{g}} = [-1, 8] - \{x = -\frac{1}{3} \in D_g / g(-\frac{1}{3}) = 0\}$$

Luego :

$$\left(\frac{F}{g}\right)(x) = \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{2x+1}{3x+1};$$

$$\text{Si } x \in [-1, 8] - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

$$\left(\frac{F}{g}\right)(x) = \frac{2x+1}{3x+1};$$

$$\text{Si } x \in [-1, -1/3) \cup (-1/3, 8]$$

5. Hallar Fog ; dominio y rango, donde $F(x) = \sqrt{3x}$, $g(x) = 2x-1$.

Solución

Paso1.- Calculamos el dominio de Fog.

$$D_{\text{fog}} = \{x/x \in D_g / g(x) \in D_f\}$$

$$D_{\text{fog}} = \{x / x \in R \wedge 2x-1 \in [0, +\infty)\}$$

$$D_{\text{fog}} = \{x / x \in R \wedge 0 \leq 2x-1 < +\infty\}$$

$$D_{\text{fog}} = \left\{x / x \in R \wedge \frac{1}{2} \leq x < +\infty\right\}$$

$$D_{\text{fog}} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Paso2.- Calculamos (Fog) (x)

$$\text{Si: } F(x) = \sqrt{3x}$$

$$(Fog)(x) = F(g(x)) = \sqrt{3g(x)} = \sqrt{3(2x-1)}$$

$$F(g(x)) = \sqrt{6x-3}$$

Paso3.- Calculamos el rango de Fog.

A partir $x \in D_{\text{fog}}$, hallaremos $\sqrt{6x-3}$

$$x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < +\infty \quad (x6)$$

$$3 \leq 6x < +\infty \quad (-3)$$

$$0 \leq 6x-3 < +\infty$$

$$0 \leq \sqrt{6x-3} < +\infty \Rightarrow R_{\text{fog}} = [0, +\infty)$$

6. Hallar la inversa $F^*(x)$ si existe de la función $F(x) = x^2 - 2x - 1$, $x \geq 2$

Solución:

Paso1.- Probaremos que $F(x)$ es inyectiva.

$$F(x) = (x-1)^2 - 2$$

$$F(x_1) = F(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

$$(x_1-1)^2 - 2 = (x_2-1)^2 - 2$$

$$x_1-1 = x_2-1 \quad \text{ó} \quad x_1-1 = -(x_2-1)$$

$$x_1 = x_2 \quad \text{ó} \quad x_1 + x_2 = 2$$

$\therefore$ Si $x_1 = x_2$, entonces $F(x)$ es inyectiva además tiene inversa.

Paso2.-

$$\text{De } F(x) = x^2 - 2x - 1, x \geq 2$$

Despejamos "x"

$$y = (x-1)^2 - 2$$

$$x = 1 + \sqrt{y+2}, x \in [2, +\infty)$$

$$2 \leq 1 + \sqrt{y+2} < +\infty$$

$$1 \leq \sqrt{y+2} < +\infty$$

$$1 \leq y + 2 < +\infty$$

$$-1 \leq y < +\infty \Rightarrow y \in [-1, +\infty)$$

$$x = 1 + \sqrt{y+2}, y \in [-1, +\infty)$$

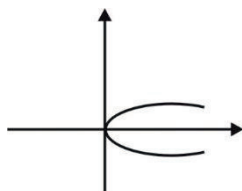
Permutamos "x" por "y" es decir:

$$y = 1 + \sqrt{x+2}, x \in [-1, +\infty)$$

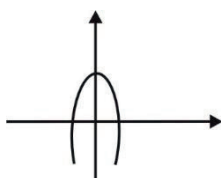
$$\therefore F^*(x) = 1 + \sqrt{x+2}, x \geq -1.$$

3.11. EJERCICIOS PROPUESTOS

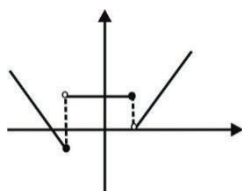
- Dado el universo $U=\{1,2,3,4\}$, y las relaciones $R_1=\{(x,y)/x=y\}$, $R_2=\{(x,y)/y=3\}$, $R_3=\{(x,y)/x \leq y\}$, (sug: $x \leq y \Leftrightarrow x < y$ ó $x=y$). Hallar: $R_3 - (R_1 \cup R_2)$.
- En $A=\{1,2,4,6,8\}$ se define $R=\{(x,y)/3 \text{ es divisor de } x+y\}$, hallar la suma de todos los elementos del rango de R.
- De las siguientes gráficas, indique las que no corresponden a una función.



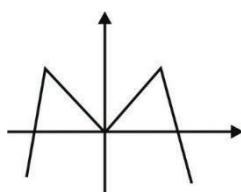
(I)



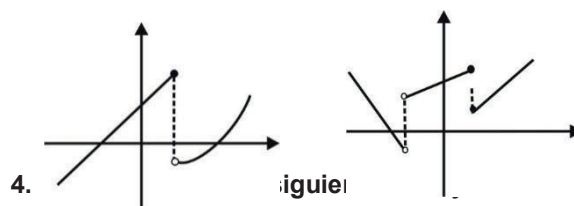
(II)



(III)



(IV)



4.

¡guíe!

determinan funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -5\}$$

$$B = \{(0,0), (1,2), (2,2), (4,5)\}$$

$$P = \{(1,3), (2,5), (1,a-1), (2,b+2), (a,b), (2b,a)\}$$

$$C = \{(x+1, y-3), (x,y) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Sean $A = \{2,4,6,8,10\}$, $B = \{a,b,c,d,e\}$

¿Cuáles de los siguientes conjuntos define aplicaciones de A en B?

$$C = \{(2,a), (4,c), (10,c), (8,e), (6,e)\}$$

$$D = \{(10,b), (8,b), (4,b), (2,b), (6,b)\}$$

- Sean F y G funciones en $\mathbb{R}$, tal que:

$$F(x) = \begin{cases} x-2, & x < -4 \\ 3, & -4 \leq x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x < 3 \\ \sqrt{x}, & x \geq 3 \end{cases}$$

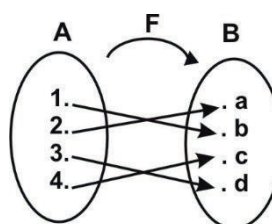
$$g(x) = \begin{cases} x+5, & x < -3 \\ 2x+1, & -3 \leq x < 2 \\ \frac{1}{x+1}, & x \geq 2 \end{cases}$$

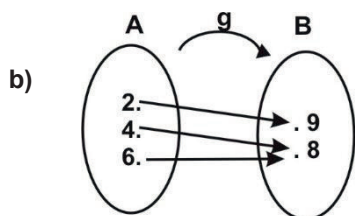
Hallar:

$$E = (f+g)(-5) + (f-g)(-2) + (f \cdot g)(1) + \left(\frac{F}{g}\right)(4)$$

- Diga cuáles de las siguientes funciones son biyectivas.

a)





c) $F: [1,4] \Rightarrow [2,11]$

Tal que: $F(x) = x^2 - 2x + 3$

Si: $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{4, 3, 2, 1\}$

d) $g = \{(a,4), (b,3), (c,2), (d,1)\}$

8. Hallar el dominio y Rango de:

a) $F(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

b) $g(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x^2 + 6x + 8}$

9. Dados los conjuntos $P = \{0,1,2,3\}$ y $Q = \{-1,0,3,7,8,9\}$ hallar:

a) $F: P \Rightarrow Q$, tal que $y = x^2 - 1$

b) Hallar D_f y R_f

c) Diagrama sagital

d) ¿f es aplicación?

10. Si la función:

$$F: (-1,1) \Rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por: } F(X) = \frac{x}{1-|x|}$$

Hallar la inversa de $F(x)$ si existe.

11. En cada uno de los siguientes casos estudiar si la relación de A en B es una función, función inyectiva, función suryectiva o biyectiva. Hallando el dominio y rango.

$$A = \{x/x \text{ es un alumno de tu aula}\}$$

$$B = \{x/x \text{ es un año comprendido entre } 1990 \text{ y } 2004\}.$$

g de A en B definida por:

g: ".....nació el año....."

UNIDAD N° 04

SISTEMA DE ECUACIONES

I. ECUACIONES

1. ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

En el tema anterior planteamos y resolvimos ecuaciones de distinto tipo, pero todas ellas con una sola incógnita. En este tema vamos a estudiar ecuaciones con dos incógnitas, que se designarán por las letras x e y .

Al igual que en las ecuaciones con una incógnita, existen varios tipos de ecuaciones con dos incógnitas, similares a aquellas.

- ✓ **Lineales.-** Sólo tienen monomios de primer grado o números. Por ejemplo:

$$3x - 5y + 8 = 0$$

- ✓ **Cuadráticas.-** Todos sus monomios son de grados menores o iguales a dos y alguno de ellos es de grado dos. Por ejemplo:

$$2x^2 - y^2 + 1 = 0$$

$$x + y^2 - 5 = 0$$

$$xy + 3 = 0$$

- ✓ **Polinómicas.-** Sus distintos sumandos son monomios de grados cualesquiera. Por ejemplo:

$$xy^2 - 3x + y^2 - 11 = 0$$

- ✓ **Radicales.-** En ellas aparece algún radical de cualquier índice. Por ejemplo:

$$\sqrt[5]{x + 2y} = 4y - 1$$

Solución de una ecuación con dos incógnitas es todo par de valores que hagan cierta la igualdad.

Por ejemplo, el par $\begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$ Es solución de la ecuación $3x + 4y - 1 = 0$

$$3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) - 1 = 0$$

Salvo algunas excepciones, una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Se dice que varias ecuaciones forman un sistema de ecuaciones cuando el objetivo es encontrar la solución o las soluciones comunes a todas ellas.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 4y = 13 \end{cases}$$

Es un sistema de ecuaciones. Su solución es $x = 5$, $y = 2$ porque es solución de cada una de las dos ecuaciones. Además, es solución única, pues no hay más soluciones comunes a ambas ecuaciones.

El sistema de ecuaciones anterior se llama lineal porque las dos ecuaciones que lo forman son lineales. Cuando una o ambas ecuaciones son cuadráticas, el sistema se llama cuadrático.

Existen tres métodos clásicos de resolución de los sistemas lineales:

a. Método de Sustitución

En esencia, este método consiste en despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en la otra. Se siguen estos pasos:

- Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
- Se sustituye el valor de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con la otra incógnita.
- Se resuelve esta ecuación.
- El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
- Hemos obtenido, así la solución.

Ejemplo:

Resolver por el método de sustitución el sistema: $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

Solución:

Despejamos y en la segunda ecuación (por ser la más sencilla de despejar).

$$y = 9 - 3x$$

Se sustituye y en la otra ecuación (en la primera, en este caso) por su valor en función de x :

$$5x - 2(9 - 3x) = 4$$

Se obtiene así una ecuación de primer grado con una incógnita. Se resuelve esa ecuación para hallar el valor de x :

$$5x - 18 + 6x = 4 \rightarrow 11x = 22 \rightarrow x = 2$$

Se sustituye el valor de x en la expresión de y , calculando su valor:

$$y = 9 - 3 \cdot 2 = 9 - 6 = 3$$

La solución del sistema es $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

EJERCICIOS

Resolver por el método de sustitución los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \begin{cases} 5x - 8y = -86 \\ -5x + 3y = 51 \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} 7x - 8y = 101 \\ 2x + y = -4 \end{cases} \\ \text{b. } \begin{cases} 2x + 8y = -86 \\ -8x - 4y = 92 \end{cases} & \text{d. } \begin{cases} -3x - 2y = 7 \\ -4x - 6y = -24 \end{cases} \end{array}$$

b. Método de Igualación

Consiste esencialmente en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones que resultan. Los pasos que hay que dar son los siguientes:

- Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.
- Se igualan las expresiones resultantes, lo cual da lugar a una ecuación con una incógnita.
- Se resuelve la ecuación.
- El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en la que aparecía despejada la otra incógnita.
- Obtenemos así la solución.

Ejemplo:

Resolver por el método de igualación el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$$

Solución:

Despejamos y en ambas ecuaciones por ser algo más fácil que despejar x:

$$\begin{aligned} y &= \frac{19 - 2x}{3} \\ y &= 23 - 4x \end{aligned}$$

Igualamos ambas expresiones obteniendo la ecuación con una incógnita:

$$\frac{19 - 2x}{3} = 23 - 4x$$

Ecuación de primer grado que ya sabemos resolver:

$$\begin{aligned} \frac{19 - 2x}{3} &= 23 - 4x \rightarrow 19 - 2x = 3(23 - 4x) \\ \rightarrow 19 - 2x &= 69 - 12x \rightarrow 10x = 50 \rightarrow x = 5. \end{aligned}$$

Sustituyendo $x=5$ en la segunda de las expresiones en las que aparecía despejada la y, se tiene:

$$y = 23 - 4 \cdot 5 = 23 - 20 = 3$$

y la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

EJERCICIOS

Resolver por el método de igualación los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \begin{cases} 4x - y = 11 \\ 2x + 3y = 37 \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = 7 \end{cases} \\ \text{b. } \begin{cases} 9x + 2y = 11 \\ -x + 8y = 67 \end{cases} & \text{d. } \begin{cases} -4x - 8y = 20 \\ -3x - 2y = 23 \end{cases} \end{array}$$

c. Método de Reducción

Se trata de preparar las dos ecuaciones para que una de las

incógnitas tenga coeficientes opuestos en ambas. Sumando las ecuaciones miembro a miembro, se obtiene una ecuación con una sola incógnita (se ha reducido el número de incógnitas).

Los pasos que se deben dar en la aplicación de este método son los siguientes:

- Se preparan las dos ecuaciones (multiplicando por los números que convengan) para que una de las incógnitas tenga coeficientes opuestos en ambas.
- Al sumar ambas ecuaciones, desaparece esa incógnita.
- Se resuelve la ecuación resultante.
- El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales. Se obtiene de este modo el valor de la otra incógnita y, en consecuencia, la solución del sistema.

Ejemplo:

Resolver por el método de reducción el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = -9 \\ 6x - 2y = 18 \end{cases}$$

Solución:

Multiplicamos la primera ecuación por -2 para que x tenga coeficientes opuestos en ambas ecuaciones. Obtenemos así el sistema equivalente:

$$\begin{cases} -6x - 10y = 18 \\ 6x - 2y = 18 \end{cases}$$

Sumando ahora ambas ecuaciones, desaparece la incógnita x y

obtenemos una ecuación con sólo una incógnita muy fácil de despejar:

$$-12y = 36 \rightarrow y = -3$$

Sustituimos ahora el valor encontrado de y en la primera ecuación inicial (daría igual hacerlo en la otra) y seguidamente despejamos x:

$$3x + 5(-3) = -9 \rightarrow 3x - 15 = -9 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

Y por tanto la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

A veces. Alguna de las ecuaciones de un sistema tiene un aspecto algo complicado. En tal caso, debemos comenzar tratando de escribirla en su forma "normal". El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo:

Resolver el sistema lineal:

$$\begin{cases} \frac{3x + 4y}{2} = x - 2 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{y} - \frac{3}{2} \end{cases}$$

Solución:

Quitamos denominadores en ambas ecuaciones multiplicando la primera por 2 y la segunda por 2y. A continuación, pasamos todas las incógnitas al primer miembro y todos los números al segundo. Después de agrupar, obtenemos:

$$a. \begin{cases} 3x + 4y = 2x - 4 \\ 2x = 2 - 3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 4y = -4 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

Seguimos ahora por el método de reducción (vale cualquier otro). Multiplicamos la primera ecuación por -2. Obtenemos el sistema equivalente.

$$\begin{cases} -2x - 8y = 8 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$-5y = 10 \rightarrow y = -2$$

Sustituimos ahora el valor encontrado de y en la ecuación $x+4y=-4$ y obtenemos:

$$x+4 \cdot (-2)=-4 \rightarrow x-8=-4 \rightarrow x=4$$

y la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Ejercicios

Resolver por el método de reducción los siguientes sistemas:

a.
$$\begin{cases} 4x - 5y = 17 \\ -9x + 8y = -22 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 7 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = 5 \\ \frac{5x}{3} - \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$$

3. NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA

Normalmente, un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas tiene una única solución. No obstante, hay excepciones. Veamos los casos que pueden darse.

a. Sistemas sin Solución

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen cosas contradictorias. Por ejemplo:

$$\text{a. } \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 7 \end{cases}$$

En ambos casos es imposible lograr que ambas igualdades sean ciertas para los mismos valores de x e y.

- En (1), si $3x - y$ es 2, difícilmente puede ser también 0.
- En (2), observa que $6x - 2y$ es el doble de $3x - y$, luego si aquél ha de ser 2, en buena lógica éste debería ser 4 y no 7, como dice la segunda ecuación.

Los sistemas como los anteriores, que no tienen solución, se llaman incompatibles.

Si tratamos de resolver un sistema incompatible por cualquiera de los métodos clásicos, llegaremos a una expresión del tipo $0=k$, siendo k un número distinto de cero, lo cual es imposible.

Ejemplo:

Resolver el sistema
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{xy} \end{cases}$$

Solución

Expresamos mediante las operaciones adecuadas el sistema en forma "normal".

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{xy} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -3x - 2y = -1 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos la igualdad $0=4$, que es ciertamente imposible. Deducimos por tanto, que el sistema es incompatible.

Un sistema sin solución se representa gráficamente como dos rectas paralelas.

b. Sistemas con Infinitas Soluciones

A veces aparecen sistemas en los que las dos ecuaciones dicen lo mismo. Es decir, son dos veces la misma ecuación. Por ejemplo:

$$(1) \begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones de cada sistema equivalen a una sola, y una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. Por ejemplo, los pares siguientes son soluciones de cualquiera de los dos sistemas anteriores:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \begin{cases} x = -6 \\ y = -5 \end{cases} \begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases} \dots$$

Sistemas como los anteriores, que admiten infinitas soluciones, se llaman indeterminados.

Si intentamos resolver por cualquier método uno de estos sistemas, llegaremos a una expresión del tipo $0=0$, indudablemente cierta.

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2(x-y-2)-4y=-4 \\ 5x-2y=4x+y \end{cases}$$

Solución

Expresamos el sistema en su forma habitual

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2(x-y-2)-4y=-4 \\ 5x-2y=4x+y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-2y-4-4y=-4 \\ 5x-2y=4x+y \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} 2x-6y=0 \\ x-3y=0 \end{cases} \xrightarrow{-2} \begin{cases} 2x-6y=0 \\ -2x+6y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones miembro a miembro, obtenemos $0 = 0$. El sistema tiene, por tanto, infinitas soluciones; por ejemplo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \begin{cases} x = -15 \\ y = -5 \end{cases} \dots$$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Los métodos de resolución estudiados para los sistemas lineales se aplican también en sistemas de ecuaciones no lineales. La única diferencia es que para cada sistema no lineal no todos los métodos son aplicables.

Como ya sabemos, sistemas de segundo grado son aquellos en los que alguna de las ecuaciones es de segundo grado.

Ejemplo:

Resolver el sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

Solución

Utilizaremos el método de sustitución. Empezamos despejando y en la primera ecuación:

$$y = 5 - 3x$$

Sustituimos dicho valor de y en la segunda ecuación. Obtenemos así una ecuación de segundo grado:

$$x^2 - (5 - 3x)^2 = 3$$

Ahora resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 25 + 30x - 9x^2 = 3 \rightarrow -8x^2 + 30x - 28 = 0$$

$$(-2) \rightarrow 4x^2 - 15x + 14 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 224}}{8} = \frac{15 \pm 1}{8} = \begin{cases} 2 \\ \frac{7}{4} \end{cases}$$

Si $x = 2 \rightarrow y = 5 - 3 \cdot 2 = 5 - 6 = -1$

Si $x = \frac{7}{4} \rightarrow y = 5 - 3 \cdot \frac{7}{4} = 5 - \frac{21}{4} = -\frac{1}{4}$

Las dos soluciones del sistema son, por tanto,

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7/14 \\ y = -1/4 \end{cases}$$

Ejemplo:

Resolver:
$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 8x^2 - y^2 = 23 \end{cases}$$

Solución:

Utilizamos el método de reducción. Multiplicamos para ello la segunda

ecuación por 3 y así eliminamos la incógnita y. Obtenemos el sistema:

$$x^2 + 3y^2 = 31$$

$$24x^2 - 3y^2 = 69$$

Sumando ambas ecuaciones, resulta:

$$25x^2 = 100 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

Sustituimos ahora ambos valores en la segunda de las ecuaciones iniciales:

Si:

$$x = 2 \rightarrow 8 \cdot 2^2 - y^2 = 23 \rightarrow 32 - y^2 = 23 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}$$

Si:

$$x = -2 \rightarrow 8 \cdot (-2)^2 - y^2 = 23 \rightarrow 32 - y^2 = 23 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}$$

Las cuatro soluciones del sistema son, por tanto:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si una sala tuviera 2m más de largo y 3m más de ancho, el área sería 40m² mayor de lo que es ahora, y si tuviera 2m menos de largo y 3m más de ancho, el área sería 8m² mayor que ahora. Hallar las dimensiones de la sala.
2. Juan compró un carro, un caballo y sus arreos por 180 u.m. El carro y los arreos costaron 60 u.m. más que el caballo, y el caballo y los arreos costaron 20 u.m. más que el carro ¿Cuánto costó el carro, cuánto el caballo, y cuánto los arreos?.
3. Hallar tres números tales que la suma del primero y el segundo excede en 46 al tercero; la suma del primero y el tercero excede en 28 al segundo, y la suma del

{

- segundo y el tercero excede en 10 al primero.
4. La suma de las dos cifras de un número es 9, y si al número se le resta 27, las cifras se invierten. Hallar el número.
 5. Un pájaro volando a favor del viento recorre 40Km/h y en contra del viento, 20Km/h. Hallar la velocidad en Km/h del pájaro en aire tranquilo y la velocidad del viento.
 6. Un hombre compró cierto número de litros. Si hubiera comprado 2 litros más por el mismo dinero, cada libro le habría costado 1 u.m. menos y si hubiera comprado 4 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado 4 u.m. más. ¿Cuántos libros compró y cuánto pagó por cada uno?.
 7. 6 Kg de café y 5 Kg de té cuestan 56 u.m., mientras que 4Kg de té y 7Kg de café cuestan 58 u.m. ¿Cuánto cuesta 1Kg de café y cuánto cuesta 1Kg de té?.
 8. Un comerciante gastó 950 u.m. en comprar 35 trajes de 30 u.m.y de 25 u.m. ¿cuántos trajes de cada precio compró?.
 9. Si al numerador de una fracción se le resta 2, el valor de la fracción es, $\frac{1}{5}$ si al denominador se resta 1 el valor de la fracción es $\frac{3}{4}$. Hallar la fracción.
 10. Roberto ganó ayer 6 u.m. más que hoy. Si lo que ganó hoy es los $\frac{2}{3}$ de lo que ganó ayer. ¿Cuánto ganó cada día?.
 11. Dos números están en la relación de 3 a 4. Si cada número se disminuye en 8, la relación es de 2 a 3. Hallar los números.

SOLUCIONES:

1. 8m de largo y 5m de ancho.
2. 80 u.m. el carro, 60 u.m., el caballo y 40 u.m. los arreos.
3. 37, 28 y 19
4. 63
5. 30 Km/h el pájaro y 10 Km/h el viento.
6. 10 libros. 6 u.m.
7. 6 u.m. 1Kg de café y 4 u.m. 1Kg de té
8. 15 de 30 y 20 u.m. de 25 u.m
9. $\frac{3}{5}$
10. 18 u.m. ayer y 12 u.m. hoy
11. 24 y 32

II. MATRICES Y SISTEMAS LINEALES

La resolución metódica de sistemas lineales con más de dos incógnitas requiere el conocimiento de la teoría de matrices.

En este capítulo aprenderás a operar con matrices, a asignar un valor al determinante de cada matriz cuadrada y, por último, a utiliza el cálculo matricial en la resolución de sistemas lineales.

Introducción Histórica

El gran desarrollo del Álgebra lineal se alcanza en el siglo XIX gracias sobre todo a los trabajos de los matemáticos británicos Sylvester y Cayley. A Sylvester se debe, en 1850, la denominación de matriz para la disposición rectangular de números actuales, y a Cayley, en 1855, el descubrimiento de la conexión entre el cambio lineal de variables en un sistema y la noción de producto de matrices.

1. Matrices : Definición y Clases

Se llama matriz de orden $m \times n$ a cualquier tabla de números que conste de m filas y n columnas.

$$A = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

El primer subíndice de cada término de la matriz indica filas y el segundo columnas. Así, el término a_{31} es el que se encuentra en la fila 3 y la columna 1. En general, a_{ij} es el término situado en la fila i y la columna j .

Cuando queremos referirnos a la matriz sin escribir la tabla, escribimos simplemente:

$$A=(a_{ij}) \text{ para } i = 1,2,\dots,m \quad j= 1,2,\dots,n$$

Por Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Es una matriz 3×4 en la que $a_{14}=a_{23}=2$; $a_{33}=-3$, etc.

Ejemplo:

El consumo en kilogramos de frutas, pescado y queso de una familia durante 1993 y 1994 se puede disponer así en forma de matriz.

	Fruta	Pescado	Queso
1993	430	157	8
1994	430	162	6

Algunos tipos de matrices son:

- ✓ **Matriz Fila.-** es una matriz que tiene una sola fila.

Ejemplo:

$$A = (2 \ 5 \ -3 \ 8) \text{ es de tamaño } 1 \times 4$$

- ✓ **Matriz Columna.-** es una matriz que tiene una sola columna.

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ es una matriz de orden } 3 \times 1.$$

- ✓ **Matriz Cuadrada.-** es una matriz con igual número de filas que de columnas.

Ejemplos:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Es una matriz de orden 3×3

Abreviadamente, se dice que una matriz cuadrada $n \times n$ es de orden n . si una matriz no es cuadrada, se llama rectangular.

- ✓ **Matriz Nula.-** es la matriz cuyos elementos son todos nulos. Se escribe 0.

Llamamos diagonal principal de una matriz al conjunto de elementos de la forma a_{ii} , para todo $i=1,\dots,n$.

Ejemplos:

En la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La diagonal principal es $\{3,8,1\}$.

- ✓ **Matriz Diagonal.-** es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos fuera de la diagonal principal.

En símbolos: $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz D es diagonal.

- ✓ **Matriz Unidad.-** es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos 1. Se la denota I.

Ejemplo:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es la matriz unidad de orden 3.

- ✓ **Matriz Rectangular.-** es una matriz cuadrada cuyos elementos, por encima o por debajo de la diagonal principal, son todos nulos.

Ejemplo:

De las siguientes matrices, S es una matriz triangular superior y T es una matriz triangular inferior.

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

De dos matrices del mismo orden $m \times n$ diremos que son iguales si lo son todos y cada uno de sus términos correspondientes.

O sea:

$$(a_{ij}) = (b_{ij}) \text{ si } a_{ij} = b_{ij} \text{ para cada } i, j$$

2. Operaciones con Matrices

Suma:

Sean (a_{ij}) y (b_{ij}) dos matrices del mismo orden $m \times n$. La matriz suma se obtiene como:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Es decir, para sumar dos matrices del mismo orden sumamos los términos correspondientes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Problemas:

1. Calcular

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Calcular

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar $A + B - C$

Multiplicación por un Número

Sea (a_{ij}) una matriz $m \times n$ y r un número real. Definimos el producto de r por la matriz (a_{ij}) como:

$$r \cdot (a_{ij}) = (r \cdot a_{ij})$$

Es decir; para multiplicar un número por una matriz se multiplica el número por cada elemento de la matriz.

Ejemplo:

$$2. \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -4 & 0 \\ 6 & -2 & 16 & 14 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES CON OPERACIONES DE MATRICES

Suma	Multiplicación por un Número
Asociativa $(A+B)+C=A+(B+C)$	Distributiva respecto de la suma $r.(a+B) = r. A + r. B$
Conmutativa $A+B = B + A$	Distributiva respecto de la suma en R $(r+s). A = r. A + s. A$
Elemento neutro Es la matriz nula, pues $A+0=A$	Asociativa mixta $(r.s). A = r. (s.A)$
Elemento simétrico La opuesta de A es $-A$ pues $A + (-A) = 0$	Neutralidad $1. A = A$

Multiplicación de Matrices

No todas las matrices pueden multiplicarse. Es necesario que la primera que multiplica sea de orden $m \times n$ y la segunda de orden $n \times p$; dicho de otra manera, sólo se pueden multiplicar dos matrices cuando el número de columnas de la primera matriz que multiplica coincide con el número de filas de la segunda. Así, la matriz resultante será de tamaño $m \times p$.

Definición

El producto de $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ por $B_{n \times p} = [b_{ij}]$ se define del siguiente modo:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p} = [C_{ij}] = (a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj})$$

Ejemplo:

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar AB

Solución:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5,3) \cdot (-8,1) & (5,3) \cdot (0,3) & (5,3) \cdot (7,2) \\ (0,5) \cdot (-8,1) & (0,5) \cdot (0,3) & (0,5) \cdot (7,2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -40+3 & 0+9 & 35+6 \\ 0+5 & 0+15 & 0+10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -37 & 9 & 41 \\ 5 & 15 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicios

Hallar el producto:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calcular:

- $A + B$
- $A + C$
- $3A - 4B$
- AB

3. La Matriz Traspuesta

Dada una matriz A , la matriz traspuesta de A es aquella cuyas filas son las columnas de A situadas en igual orden.

La traspuesta de A se designa por A^t ; y es claro que si A es de orden $m \times n$, entonces A^t es de orden $n \times m$.

$$A = (a_{ij}) \rightarrow A^t = (a_{ji})$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

DEFINICIONES

- **Matriz Simétrica.-** Es la matriz cuadrada que coincide con su traspuesta.

Es decir: A es simétrica si $A^t = A$

Por ejemplo, una matriz simétrica es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Antisimétrica.-** Es la matriz cuadrada cuya traspuesta coincide con su opuesta.

Es decir: A es antisimétrica si $A^t = -A$

La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Es antisimétrica (observa que todos los elementos de la diagonal principal son necesariamente 0).

- **Matriz Ortogonal.-** Es la matriz cuadrada cuyo producto por su traspuesta da la matriz unidad.

O sea: **A es ortogonal si $A \cdot A^t = I$**

Por ejemplo:

La matriz $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

$$\cos \alpha \quad \sin \alpha$$

es ortogonal.

III. DETERMINANTES. LA MATRIZ INVERSA

Introducción Histórica

Arthur Cayley (1821-1895) creó la teoría de los invariantes en forma algebraica, que fue desarrollada con la introducción de los determinantes y generalizada con las matrices y formas multilineales. Así mismo, investigó sobre la teoría de grupos y dio una formulación algebraica completa a los conceptos de la geometría proyectiva.

1. Concepto de Determinantes

El concepto de determinante nació en el siglo XIX, cuando se pretendió conseguir una fórmula general que permitiera calcular directamente la solución de un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas. En pocas palabras, el determinante de una matriz cuadrada es un número que se obtiene a partir de los elementos de la matriz. Aquí nos limitaremos a indicar cómo se hallan los determinantes de orden 2 y 3.

a. Determinantes de orden 2

A partir de la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Obtendremos, multiplicando en cruz y restando, el número $4 \cdot 8 - 7 \cdot 3 = 11$. Decimos que 11 es el determinante de la matriz y lo expresamos así:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 11 \quad \text{En general}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

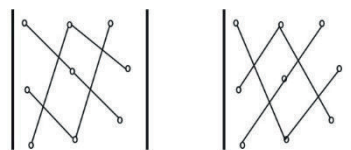
Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot 11 - 3 \cdot (-8) = 68$$

$$\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -7 \cdot 2 - 6 \cdot 5 = -44$$

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Están en la suma anterior todos los productos que se pueden formar con un factor de cada fila y una de cada columna. La mitad de ellos tiene signo más y la otra mitad signo menos. Para recordar la fórmula, se utiliza la llamada regla de Sarrus:



Productos con Signo+ Productos con Signos -

EJERCICIOS

1. Calcular

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Calcular

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

3. Calcular

$$\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix}$$

4. Determinar los valores de k tales que

$$\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix}$$

5. Calcular

$$\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix}$$

6. Calcular

$$\begin{vmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix}$$

b. Determinante de orden 3

El determinante de una matriz cuadrada de orden 3 es el número definido por la fórmula siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_3 c_2 - a_1 b_1 c_3$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 20 + 4 + 15 - 24 = 15$$

$$\begin{vmatrix} x & -x & 1 \\ 1 & x & -x \\ -x & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 + 1 - x^3 + x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 + 1$$

Al determinante de una matriz cuadrada A se le designa $|A|$.

EJERCICIOS:

Calcular

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 1-a & 1+2a & 2a+2 \\ a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} 6 & 6 & a-11 \\ 3 & 2-3 & -6 \\ 2-a & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

2. Propiedades de los Determinantes

1. El determinante de una matriz cuadrada coincide con el de su traspuesta.

En símbolos: $|A^t| = |A|$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. Si intercambiamos entre sí dos filas paralelas, el determinante cambia de signo.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 17 \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17$$

3. Un determinante con dos filas paralelas iguales vale cero.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 6 - 24 + 6 = 0$$

4. Si los elementos de una fila se multiplican por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & rb \\ c & rd \end{vmatrix} = r \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = r(ad - bc)$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

5. Si dos filas paralelas son proporcionales, el determinante es cero.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ra & rb & rc \end{vmatrix} = r \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = r \cdot 0 = 0$$

El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de dichas matrices.

En símbolos:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Sean las matrices cuadradas

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz producto es:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 29 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Y su determinante vale

$$|A \cdot B| = |24| \text{ como } |A| = 4 \text{ y}$$

$$|B| = |6| \text{ se tiene que}$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

EJERCICIOS

1. Estudia si son ciertas o no las siguientes igualdades.

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3} \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{4} & 5 \end{array} \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{array} \right|$$

2. Calcula el valor de los siguientes determinantes

a. $\left| \begin{array}{ccc} a+1 & a+5 & a+2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{array} \right|$

b. $\left| \begin{array}{ccc} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{array} \right|$

c. $\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & a \\ -1 & -1 & -1 & a \end{array} \right|$ d. $\left| \begin{array}{cccc} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right|$

3. Forma Matricial de un Sistema de Ecuaciones

$$\begin{cases} -x + y - z = -1 \\ x + 3z = -18 \\ 2x - 5y - 3z = 52 \end{cases}$$

Puede escribirse del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Esta es la forma matricial del sistema lineal de ecuaciones que, para abreviar, se escribe:

$$A \cdot X = B$$

Es una ecuación entre matrices. Para resolverla debemos despejar la matriz incógnita X.

¿Cómo hacerlo?. Recordemos las ecuaciones numéricas:

Para resolver la ecuación $2x=5$ despejamos la x. decimos “el 2, que está multiplicando, pasa dividiendo”. Eso significa que dividimos los dos miembros entre 2; es decir que los multiplicamos por

$$\frac{1}{2} = 2^{-1}, \text{ el inverso de } 2.$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 5 \rightarrow 1 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Para resolver la ecuación matricial $A \cdot X=B$, deberemos multiplicar los dos miembros de la ecuación por una matriz A^{-1} que sea la inversa de A; es decir que, multiplicada por A, nos dé la matriz unidad I.

Para resolver la ecuación matricial $A \cdot X=B$, deberemos multiplicar los dos miembros de la ecuación por una matriz A^{-1} que sea la inversa de A; es decir que, multiplicada por A, nos dé la matriz unidad I.

EJERCICIOS

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprueba que $A \cdot B = 0$ y observa que tanto A como B no son la matriz nula 0. Es decir, en matrices, la igualdad $A \cdot B = 0$ no supone que $A = 0$ ó $B = 0$. Pues bien: prueba que si $A \cdot B = 0$ y además es $|A| \neq 0$, entonces sí ocurre que $B = 0$.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales

a) $Ax + B = C$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 17 & 5 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 9 & 14 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Matriz Inversa de una matriz cuadrada
Comprobemos que la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{es } A^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que verificar que $A \cdot A^{-1} = I$ y que $A^{-1} \cdot A = I$. Efectivamente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(compruebe el lector la otra igualdad).

El conocer A^{-1} nos permite resolver la ecuación matricial que planteábamos en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = -7 \end{cases}$$

Recordemos que, para que un número a admita inverso $\frac{1}{a} = a^{-1}$, se requiere

únicamente que sea distinto de cero. Pues bien:

Para que una matriz cuadrada tenga inversa, es necesario que su determinante sea distinto de cero.

Para resolver la ecuación $2x = 5$ despejamos la x . Decimos “el 2, que está multiplicando, pasa dividiendo”. Esto significa que dividimos los dos miembros entre 2; es decir que los

multiplicamos por $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, el inverso de 2.

$$\frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 5 \rightarrow 1 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Para resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$, deberemos multiplicar los dos miembros de la ecuación por una matriz A^{-1} que sea la inversa de A ; es decir que, multiplicada por A , no dé la matriz unidad I .

▪ EJERCICIOS

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprueba que $A \cdot B = 0$ y observa que tanto A como B no son la matriz nula 0 . Es decir, en matrices, la igualdad $A \cdot B = 0$ no supone que $A = 0$ ó $B = 0$. Pues bien: prueba que si $A \cdot B = 0$ y además es $|A| \neq 0$, entonces sí ocurre que $B = 0$.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones matrices:

a) Donde $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} = (10 \ 17 \ 5)$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 9 & 14 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

4. Matriz Inversa de una matriz cuadrada

Comprobemos que la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \text{ es}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que verificar que $A \cdot A^{-1} = I$ y *que* $A^{-1} \cdot A = I$.

Efectivamente.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (Compruebe el lector la}$$

otra igualdad).

El conocer A^{-1} nos permite resolver la ecuación matricial que planteábamos en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \\ \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = -7 \end{cases}$$

Recordemos que, para que un número a admita inverso $\frac{1}{a} = a^{-1}$, se requiere únicamente que sea distinto de cero. Pues bien:

Para que una matriz cuadrada tenga inversa, es necesario que su determinante sea distinto de cero.

Veamos ahora cómo calcular A^{-1} conociendo A . Se recurre para ello al método de Gauss siguiendo el esquema:

$$A \xrightarrow{\text{sometida a ciertos cambios}} I \\ I \xrightarrow{\text{sometida a los mismos cambios}} A^{-1}$$

EJEMPLO:

Queremos calcular la inversa de la

$$\text{matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Téngase en cuenta que la matriz inversa existe, por ser $|A| = -1 \neq 0$. Para calcular la inversa de A

escribimos las matrices A e I separadas por una línea vertical.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ahora sometemos a la matriz A a los cambios de equivalencia que convengan para transformarla en I , y vamos sometiendo, simultáneamente, a I a los mismos cambios. Cuando A se haya transformado en I , I se habrá transformado en A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} -2f_1+f_2 \\ -f_1+f_3 \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} 5f_1+3f_2 \\ 4f_2-5f_3 \end{matrix}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 7 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} f_{13}+7f_3 \\ f_2+6f_3 \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 20 & -25 & 35 \\ 0 & 5 & 0 & -20 & 25 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} f_1^{15} \\ f_2^{15} \end{matrix}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \end{array} \right)$$

$= (IA^{-1})$, es decir, $A^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ -4 & 5 & -6 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Siempre es bueno realizar la comprobación $A \cdot A^{-1} = I$.
Efectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ -4 & 5 & -6 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las computadoras pueden calcular muy rápidamente A^{-1}

1. Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcular la inversa de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Hallar la inversa de:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

4. ¿Para qué valores de a existe la matriz

inversa de $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & a \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$? Calcula la

inversa en dichos casos.

5. Resolución de sistemas de ecuaciones por el método de Cramer.

Para resolver un sistema de ecuaciones podemos utilizar el método de Cramer.

Un sistema de ecuaciones lineales es un sistema de Cramer si cumple las siguientes condiciones:

- a) Tiene n ecuaciones y n incógnitas
- b) El valor del determinante de su matriz A de coeficientes es distinto de cero.

Un sistema de Cramer es un sistema de ecuaciones que tiene una única solución, y el valor de cada incógnita se obtiene dividiendo por el determinante de la matriz A de coeficientes el determinante de la matriz que resulta de sustituir en A la columna que corresponde a los coeficientes de la incógnita por la que forman los términos independientes

EJEMPLO:

Resolver, aplicando la regla de Cramer, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

Solución:

Calculamos la matriz A de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que su determinante es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 \cdot (-1) = 3$$

Calculamos el valor de la incógnita x sustituyendo en la columna de las x de A

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ la columna de términos}$$

$$\text{independientes } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y dividiendo por el}$$

valor del determinante de A; es decir, por 3:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Calculamos el valor de la incógnita y sustituyendo en la columna de las y de A

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ la columna de términos}$$

$$\text{independientes } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y dividiendo por el}$$

valor del determinante de A; es decir, por 3:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Calcular el valor de la incógnita z sustituyendo

$$\text{en la columna de la z de A } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ la columna}$$

$$\text{de términos independientes } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y dividiendo}$$

por el valor determinante de A; es decir, por 3:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Entonces, la solución es $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

EJEMPLO:

Resolver, aplicando la regla de Cramer, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + 4y - 5z = 0 \\ 6x + 7y + 8z = 9 \end{cases}$$

Solución:

Calculamos la Matriz A de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que su determinante es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 8 + 1 \cdot 3 \cdot 7 + 6 \cdot (-2) \cdot (-5) - 6 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 7 \cdot (-5) - 8 \cdot 3 \cdot (-2) = 172$$

Calculamos el valor de la incógnita x

sustituyendo en la columna de la x de A $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

la columna de términos independientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ y

dividiendo por el valor del determinante de A; es decir, por 172:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix}}{172} = \frac{121}{172}$$

Calculamos el valor de la incógnita y sustituyendo en la columna de las y de A

$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ la columna de términos independientes

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ y dividiendo por el valor

del determinante de A; es decir, por 172:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix}}{172} = \frac{18}{172} = \frac{9}{86}$$

Calculamos el valor de la incógnita z sustituyendo en la columna de las z de A

$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ la columna de términos independientes

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ y dividiendo por el valor del determinante

de A; es decir, por 172:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix}}{172} = \frac{87}{172}$$

Entonces, la solución es

$$(x, y, z) = \left(\frac{121}{172}, \frac{9}{86}, \frac{87}{172} \right)$$

▪ **EJERCICIOS:**

1. Resolver por el método de Cramer los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + x = 0 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y + 4z = 1 \\ x + y + 9z = 2 \\ 2x + 5y + 9z = 1 \end{cases}$$

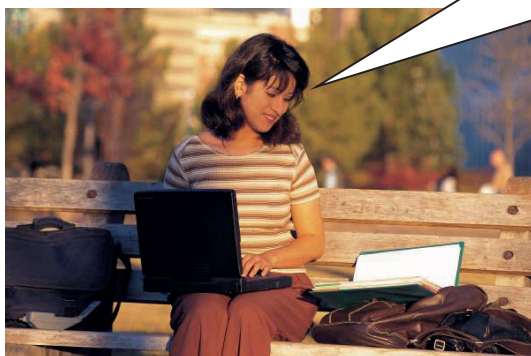
$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x + 2y + 2z - 9 = 0 \\ z + 2y + 3z - 10 = 0 \end{cases}$$

a) $x = 1, y = 1, z = 0$

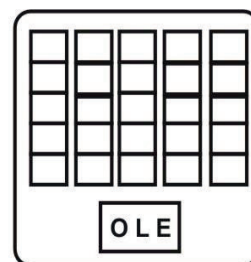
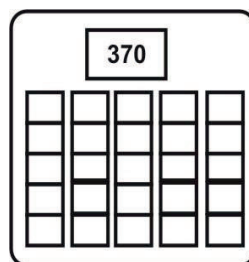
b) $x = 3, y = -1, z = 0$

c) $x = 3, y = 2, z = 1$

DIVIRTIÉNDONOS CON LA CALCULADORA



Al efectuar operaciones de sumas, restas, multiplicación y al volver la calculadora obtendrás:



1. $300\ 212 + 207\ 102 =$ (aguas transformadas en cuerpos sólidos).
2. $84\ 116 - 33\ 401 =$ (Depósitos para guardar granos y semillas).
3. $877 \times 4 =$ (Cantante español).
4. $2\ 769 + 2\ 248 =$ (Pleitos, embrollos)
5. $100\ 227 + 120\ 426 + 298\ 030 + 19\ 022 - 29\ 970$ (para estampar marcas).
6. $130\ 128 - 79\ 321 =$ (Mamíferos salvajes)
7. $31\ 030 + 363\ 724 + 114\ 325$ (Para adornar fiestas)
8. $3 \times 168\ 457 =$ (Grupo de personas que no han sido lesionados).
9. $758\ 432 + 29\ 729 - 734\ 452 =$ (Tantos en un partido de fútbol)
10. $19401 + 19956 + 11\ 357 =$ (Se utiliza para cocer)
11. $742\ 059 - 234\ 321 =$ (Sirve para proteger la piel)
12. $83\ 432 - 32727 =$ (Parejas sin compañía)
13. $21\ 432 + 32\ 273 =$ (Monedas peruanas)
14. $36\ 027 + 1\ 937 + 1\ 935 + 5\ 620 + 5\ 016 =$ (Se localizan dentro de la cabeza).
15. $43\ 974 - 43\ 235 =$ (Se utiliza para fijar el cabello)
16. $138\ 834 - 138\ 464 =$ (Grito taurino).
17. $2 \times 8\ 423 \times 3 =$ (Se da en saludos cariñosos)
18. $16\ 979 \times 3 =$ (Juegos para armar)

Este tipo de situaciones nos permite la situación de diferentes áreas y situaciones de nuestro entorno diario y cotidiano.



GEOMETRÍA

La Historia del Origen de la Geometría es muy similar a la de la Aritmética, siendo sus conceptos más antiguos consecuencia de las actividades prácticas. Los primeros hombres llegaron a formas geométricas a partir de la observación de la naturaleza. La recopilación de las observaciones y la interrelación de las mismas convirtieron a la geometría en una teoría matemática.

En esta unidad se realizará un estudio de la geometría a partir de los conceptos primitivos o “fundamentales”; punto, recta, plano y espacio; los subconjuntos de la recta: semirrecta, rayo, segmento de recta, longitud de un segmento, congruencia de segmentos, etc. y el ángulo en el plano.

Asimismo se estudiarán los ángulos de lados paralelos y perpendiculares, los triángulos, los ángulos entre las rectas notables del triángulo, los polígonos y cuadriláteros.

Finalmente se construirán las figuras geométricas de tres dimensiones: cilindro, pirámide, prisma, paralelepípedo, esfera y se calculará el volumen de las principales figuras antes mencionadas.

GEOMETRÍA

La Historia del Origen de la Geometría es muy similar a la de la Aritmética, siendo sus conceptos más antiguos consecuencia de las actividades prácticas. Los primeros hombres llegaron a formas geométricas a partir de la observación de la naturaleza. La recopilación de las observaciones y la interrelación de las mismas convirtieron a la geometría en una teoría matemática.

En esta unidad se realizará un estudio de la geometría a partir de los conceptos primitivos o “fundamentales”; punto, recta, plano y espacio; los subconjuntos de la recta: semirrecta, rayo, segmento de recta, longitud de un segmento, congruencia de segmentos, etc. y el ángulo en el plano.

Asimismo se estudiarán los ángulos de lados paralelos y perpendiculares, los triángulos, los ángulos entre las rectas notables del triángulo, los polígonos y cuadriláteros.

Finalmente se construirán las figuras geométricas de tres dimensiones: cilindro, pirámide, prisma, paralelepípedo, esfera y se calculará el volumen de las principales figuras antes mencionadas.

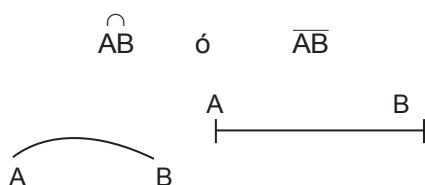
UNIDAD N° 05

GEOMETRÍA

PUNTO, LÍNEA Y SUPERFICIE

- **Punto.-** Es un elemento geométrico sin definición, de él solo se tiene una idea gráfica (la huella que deja una pluma sobre un papel). Se le denota con letras mayúsculas y su representación es un aspa o un trazo.
- **Línea.-** Es otro elemento sin definición, se la imagina como dos extremos distanciados considerablemente y unidos por infinitos puntos, pero esto es sólo a nivel sensorial. Un hilo tenso nos da la idea de línea.

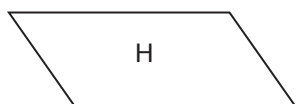
Se le denota los dos puntos extremos, por ejemplo:



- **Superficie o Plano.-** También carece de definición exacta, porque un plano se puede concebir como punto o como recta; depende del punto de vista. Nos da idea de un plano, una pared, un suelo cualquiera, etc.

Se le denota con una letra mayúscula. Ejm. Plano H.

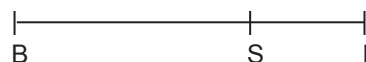
El término superficie es más genérico que el plano, es más específico.



- **Línea Recta, Semi-Recta y Segmento**

Línea Recta.- Es un concepto específico de aquellos puntos que formen algo parecido a un rayo luminoso o al borde de una regla. Aquí se acepta los puntos que forman líneas curvas cerradas o abiertas. La línea recta está dentro de la idea de línea.

Semi-Recta.- Es una separación o delimitación que se hace en una línea recta. Así en la recta L, de origen B se marca un punto S y la distancia que separa estos dos puntos es la semi-recta $\overline{BS}$.



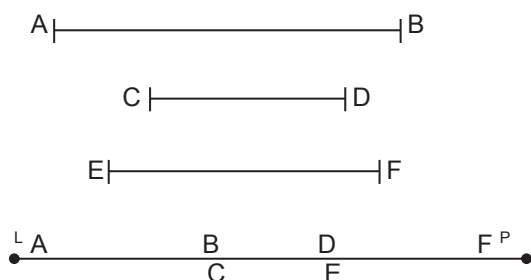
Segmento.- Si sobre una recta se marcan dos puntos cualesquiera, se línea segmento a todo el conjunto de puntos comprendidos entre esos dos puntos. Así; tenemos el segmento $\overline{AB}$.



OPERACIONES CON SEGMENTOS.- Las operaciones con segmentos se hacen generalmente con gráficas; así tenemos:

Suma de segmentos.- Para realizar la siguiente suma de segmentos $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \overline{AF}$ sobre la recta LP, procedemos de la manera siguiente: Colocamos cada segmento dado uno a continuación de otro con sus correspondientes

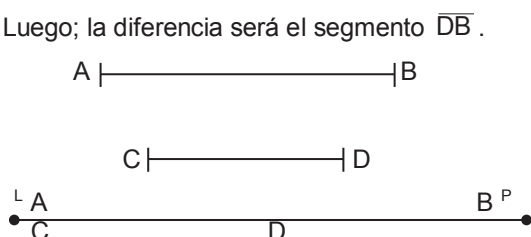
medidas sobre la recta dada, como muestra la fig.



Luego: la suma será $\overline{AF}$.

Sustracción de Segmentos.- Se realiza en forma similar a la suma, por ejemplo: restar $\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{DB}$

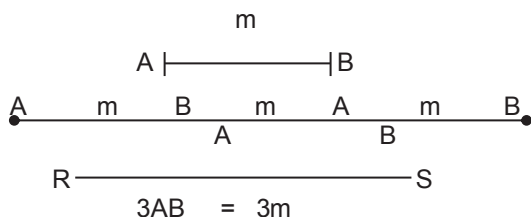
Dado los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ estos se llevan sobre la recta dada, colocando el sustraendo sobre el minuendo, como indica la fig.



Luego; la diferencia será el segmento $\overline{DB}$.

Multiplicación de un Segmento por un número real.-

El producto de un segmento por un número real, se realiza tomando sobre la recta dada, tantas veces el segmento como indica el número, así por ejemplo; multiplicar $3 \cdot \overline{AB}$ gráficamente nos resulta $\overline{RS}$.

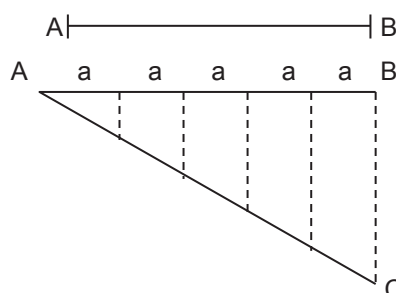


División de un segmento en un determinado número de partes iguales.-

Esta división se usa, en segmentos que tienen una longitud que dividida en las partes que uno quiere, estas resultan poco precisas. Por ejemplo:

Queremos dividir el segmento AB en 5 partes iguales, es decir:

$$\frac{AB}{5} = a$$



Para esto se traza una recta cualquiera en este caso AC y sobre ésta se toma un segmento divisible entre cinco, el otro extremo del segmento se une a B y se forma el triángulo ABC enseguida se trazan //S al lado BC, que cortan al AB en los 5 puntos buscados. Así queda dividido el segmento.

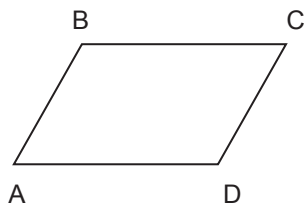
EL PLANO

El plano es una clase de superficie, es decir una superficie plana, sólo se lo puede imaginar, sin existir de pesor ni límite, la superficie de una mesa da la idea de un plano. Se le denota con una letra mayúscula con no menos de tres letras.

Como propiedades de los planos: Se puede decir que:

- Por tres puntos no alineados pasa un plano y sólo uno.

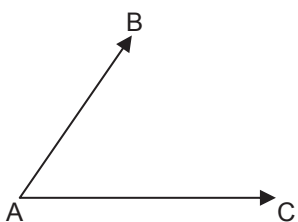
- Si una recta tiene dos puntos comunes con un plano la recta está contenida en el plano.



CONCEPTO DE ÁNGULOS

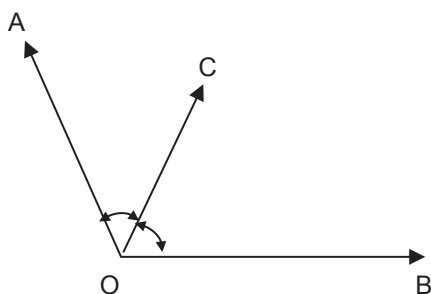
El ángulo se le define como una abertura formada por dos semirrectas, concurrentes en un mismo origen llamado vértices, y las dos semirrectas se llaman lados. Así, en la figura adjunta, B representa el vértice, $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ representan lados. Luego; el ángulo se denota:

$\angle ABC$ ó $\angle B$

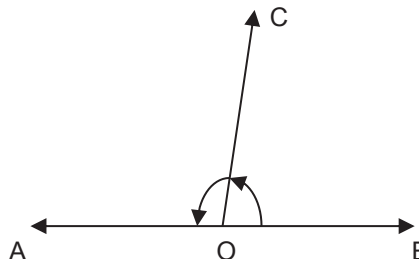


ÁNGULOS CONSECUTIVOS Y ADYACENTES

Ángulos Consecutivos.- Dos ángulos son consecutivos si tienen un lado común y el mismo vértice; así en la figura adjunta, $\overrightarrow{OC}$ es el lado común de los $\angle AOC$ y $\angle COB$; y el vértice O es común a los dos ángulos.



Ángulos Adyacentes.- Son aquellos que además de tener un lado común sus otros dos lados pertenecen a una misma recta, así $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{OB}$ pertenecen a una misma recta.



Ángulos Llanos.- Son aquellos que tienen sus lados en direcciones opuestas sobre una misma recta. Vale 180° .



IGUALDAD Y DESIGUALDAD DE ÁNGULOS

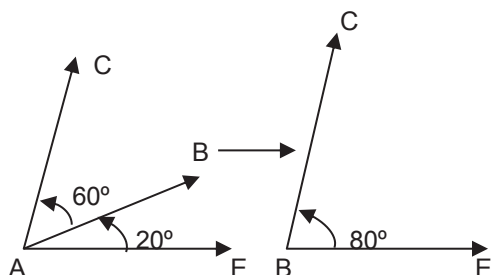
IGUALDAD DE ÁNGULOS.- Dos o más ángulos son iguales si tienen la misma medida angular. No interesa la longitud de sus lados.

DESIGUALDAD DE ÁNGULOS.- Dos o más ángulos son desiguales si tienen diferente medida angular pueden tener la misma medida sus lados pero si el ángulo no es el mismo no son iguales. Surge así la relación de mayor y menor.

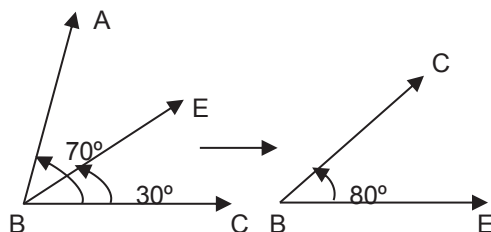
SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

Este tema lo vamos a interpretar más que todo gráficamente:

Suma.- Por ejemplo sumar el $\angle ABC = 60^\circ + \angle ABE = 20^\circ$, entonces el ángulo total será $\angle CBE = 80^\circ$.



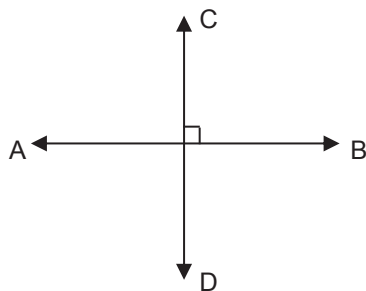
Resta.- Por ejemplo restar el $\angle ABC = 70^\circ - \angle EBC = 30^\circ$, entonces el ángulo restante: $70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$.



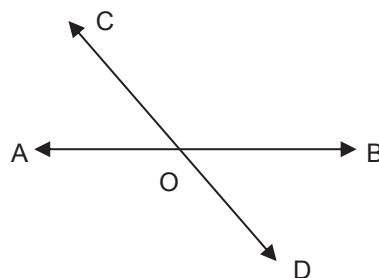
La suma y resta de ángulos se puede operar algebraicamente sin necesidad de recurrir a un proceso gráfico.

RECTAS PERPENDICULARES Y OBLICUAS

Rectas Perpendiculares.- Dos rectas son perpendiculares si forman cuatro ángulos rectos. Por ejemplo: $AB \perp CD$, se cumplen lo que en el gráfico se indica.

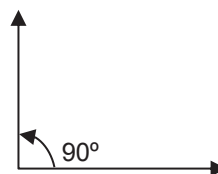


Rectas Oblicuas.- Si dos rectas se cortan y no forman ángulos rectos, a estos se llaman oblicuidad entre rectas.

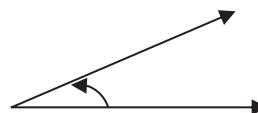


ÁNGULO RECTO, AGUDO, OBTUSO

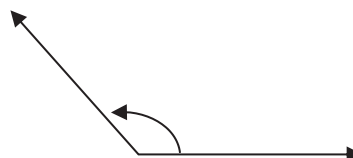
Ángulo Recto.- Es aquel que tiene sus lados perpendiculares. Mide 90° .



Ángulo Agudo.- Es aquel que mide menos de un ángulo recto o sea menos de 90° .

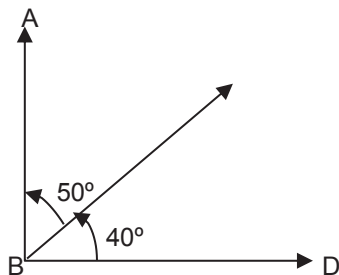


Ángulo Obtuso.- Es aquel cuya medida angular es más de 90° .



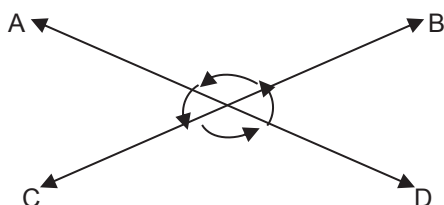
ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS.- Son dos ángulos que sumados dan 90° siendo uno complementario del otro. Ejemplo: $\angle ABC = 50^\circ$
 $\angle CBD = 40^\circ$
 $\therefore \angle CBD + \angle ABC = 90^\circ$

En este caso el $\angle ABC$ es complementario del ángulo CBD.



ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE.-

Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y los lados de uno de ellos son las semirrectas opuestas de los lados del otro. Esto se puede apreciar en la figura adjunta.



AXIOMA Y POSTULADO

AXIOMA.- Es una clase de proposición sencilla y evidente que no necesita demostración.

POSTULADO.- Es menos evidente que el axioma y menos sencillo que éste, pero que también no necesita demostración.

POSTULADOS DE LA RECTA

Admitimos los siguientes:

- Por dos puntos pasa una recta y solo una.
- Dos rectas no pueden tener más que un solo punto común.

TEOREMA: SUS PARTES

TEOREMA.- Es una proposición que puede ser demostrada y hace constar un conjunto de

razonamiento que van a la verdad de la proposición.

PARTES DE UN TEOREMA.- Tiene dos partes:

- La hipótesis (suposición).
- La tesis (lo que se a va a demostrar).

LEMA.- Es una proposición que sirve de base a la demostración de un teorema, es algo preliminar a éste.

COROLARIO.- Es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.

ESCOLIO.- Es una observación que se hace sobre un teorema previamente demostrado.

PROPIEDADES DE LOS ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

La propiedad más importante que se les confiere es la igualdad de los ángulos contenidos en sus lados.

EJERCICIOS

- Un ángulo es la mitad de su complemento. Hallar el ángulo.

Solución Ángulo = x°

Complemento ($90^\circ - x^\circ$), la mitad será $\frac{(90^\circ - x^\circ)}{2}$ con estos podemos hacer la

siguiente igualdad:

$$x^\circ = \frac{(90^\circ - x^\circ)}{2} \quad 3x^\circ = 90^\circ$$

$$2x^\circ = 90^\circ - x^\circ \quad x^\circ = 30^\circ \quad \text{Rpta.}$$

- El triple de un ángulo es como 3/2 de su complemento; hallar el ángulo.

Solución:

Sea Y el ángulo, y $(90 - Y)$ su complemento;
luego, según el problema se tiene:

$$3y = \frac{3}{2}(90 - y)$$

$$6y = 3(90 - y)$$

$$2y = 90 - y$$

$$3y = 90 \rightarrow y = 30$$

∴ El ángulo $y = 30^\circ$

3) El doble de un ángulo excede en 5 grados

a $\frac{1}{2}$ de su complemento. Hallar el ángulo.

Solución: Sea m el ángulo, y $(90 - m)$ su complemento; luego según datos del problema, se tiene:

$$2m - 5 = \frac{1}{2}(90 - m)$$

$$4m - 10 = 90 - m$$

$$5m = 100 \rightarrow m = 20$$

∴ EL ángulo $m = 20$

PRÁCTICA CALIFICADA

Problema 1. Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD tal que $m \angle AOB = 2x$, $m \angle BOC = 5x$ y $m \angle COD = 3x$. Hallar la medida del ángulo BOC si el ángulo AOD es llano.

- a) 36° b) 90° c) 48°
d) 72° e) 108°

Problema 2. Calcular el complemento de: $72^\circ 25' 46''$

- a) $17^\circ 24' 15''$ b) $17^\circ 34' 15''$ c) $17^\circ 34' 14''$
d) $17^\circ 41' 14''$ e) $12^\circ 34' 14''$

Problema 3. Hallar el suplemento de: $135^\circ 28' 15''$

- a) $45^\circ 31' 45''$ b) $45^\circ 31' 35''$ c) $44^\circ 31' 45''$
d) $44^\circ 31' 35''$ e) $44^\circ 21' 45''$

Problema 4. Si un ángulo es el cuádruplo de su adyacente suplementario. ¿Cuánto mide dicho ángulo?

- a) 144° b) 136° c) 138°
d) 124° e) 36°

Problema 5.

Sumar: $62^\circ 46' 28''$ con $28^\circ 16' 55''$

- a) $93^\circ 60' 23''$ b) $90^\circ 3' 23''$ c) $91^\circ 3' 23''$
d) $91^\circ 3' 13''$ e) $91^\circ 13' 3''$

Problema 6. Calcular la diferencia de dos ángulos que miden $30^\circ 46' 50''$ y $18^\circ 52' 35''$

- a) $12^\circ 54' 15''$ b) $10^\circ 54' 15''$ c) $11^\circ 55' 15''$
d) $11^\circ 54' 25''$ e) $11^\circ 54' 15''$

Problema 7. Se tienen dos ángulos complementarios tal que uno es los $\frac{4}{5}$ del otro. ¿Cuánto mide el mayor de ellos?

- a) 60° b) 65° c) 50° d) 55° e) 45°

Problema 8. Calcular la diferencia de dos ángulos que miden $109^\circ 30' 25''$ y $58^\circ 19' 30''$

- a) $51^\circ 20' 55''$ b) $51^\circ 10' 55''$ c) $51^\circ 10' 45''$
d) $41^\circ 10' 35''$ e) $61^\circ 10' 55''$

Problema 9. Si un ángulo mide 40° calcular el suplemento del doble de dicho ángulo.

- a) 80° b) 100° c) 140° d) 120° e) 110°

Problema 10.

Calcular el suplemento de $24^\circ 30' 18''$

- a) $165^\circ 29' 42''$ b) $135^\circ 29' 46''$ c) $155^\circ 29' 42''$
d) $145^\circ 29' 42''$ e) $155^\circ 28' 52''$

Problema 11. Si un ángulo mide 60° . Calcular el suplemento del complemento de dicho ángulo.

- a) 120° b) 130° c) 150° d) 160° e) 100°

Problema 12. Si un ángulo mide 30° . Calcular el suplemento del suplemento del complemento del doble de dicho ángulo.

- a) 60° b) 30° c) 150° d) 120° e) 80°

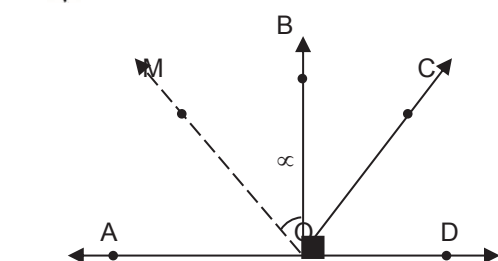
Problema 13. Dos ángulos adyacentes suplementarios difieren en 40° . Hallar la medida del mayor ángulo.

- a) 100° b) 110° c) 120° d) 98° e) 125°

Problema 14. Cuanto mide un ángulo si la diferencia entre su suplemento y su complemento es seis veces el ángulo.

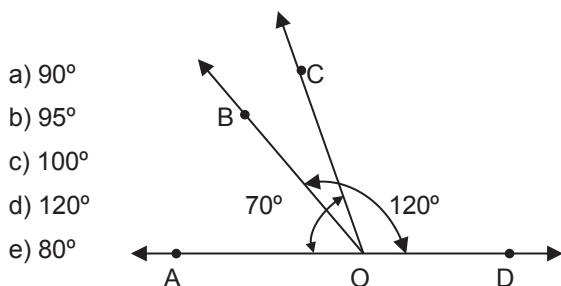
- a) 15° b) 30° c) $22^\circ 30'$ d) 45° e) 20°

Problema 15. En la figura, $\vec{OM}$ es bisectriz del $\angle AOD$. Luego la medida del ángulo COD, es:



- a) $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ b) $45^\circ + \frac{\alpha}{2}$ c) α
d) 2α e) $\frac{\alpha}{2}$

Problema 16. Si: $m\angle AOC = 70^\circ$ y $m\angle BOD = 120^\circ$. Calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos AOB y COD.



- a) 90°
b) 95°
c) 100°
d) 120°
e) 80°

Problema 17. Los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, son tales que: $m\angle AOC + m$

$\angle BOD = 140^\circ$; y $m\angle BOC = 30^\circ$. Calcular $m\angle AOD$.

- a) 40° b) 125° c) 170° d) 110° e) 120°

Problema 18. En la figura:

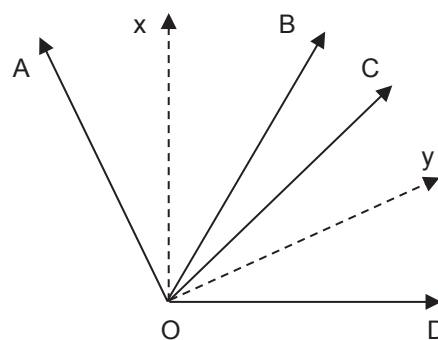
$$m\angle AOD = 110^\circ$$

$$m\angle BOC = 30^\circ$$

$$\angle AOB = \angle COD$$

$\vec{OX}$: Bisectriz del $\angle AOB$

$\vec{OY}$: Bisectriz del $\angle COD$



Hallar: $m\angle XOY$

- a) 30° b) 40° c) 60° d) 70° e) 20°

Problema 19. Se tiene los ángulos consecutivos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ de modo

tal que. $\vec{OB}$ es bisectriz del $\angle AOC$ y $m\angle AOD = 95^\circ$; Hallar $m\angle AOB$, si $m\angle BOD = 35^\circ$

- a) 20° b) 30° c) 40° d) 50° e) 55°

Problema 20. Siendo los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD, tal que $m\angle AOB = m\angle BOD = 3m\angle COD$, calcular $m\angle COD$, si: $m\angle AOD = 120^\circ$.

- a) 20° b) 40° c) 100° d) 80° e) 60°

POLÍGONOS: SUS ELEMENTOS

Polígonos.- Se llama polígono a la porción de plano limitada por una curva cerrada, llamada línea poligonal.

Elementos.-

- Los lados son los pertenecientes a la línea poligonal.
- Los vértices son las intersecciones de los lados.
- Los ángulos (externos e internos).

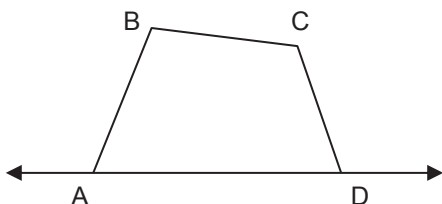
Clasificación

Por el número de lados se clasifican en:

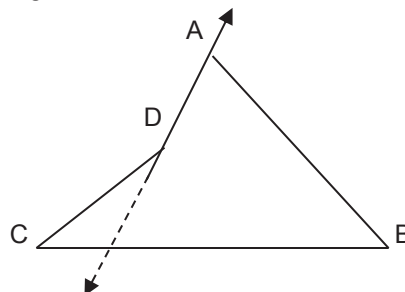
<u>NOMBRE</u>	<u>Nº DE LADOS</u>
Triángulos	Tres
Cuadrilátero	Cuatro
Pentágono	Cinco
Hexágono	Seis
Heptágono	Siete
Octógono	Ocho
Eneágono	Nueve
Decágono	Diez
Endecágono	Once
Dodecágono	Doce
Pentadecágono	Quince
Icoságono	Veinte

POLÍGONO CONVEXO Y CÓNCAVO.- Esta clase de polígonos surgen debido a la posición con la recta de los polígonos.

Polígono Convexo.- Cuando una recta que contiene a un lado cualquiera del polígono origina dos semiplanos donde en sólo uno de ellos está el polígono.



Polígono Cóncavo.- Cuando una recta coincide, con uno de los lados del polígono formando dos semiplanos en el mismo polígono.

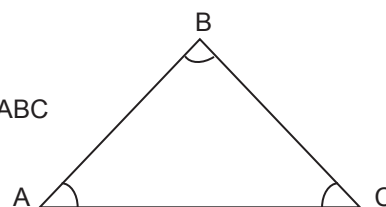


TRIÁNGULOS: CLASIFICACIÓN

TRIÁNGULO.- Es la porción de plano limitada por tres rectas, que se cortan dos a dos. Los puntos de intersección de sus lados se llaman vértices, formándose también los ángulos interiores, que sumados dan 180° . La suma de sus tres lados se llama perímetro. Se les denota con letras mayúsculas, las cuales se encuentran en cada vértice del Δ .

Ejemplo.

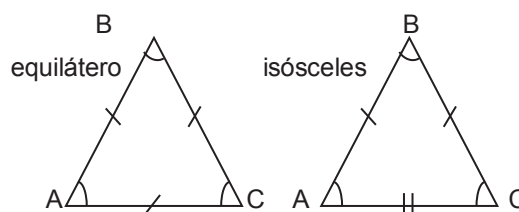
Triángulo ABC



CLASIFICACIÓN.- Hay dos grandes clases de triángulos:

1) Con relación a sus lados

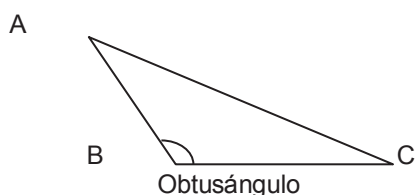
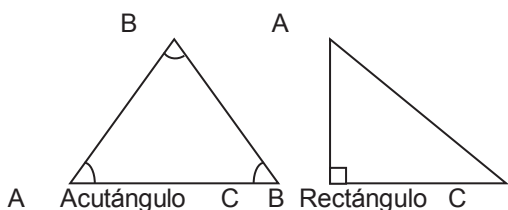
- Equiláteros: si tiene tres lados iguales.
- Isósceles: Si tiene dos lados iguales.
- Escaleno: Si sus tres lados son diferentes.





2) Con relación a sus ángulos:

- Equiángulo: Si tiene sus tres ángulos=s.
- Rectángulo: Si tiene un ángulo recto.
- Acutángulo: Si sus tres ángulos son agudos.
- Obtusángulo: Si tiene un ángulo obtuso.



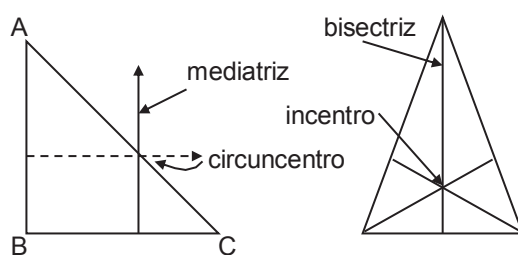
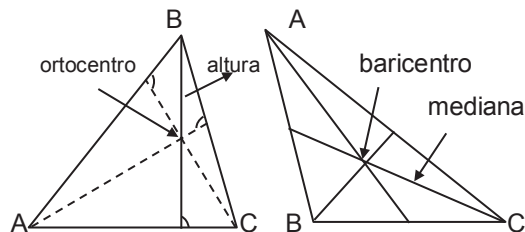
LÍNEAS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO

Altura.- Segmento perpendicular trazado al lado opuesto o a su prolongación. Todas las alturas se cortan en el ortocentro.

Mediana.- Segmento determinado por un vértice y el punto medio del lado opuesto. Las medianas se cortan a $1/3$ de la base y el punto donde se intersectan se llama baricentro.

Mediatriz.- Es la perpendicular trazada desde el punto medio de un lado. Su intersección de las tres se llama circuncentro.

Bisectriz.- La bisectriz en un triángulo, es la bisectriz de uno de sus ángulos, comprendido entre el vértice y el lado opuesto.



Nota.- En un triángulo equilátero las cuatro rectas notables se cortan a $1/3$ de la base.

IGUALDAD DE TRIÁNGULOS.-

Dos triángulos son iguales si sus elementos correspondientes, es decir lados y ángulos, son todos iguales.

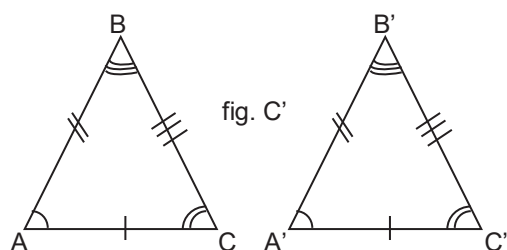
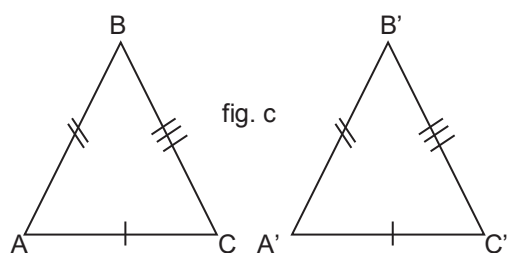
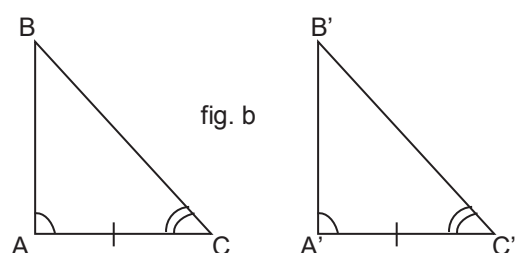
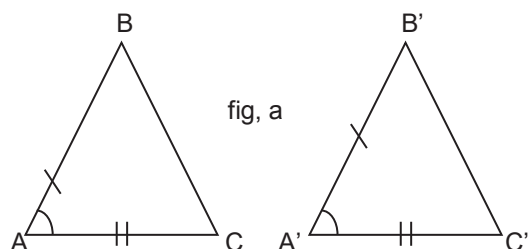
TRES CASOS GENERALES

Primer Caso.- Dos triángulos son iguales si dos de sus lados y el ángulo comprendido del primer triángulo son iguales con los elementos correspondientes del segundo.

Fig. a.

Segundo Caso.- Dos triángulos son iguales si un lado y los ángulos adyacentes a dicho lado del primer triángulo son iguales con los elementos correspondientes del segundo. Fig. b.

Tercer Caso.- Dos triángulos son iguales si los tres lados del primero son iguales con los lados correspondientes del segundo. Fig. c.

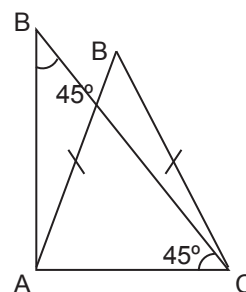
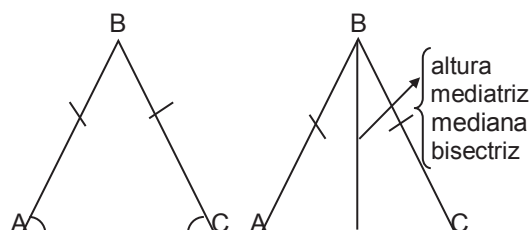


PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES

1. Consta de dos ángulos iguales, formados por un lado igual y un lado desigual.
2. El segmento trazado desde el vértice opuesto al lado desigual coincide con la altura, bisectriz, mediatriz y mediana,

determinándose dos triángulos iguales internos.

3. Si el triángulo isósceles es rectángulo, entonces sus ángulos agudos miden 45° c/u.



RELACIÓN ENTRE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO

En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la longitud del tercer lado.

Construcción de Triángulos

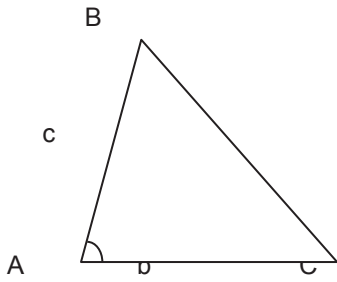
1. Construir un triángulo dado. Los lados y el ángulo comprendido.

Solución:

Sean b y c los dos lados y A el ángulo.

Se procede de la siguiente manera:

- Se construye el ángulo A.
- Sobre los lados se toma $AC = b$ y $AB = c$.
- Se une b con c y se obtiene el triángulo.

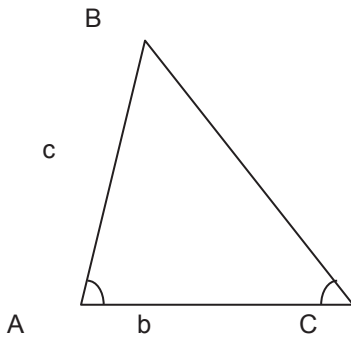


- Haciendo centro en los extremos A y B y con radios iguales a $\underline{b}$ y $\underline{a}$, respectivamente se trazan dos arcos que se cortan en C.
- Se une C con A y con B y se obtiene el triángulo ABC.

2. Construir un triángulo, dado un lado y los dos ángulos adyacentes a dicho lado.

Solución:

Sea b el lado, A y C los ángulos adyacentes.



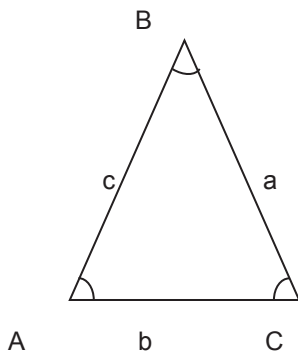
Procedimiento:

- Trazamos $AC = b$
- En los extremos de AC, se construyen los ángulos A y C, cuyos lados se cortan en el punto B.

3. Construir un triángulo dados sus tres lados.

Solución:

Sean a , b y c los tres lados



Procedimiento:

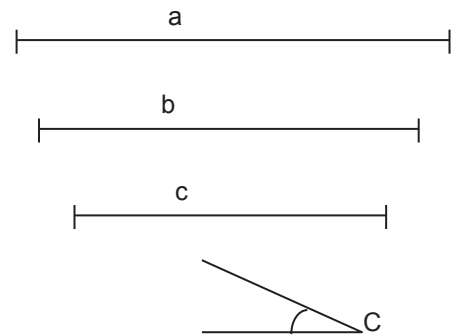
- Se traza $AB = c$.

CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1. Construir un triángulo rectángulo dados la hipotenusa y un ángulo agudo.

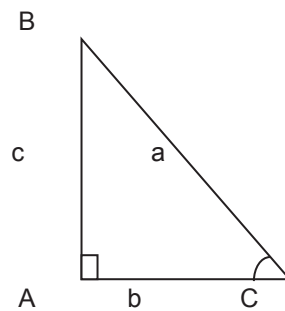
Solución:

Sea a la hipotenusa y C el ángulo agudo.



Procedimiento:

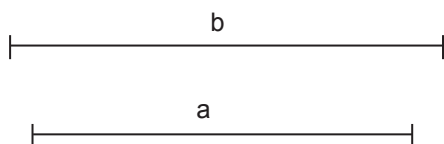
- Se construye el ángulo C.
- Se determina $BC = a$.
- Se traza BA perpendicular a CA y se obtiene el triángulo ABC rectángulo.



2. Construir un triángulo rectángulo dados la hipotenusa y un cateto.

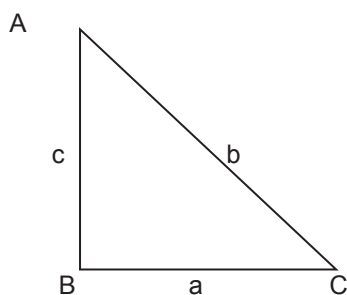
Solución:

- Sea b la hipotenusa y a el cateto.



Procedimiento:

- Se traza el ángulo recto ABC.
- Se determina $AC = b$.
- Se traza una perpendicular AB a BC.
- Terminamos uniendo A con C y obtenemos el triángulo ABC.



EJERCICIOS

1. En el triángulo ABC el ángulo A = 64° y el ángulo formado por la bisectriz y la altura que parten del vértice A mide 12° . Hallar los ángulos B y C.

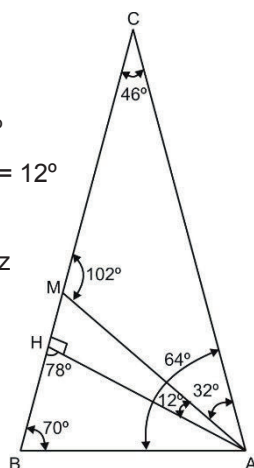
Solución:

Datos: ángulo BAC = 64°

ángulo HAM = 12°

AH = altura

AM = bisectriz



Desarrollo:

En el triángulo AHM, el ángulo AMH es complemento del ángulo HAM es decir mide 78° y el suplemento de éste es que mide 102° , este dato nos da el ángulo ABC; porque el ángulo MAC = 32° (bisectriz) que sumando más $AMC = 102^\circ$, en total hacen 134° restados de 180° nos queda 46° que es la medida del ángulo C.

Ahora: $C = 46^\circ$ y $\angle A = 64^\circ$ (dato)

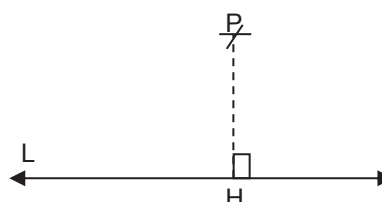
$$\angle A + \angle C = 110 \rightarrow \angle B = 70^\circ$$

Por que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° .

UNICIDAD DE LA PERPENDICULAR TRAZADA POR UN PUNTO A UNA RECTA.

Una perpendicular trazada desde un punto dado a una recta es la menor distancia entre el punto y la recta.

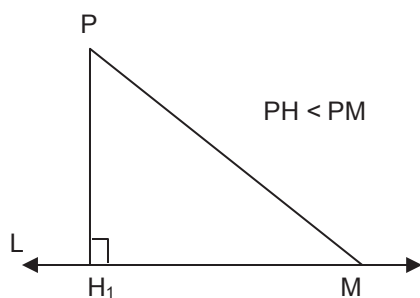
PH = menos distancia



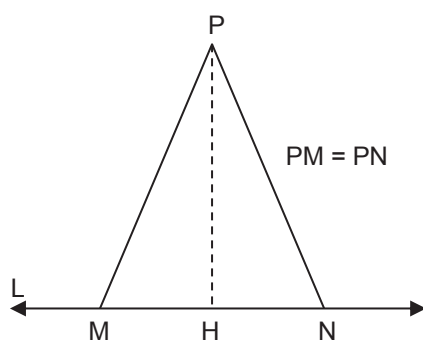
Relación entre la perpendicular y las Oblicuas trazadas desde un punto Exterior a una Recta.-

Si trazamos desde un punto exterior a una recta, una perpendicular y varias oblicuas, se demuestra que:

El segmento perpendicular comprendido entre el punto y la recta es menor que cualquier segmento oblicuo.



Dos segmentos oblicuos cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular son iguales.



IGUALDAD DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

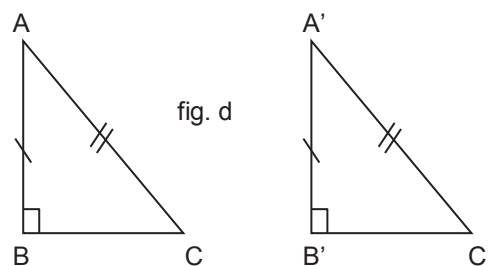
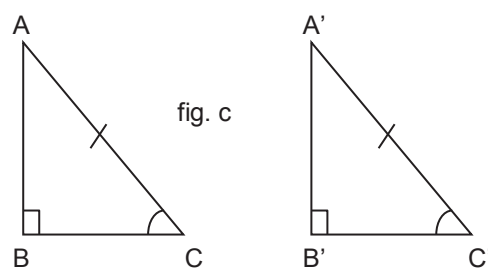
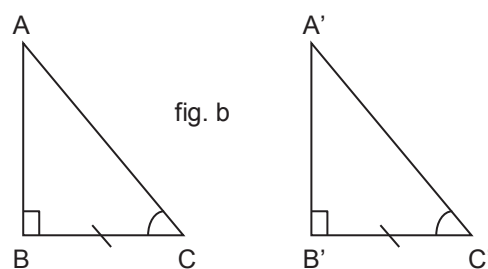
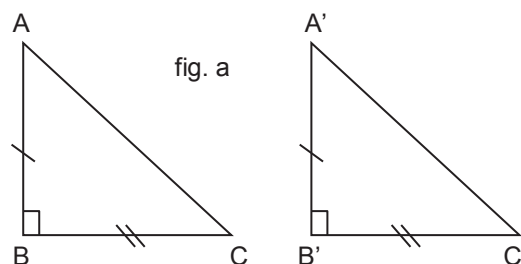
Primer Caso.- Dos triángulos rectángulos son iguales si los catetos del primero son congruentes con los del segundo. Fig. a.

Segundo Caso.- Dos triángulos rectángulos son iguales si un cateto y un ángulo del primero son iguales con los elementos correspondientes del segundo. Fig. b.

Tercer Caso.- Dos triángulos rectángulos son iguales si la hipotenusa y un ángulo del primero son iguales con los elementos correspondientes del segundo. Fig. c.

Cuarto Caso.- Dos triángulos rectángulos, son congruentes si al hipotenusa y un cateto del

primero son iguales a los correspondientes del segundo. Fig. d.



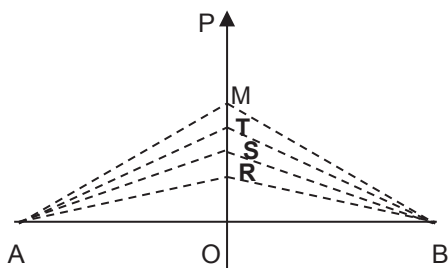
CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

(Tema desarrollado en la balota anterior).

LUGAR GEOMÉTRICO.- Es el conjunto de puntos que gozan de una misma propiedad geométrica; es evidente que los puntos que no están en el lugar geométrico, no gozan de dicha propiedad.

Ejemplo:

En el gráfico el lugar geométrico son todos los puntos que equidistan de A y B.

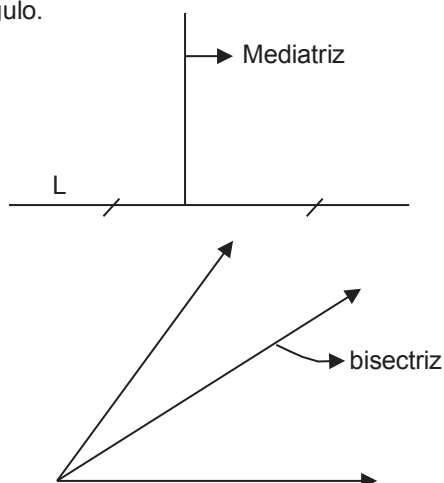


MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO.-

Es la perpendicular levantada desde el punto medio de un segmento. Las propiedades de los puntos sobre la mediatriz son:

- Todo punto situado en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.
- Todo punto del plano que equidista de los extremos de un segmento, pertenece a la mediatriz del segmento.

BISECTRIZ DEL ÁNGULO.- Es el rayo que teniendo como origen el vértice, lo divide en dos ángulos iguales. Los puntos que están sobre la bisectriz equidistan de los lados del ángulo.



RECTAS PARALELAS

Dos rectas son paralelas, en un plano, si el prolongarlas no tienen ningún punto común, Toda recta es paralela a sí misma. El paralelismo se denota con el símbolo //.

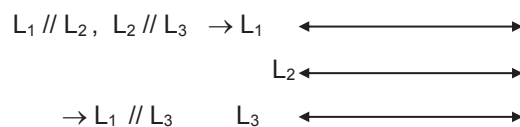
POSTULADO DE LAS PARALELAS

- Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela a (El postulado de Euclides es discutido en este aspecto, pero no se ha logrado demostrar lo contrario) esa recta.

De este postulado se deducen tres corolarios.

COROLARIOS

- 1) **Corolario I:** Dos paralelas a una tercera son paralelas entre si. En la fig.



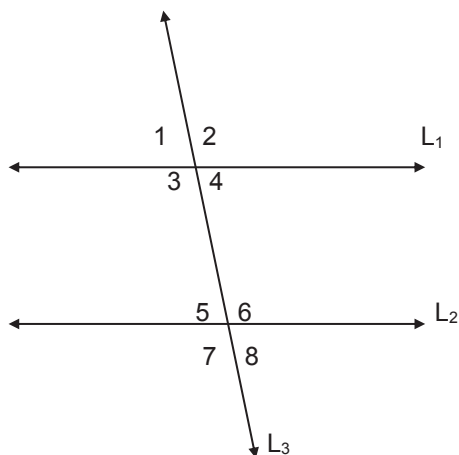
- 2) **Corolario II:** Si una recta corta a una de dos paralelas, corta también a la otra paralela.

- 3) **Corolario III:** Si una recta es perpendicular a una de las rectas paralelas, es también perpendicular a la otra.

Ángulos formados por dos paralelas al ser cortadas por una secante.

El número de ángulos formados es de ocho, como muestra la fig. El nombre que toman estos ángulos son los siguientes:

- Ángulos internos: 3, 4, 5 y 6
- Ángulos externos: 1, 2, 7 y 8
- Ángulos alternos internos: 3 y 6; 4 y 5.
- Ángulos alternos externos: 1 y 8; 2 y 7.
- Ángulos correspondientes: 1 y 5; 3 y 7; 2 y 6; 4 y 8.
- Ángulos conjugados internos: 3 y 5, 4 y 6.
- Ángulos conjugados externos: 1 y 7; 2 y 8.



Propiedades de los ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes y conjugados internos.-

Ángulos alternos internos.- Son iguales; en la fig. anterior los ángulos 3 y 6 son iguales al igual que el 4 y 5.

Ángulos alternos externos.- Son iguales; se encuentran en la parte externa de cada paralela. En la fig. anterior los ángulos 1 y 8 son iguales al igual que el 2 y 7.

Ángulos correspondientes.- Son iguales; se los puede ubicar en la fig. anterior:

$$1 = 5; 3 = 7; 2 = 6; 4 = 8.$$

Ángulos conjugados internos.- Son ángulos complementarios, es decir sumados da 180° , así tenemos en la figura anterior que

$$\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ; \angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$$

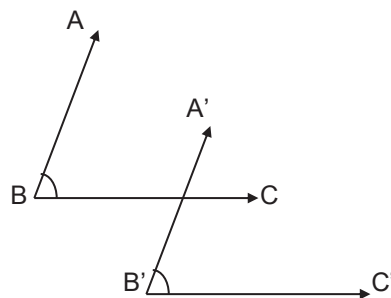
ÁNGULOS DE LADOS

RESPECTIVAMENTE PARALELOS Y

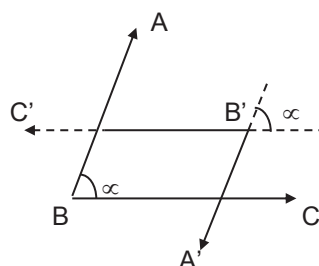
PERPENDICULARES

Ángulos de lados respectivamente paralelos:

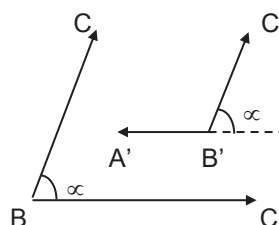
Primero.- Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos ($//$ s) y dirigidos en un mismo sentido entonces son iguales. Fig. a



Segundo.- Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente $//$ s y dirigidos en sentido contrario son iguales. Fig. b.

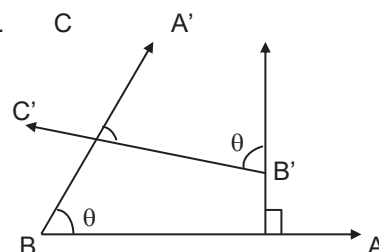


Tercero.- Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente $//$ s dos de ellos dirigidos en el mismo sentido, y los otros en sentido contrario, dichos ángulos son suplementarios. Fig. c.

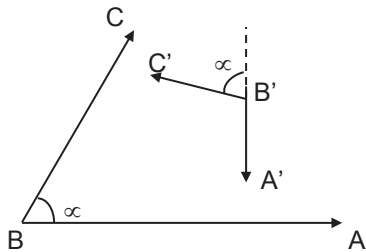


Ángulos de lados respectivamente perpendiculares:

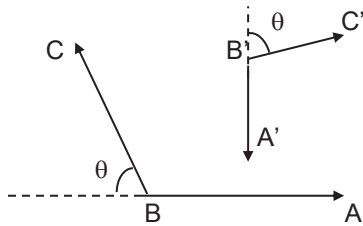
Primero.- Dos ángulos cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son iguales. Fig. a.



Segundo.- Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son suplementarios. Fig. b



Tercero.- Si dos ángulos obtusos tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales. Fig. c.



Propiedad de los ángulos interiores de un triángulo

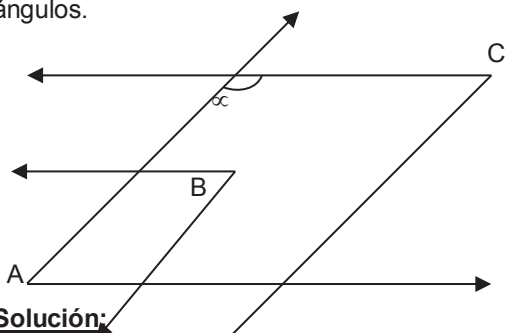
La propiedad fundamental es que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° . Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto.

En un triángulo rectángulo, la suma de los ángulos agudos es 90° , es decir, son complementarios.

Ejemplos:

- 1) En la Figura los lados de los ángulos A, B y C son paralelos.

Si el $\angle a = 150^\circ$. Cuánto miden c/u de estos ángulos.



Solución:

El ángulo a; es conjugado interno con el $\angle C$, luego sumados dan 180° ; luego:

$$\angle C = 180^\circ - a$$

$$\angle C = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\angle C = 30^\circ$$

Pero $\angle C = \angle A = \angle B$ por tener lados paralelos, luego, $\angle A = \angle B = 30^\circ$

- 2) En el gráfico adjunto $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$. Calcular la medida del $\angle x$.

Solución:

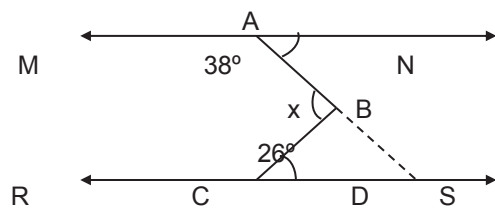
Prolongando AB hasta D, se tiene:

$\angle A = \angle D = 38^\circ$, por ser alternos internos.

Luego, en el triángulo CBD, se tiene:

$\angle X = \angle C + \angle D$, por definición del exterior, luego: $\angle X = 26^\circ + 38^\circ$.

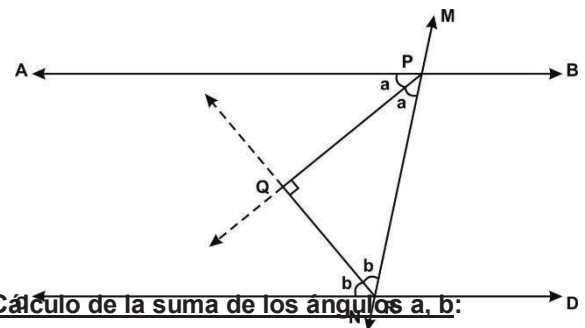
$$\therefore \angle X = 64^\circ$$



- 3) Se tiene 2 rectas paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cortadas por una secante $\overline{MN}$. Calcular la medida del ángulo determinado por las bisectrices de 2 ángulos conjugados internos.

Solución:

Construimos el gráfico de acuerdo con los datos del problema.



Cálculo de la suma de los ángulos a, b:

En el $\triangle PQR$ se tiene:

$$2a + 2b = 180^\circ$$

$$a + b = 90^\circ$$

Cálculo del ángulo PQR:

En el $\triangle PQR$ se tiene:

$$\angle PQR = 180^\circ - (a + b)$$

$$\angle PQR = 180^\circ - 90^\circ \rightarrow \angle PQR = 90^\circ$$

- 4) Calcular la medida del ángulo formado por la bisectriz de uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles y la altura relativa a la base, si el ángulo opuesto a la base mide 104° .

Solución:

Sea el triángulo isósceles ABC y X el ángulo formado por la bisectriz AO y la altura BP .

Cálculo del ángulo a

En el $\triangle APB$ se tiene:

$$2a + 52^\circ = 90^\circ$$

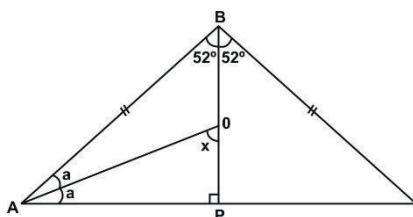
$$2a = 38^\circ \rightarrow a = 19^\circ$$

Cálculo del ángulo X

En el $\triangle APO$, se tiene:

$$a + x = 90^\circ \rightarrow X = 90^\circ - a$$

$$\therefore X = 71^\circ$$



- 5) En un triángulo ABC , el $\angle A$ mide 62° . Calcular la medida del menor ángulo formado por las bisectrices exteriores de los ángulos B y C .

Solución:

Sea X el ángulo determinado por las bisectrices BP y CP .

Cálculo del $m + n$

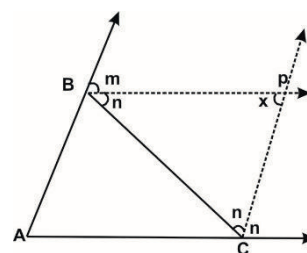
Según el gráfico se tiene:

$$2m = 62^\circ + C$$

Por ser ángulo exterior $2n = 180 - C$, pro ser ángulo exterior.

$$\text{Sumando: } 2m + 2n = 242^\circ$$

$$m + n = 121$$



Cálculo del $\angle X$

En el triángulo BPC , se tiene:

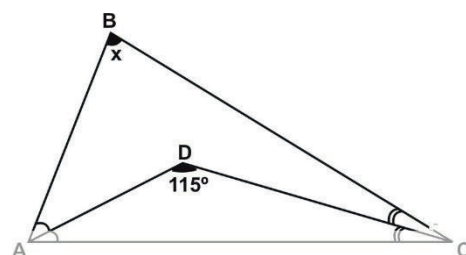
$$x + m + n = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - (m + n)$$

$$\therefore x = 59^\circ$$

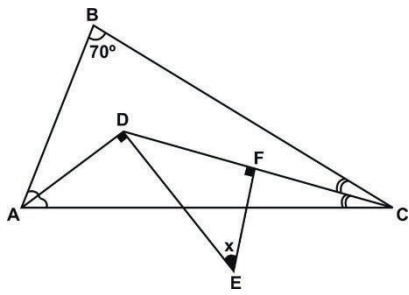
PRÁCTICA CALIFICADA

1)



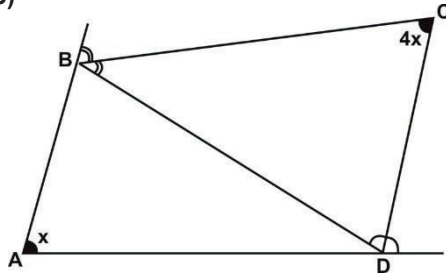
Rpta. 50°

2)



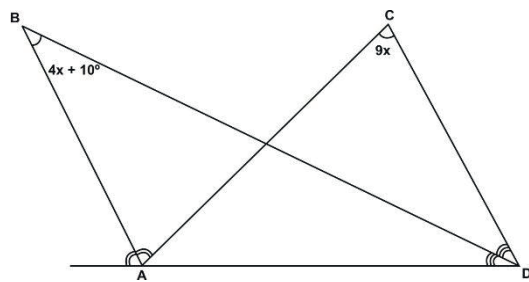
Rpta. 55°

3)



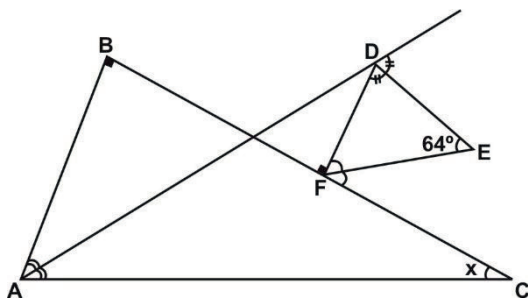
Rpta. 20°

4)



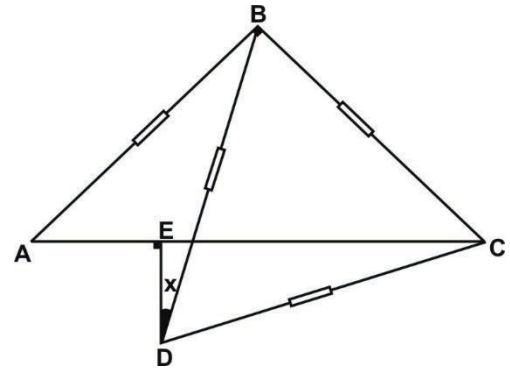
Rpta. 20°

5)



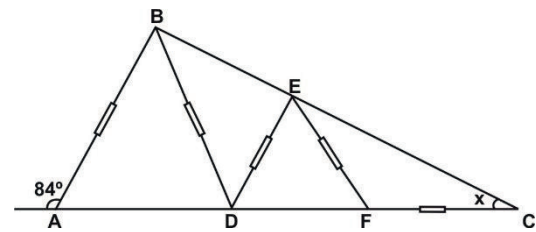
Rpta. 14°

6)



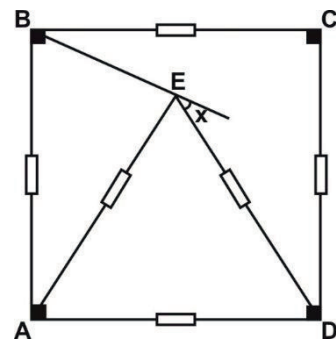
Rpta. 15°

7)



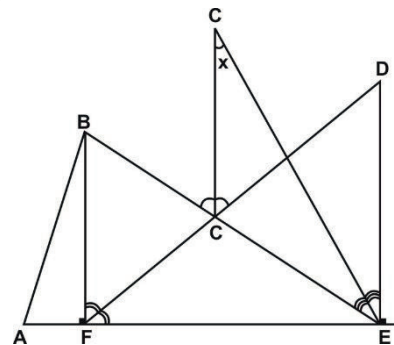
Rpta. 24°

8)

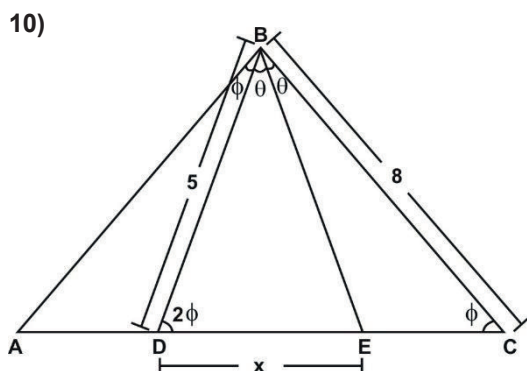


Rpta. 45°

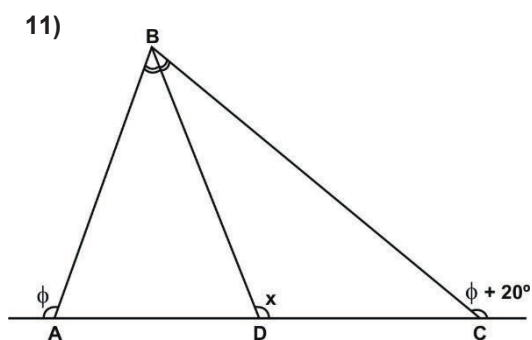
9)



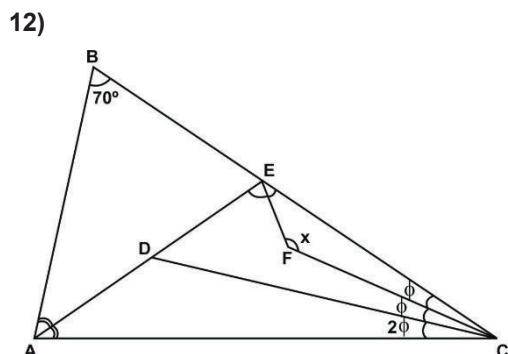
Rpta. $(22,5)^\circ$



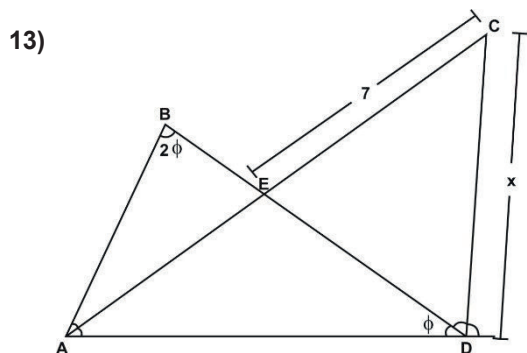
Rpta. 3°



Rpta. 100°

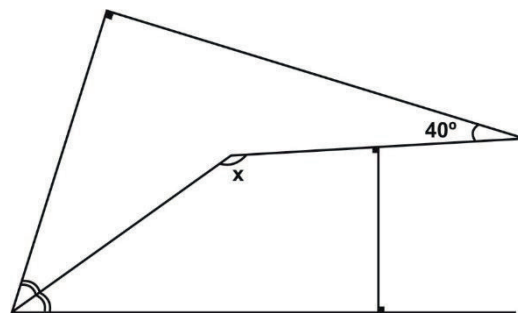


Rpta. $(117,5)^\circ$



Rpta. 7

14)



Rpta. 155°

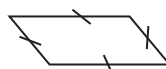
CUADRILÁTEROS

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Sus lados opuestos no tienen vértice común y sus lados consecutivos tienen un vértice común. La suma de los ángulos interiores es de 360° .

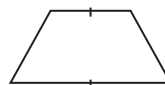
Sólo es posible trazar una diagonal desde un vértice.

CLASIFICACIÓN

1. **Paralelogramo:** Si sus lados opuestos son paralelos 2 a 2.



2. **Trapezio:** Si son paralelos sólo un par de lados opuestos.



3. **Trapezoide:** Si no existe paralelismo entre sus lados.

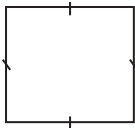


PARALELOGRAMO.- El paralelogramo propiamente dicho es aquel que tiene sus lados y ángulos consecutivos desiguales.

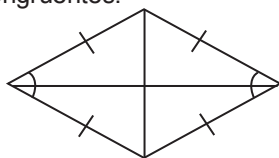
El rectángulo.- Es un paralelogramo cuyos cuatro ángulos son rectos.



El cuadrado.- Es un rectángulo cuyos lados son congruentes.

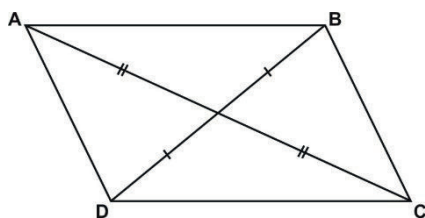


El rombo.- Es un paralelogramo cuyos lados son congruentes.



PROPIEDADES DEL PARALELOGRAMO

1. En un paralelogramo los lados y ángulos opuestos son iguales.
2. La diagonal de un paralelogramo, lo divide en dos Δ s congruentes.
3. Dos segmentos comprendidos entre dos paralelas, son iguales.
4. Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.
5. Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.



$$\Delta ABC = \Delta BCD$$

IGUALDAD DE PARALELOGRAMO.-

Dos paralelogramos son iguales si sus lados y ángulos correspondientes son iguales.

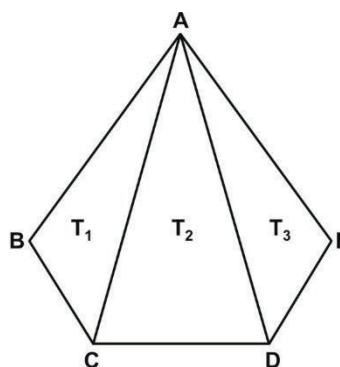
PROPIEDAD DE LAS DIAGONALES DE UN ROMBO

- Las diagonales de un rombo son perpendiculares.
- Las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES Y EXTERIORES DE UN POLÍGONO CONVEXO

Suma de los ángulos internos de un polígono convexo.-

La suma de la medida de los ángulos de un polígono convexo de n lados es igual al producto $180^\circ \times (n - 2)$. Esta fórmula surge debido a que en cualquier polígono el número de triángulos que se puede formar, es igual al número de lados que tiene el polígono, menos dos; y como cada triángulo suma 180° esto se multiplica por tantos triángulos que resultan en el polígono.



Suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo.-

La suma de los ángulos exteriores de todo polígono convexo es igual a 360° . En la figura, tenemos:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ$$

Sabemos que la suma de ángulos interiores más la suma de ángulos exteriores es igual al número de vértices por 180° .

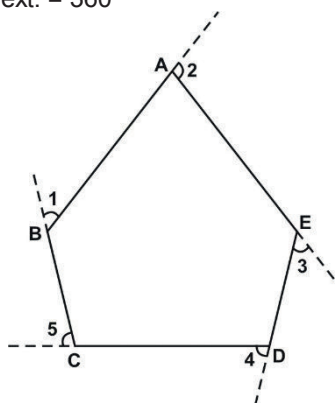
Sea n = número de vértices $(n - 2)$ = número de triángulos.

Luego; $\angle \text{int.} + \angle \text{ext.} = (180^\circ)(n)$

Como $\angle \text{int.} = (180)(n - 2) \rightarrow$

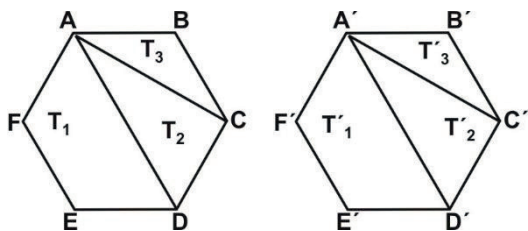
$$\begin{aligned}\angle \text{ext.} &= 180n - 180n + 360 \\ &= 360\end{aligned}$$

$\therefore \angle \text{ext.} = 360^\circ$



IGUALDAD DE POLÍGONOS.-

- Dos polígonos son iguales si tienen igual número de lados y si los lados y ángulos correspondientes son iguales.
- Dos polígonos son iguales si pueden descomponerse en igual número de triángulos respectivamente iguales, y dispuestos del mismo modo.



Polig. $FABCDE = \text{Polig. } F'A'B'C'D'E'$

EJERCICIOS

1. Hallar el polígono cuya suma de ángulos internos es de 540° .

Solución:

Sea n el número de lados del polígono, entonces por definición se tiene:

$$\text{Suma del } \angle \text{int.} = (180)(n - 2)$$

pero: Suma del $\angle \text{int.} = 540^\circ$

$$\rightarrow 540 = (180)(n - 2)$$

$$540 = 180n - 360$$

$$180n = 900 \rightarrow n = 5$$

$\therefore$ el polígono es un pentágono

2. En un polígono, la suma de los ángulos internos más la suma de los ángulos exteriores es igual a 1080° . Hallar el número de lados del polígono.

Solución:

$$\text{Suma } \angle \text{int.} + \text{suma } \angle \text{ext.} = 1080^\circ$$

Por definición sabemos que:

$$\text{Suma } \angle \text{int.} = 180^\circ (n - 2)$$

$$\text{Suma } \angle \text{ext.} = 360^\circ$$

$$\text{Luego: } (180)(n - 2) + 360^\circ = 1080^\circ$$

$$180n - 360 + 360 = 1080^\circ$$

$$180n = 1080^\circ \rightarrow n = \frac{1080^\circ}{180^\circ} = 6$$

$\therefore$ el polígono es un hexágono

3. La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a 900° . Determine el tipo del polígono que justifica el problema.

Solución:

$$\text{Suma } \angle \text{int.} = 180(n - 2)$$

$$900 = 180(n - 2)$$

$$900 = 180n - 360$$

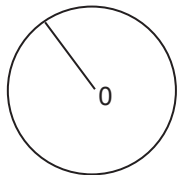
$$180n = 900 + 360$$

$$n = 7$$

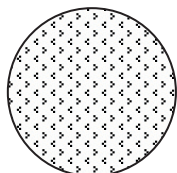
$\therefore$ el polígono es un heptágono

DEFINICIONES GENERALES

CIRCUNFERENCIA.- Es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de otro punto llamado centro.



CÍRCULO.- Es el conjunto de puntos interiores de la circunferencia. Así, la figura sombreada representa un círculo.



LÍNEAS EN LA CIRCUNFERENCIA

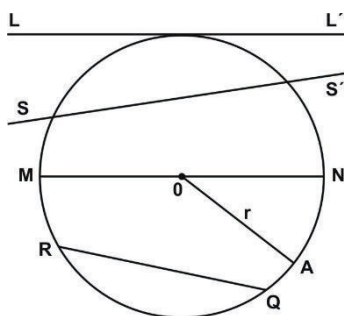
Radio.- Segmento cuyos extremos son el centro y un punto cualquiera de la circunferencia.

Cuerda.- Segmento cuyos extremos son dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

Diámetro.- Cuerda que contiene al centro.

Secante.- Recta que contiene a una cuerda.

Tangente.- Recta que tiene sólo un punto de contacto común con la circunferencia.



En la figura se observan.

$$\text{radio } (r) = \overline{OA} \quad \text{arco} = \overline{RQ}$$

$$\text{cuerda} = \overline{RQ} \quad \text{diámetro} = \overline{MN}$$

$$\text{secante} = \overline{SS'} \quad \text{tangente} = \overline{LL'}$$

RELACIONES ENTRE ARCOS, CUERDAS Y

ÁNGULOS

En una circunferencia (o circunferencias iguales) a arcos iguales corresponden cuerdas iguales y ángulos iguales.

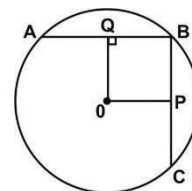
- A mayor cuerda mayor arco y mayor ángulo.

Nota: Siempre que el ángulo sea central.

- En una circunferencia (o circunferencias iguales), las cuerdas iguales equidistan del centro.

Así, en la figura se tiene:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OP}}$$

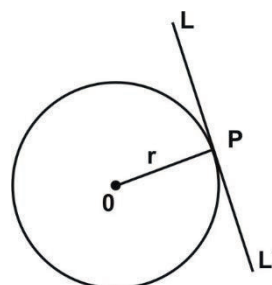


RELACIÓN ENTRE LA TANGENTE Y EL RADIO EN EL PUNTO DE CONTACTO

La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto; este punto pertenece a la circunferencia.

Si LL' es tangente

$$\rightarrow \overline{OP} \perp \overline{LL'}$$

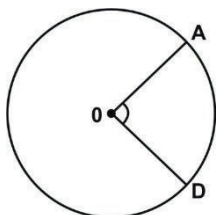


MEDIDA DE ÁNGULO EN EL CÍRCULO

Es conveniente conocer conceptos preliminares de:

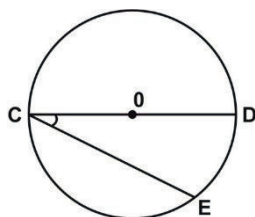
Ángulo Central.- Es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. La medida de este ángulo es igual al arco correspondiente.

$$\angle AOD = \widehat{AD}$$



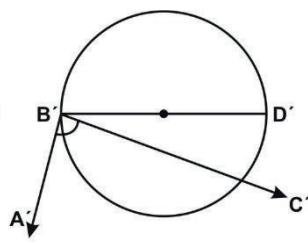
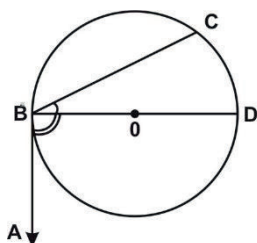
Ángulo Inscrito.- Es el que tiene su vértice en la circunferencia, y sus lados intersecan a la circunferencia. La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco interceptado.

$$\angle DCE = \frac{1}{2} \widehat{DE}$$



CASOS:

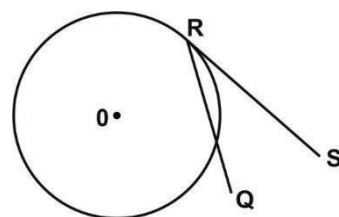
- Cuando uno de los lados del ángulo contienen al diámetro de la circunferencia: $\angle ABD$.
- Cuando el centro de la circunferencia es interior, y exterior al ángulo: $\angle ABC$ y $\angle A'B'C'$.



Ángulo formado entre la secante y la tangente cuyo vértice está en la

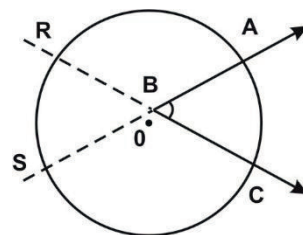
circunferencia.- Su medida es la mitad de arco intersectado:

$$\angle QRS = \frac{\widehat{RQ}}{2}$$



Ángulo cuyo vértice está en el interior de la circunferencia y que el vértice esté en el centro.- La medida es igual a la semisuma de las medidas de los arcos intersectados por los lados del ángulo dado y el de su opuesto por el vértice.

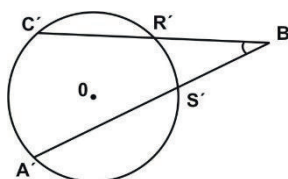
$$\angle ABC = \frac{\widehat{AC} + \widehat{RS}}{2}$$



Ángulo cuyo vértice está en el exterior de la circunferencia:

La medida es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos intersectados por los lados.

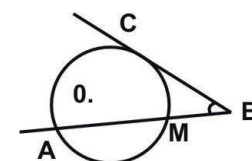
$$\angle A'B'C' = \frac{\widehat{A'C'} - \widehat{R'S'}}{2}$$



CASOS:

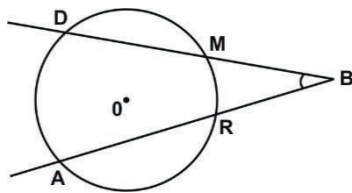
- Cuando un lado es secante y el otro es tangente:

$$\angle ABC = \frac{\widehat{AC} - \widehat{CM}}{2}$$



- Cuando los lados son secantes:

$$\angle ABC = \frac{\widehat{AD} - \widehat{MR}}{2}$$



sabiendo que el arco $\widehat{BD} = 10^\circ$, podemos sustituir en la igualdad anterior y tenemos:

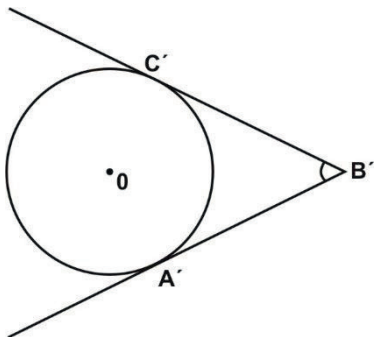
$$\angle BCD = \frac{80^\circ - 10^\circ}{2}$$

$$\angle BCD = \frac{70^\circ}{2}$$

$$\angle BCD = 35^\circ \text{ Rpta.}$$

- Cuando los lados son tangentes:

$$\angle A'B'C' = \frac{\widehat{C'A'} - \widehat{A'C'}}{2}$$



2. Si $\widehat{AB} = 80^\circ$ y $\widehat{BD} = 40^\circ$, hallar el $\angle DCB$.

Solución:

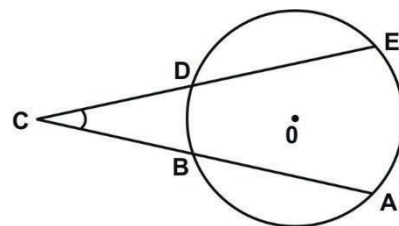
Sabemos que:

$$\angle C = \frac{\widehat{AE} - \widehat{BD}}{2}, \text{ luego reemplazando valores}$$

se tiene:

$$\angle DCB = \frac{80 - 40}{2} = \frac{40}{2} = 20^\circ$$

$$\therefore \angle DCB = 20^\circ$$



Ejercicios de Aplicación:

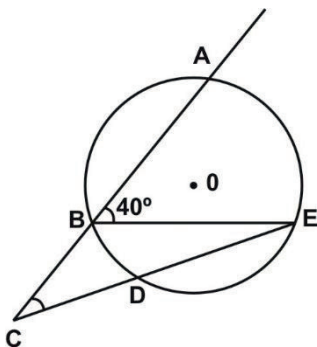
1. En la figura dada hallar el $\angle BCCD$, sabiendo que.

arco $\widehat{BD} = 10^\circ$ y $\angle ABE = 40^\circ$

Solución:

Sabemos que:

$$\angle BCD = \frac{\text{Arco } \widehat{AE} - \text{Arco } \widehat{BD}}{2}$$



3. Si $\widehat{DC} = 40^\circ$ y $\widehat{AE} = 80^\circ$, hallar el $\angle ABE$.

Solución:

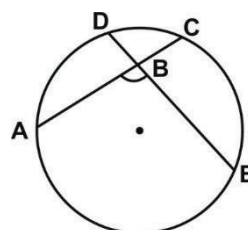
Por definición sabemos que:

$$\angle ABE = \frac{\widehat{AE} + \widehat{DC}}{2}$$

Reemplazando valores se tiene:

$$\angle ABE = \frac{80 + 40}{2} = \frac{120}{2} = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ABE = 60^\circ$$



Luego tenemos que el arco $\widehat{AE}$ es el doble del $\angle ABE = 40^\circ$, es decir arco $\widehat{AE} = 80^\circ$ y

4. Si $\angle AOC = 70^\circ$. Hallar el $\angle ABC$.

Solución:

En la figura adjunta se observa que el arco de $\angle ABC$ es igual al arco de $\angle AOC$.

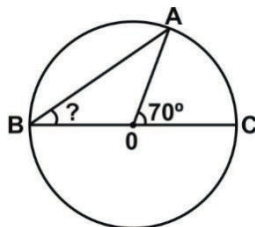
Por definición del ángulo central se tiene:

$$\angle AOC = \widehat{AC} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Por otro lado el } \angle ABC = \frac{1}{2} \widehat{AC} \dots\dots (2)$$

De (1) se tiene que $\widehat{AC} = 70^\circ$, luego reemplazando en (2), $\angle ABC = 35^\circ$.

$$\therefore \angle ABC = 35^\circ$$



TEOREMA DE THALES

Se enuncia de la siguiente manera:

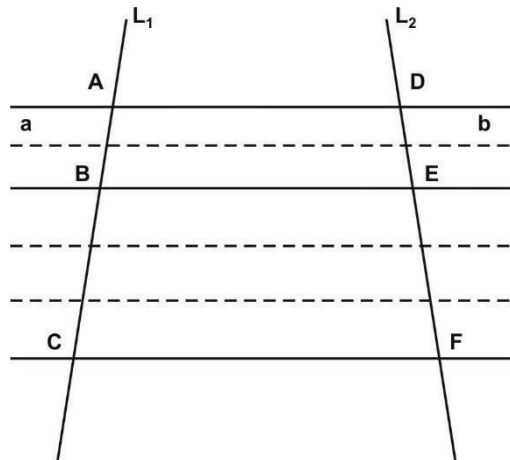
Si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos proporcionales.

Demostración:

Sean las secantes L_1 y L_2

$AD \parallel BE \parallel CF$

$$\text{Demostrar que: } \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



La medida común entre AB y BC va a ser a contenida dos y tres veces y trazamos //s por esos puntos de división, a las dadas. Luego tenemos $AB = 2a$ y $BC = 3a$, dividiendo ambos términos tenemos: $AB/BC = 2/3$, las //s auxiliares trazadas, determinan segmentos iguales en la otra secante, de medida común b; luego $DE = 2b$ y $EF = 3b$, realizando la misma operación anterior tenemos $DE/EF = 2/3$, pero $2/3$ es igual a AB/BC , entonces:

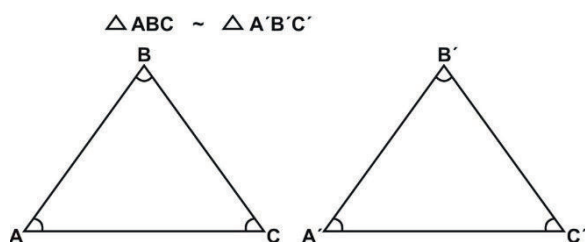
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

TRIÁNGULOS SEMEJANTES

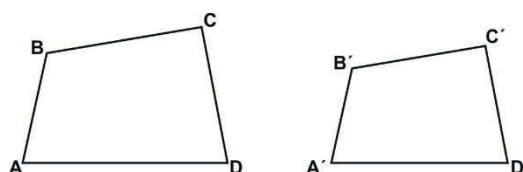
Dos triángulos son semejantes si los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales. La razón de semejanza de dos triángulos es el cociente que hay entre sus lados correspondientes.

CASOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

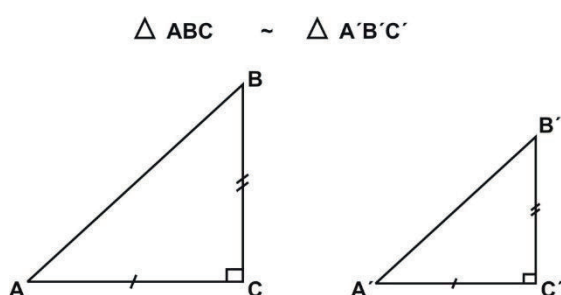
Primer Caso.- Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales.



$$\frac{P}{P'} = \frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{AD}}{A'D'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'} = \frac{\overline{DC}}{D'C'}$$

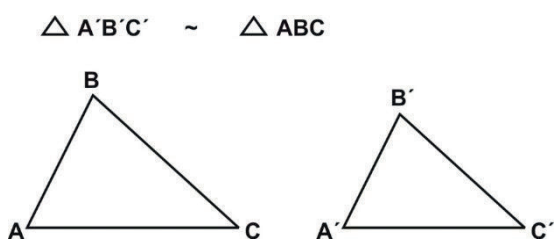


Segundo Caso.- Dos triángulos son semejantes si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos iguales.



Tercer Caso.- Dos triángulos son semejantes si los lados correspondientes son proporcionales.

Si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

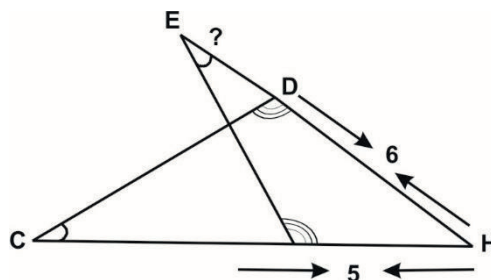


RELACIÓN ENTRE DOS POLÍGONOS SEMEJANTES

Dos polígonos son semejantes en general. Si sus triángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes proporcionales. Relación entre los perímetros y los lados homólogos: La razón de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de sus lados homólogos.

EJERCICIOS

1. En la figura los ángulos E y C son iguales entre sí; $\overline{CB}$ es el doble de ED. Si $\overline{AD} = 6$ cm y $\overline{AB} = 5$ m. Hallar $\overline{ED}$.



Solución:

Según los datos podemos afirmar que los dos $\triangle$ s son semejantes, por tener dos ángulos iguales (1er. caso). Aplicando la razón de semejanza:

$$\frac{\overline{ED} + 6}{5} = \frac{2\overline{ED} + 5}{6}$$

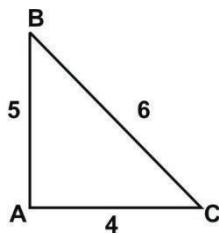
siendo: $\overline{EA} = \overline{ED} + 6$

$$\overline{CA} = 2\overline{ED} + 5$$

Resolviendo tenemos:

$$\overline{ED} = 2.75 \text{ cm. Rpta.}$$

2. Los lados de un triángulo mide 5 cm, 6 cm y 4 cm. Calcular las longitudes de los lados de otro triángulo semejante a éste, cuyo perímetro mide 60 cm.



Solución:

$$P = 15 \text{ cm.} \quad P' = 60 \text{ cm}$$

Cálculo de a'

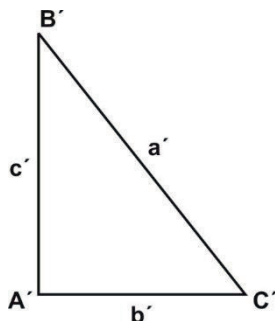
$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} \rightarrow \frac{15}{60} = \frac{5}{a'} \rightarrow a' = 20 \text{ cm.}$$

Cálculo de b'

$$\frac{P}{P'} = \frac{b}{b'} \rightarrow \frac{15}{60} = \frac{4}{b'} \rightarrow b' = 16 \text{ cm.}$$

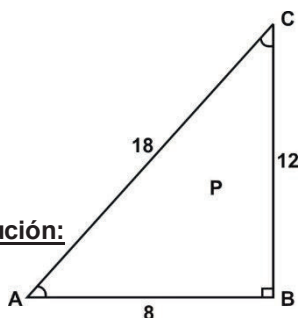
Cálculo de c'

$$\frac{P}{P'} = \frac{c}{c'} \rightarrow \frac{15}{60} = \frac{5}{c'} \rightarrow c' = 20 \text{ cm.}$$



3. Los lados de un triángulo ABC miden; $\overline{AB} = 8 \text{ cm.}$; $\overline{BC} = 12 \text{ cm}$ y $\overline{AC} = 18 \text{ cm}$. Si el perímetro de otro triángulo semejante es los $\frac{3}{4}$ del perímetro del triángulo ABC. ¿Cuánto miden sus lados?

Solución:



$$P = 8 + 12 + 18 = 38 \text{ cm}$$

$$P' = \frac{3}{4} (38) = 28.50 \text{ cm.}$$

Cálculo de c'

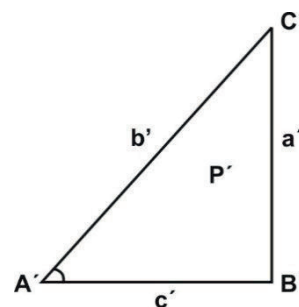
$$\frac{P}{P'} = \frac{c}{c'} \rightarrow \frac{38}{28.50} = \frac{8}{c'} \rightarrow c' = 6 \text{ cm}$$

Cálculo de a'

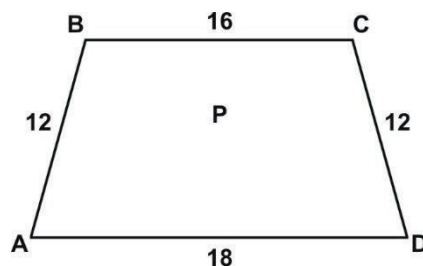
$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} \rightarrow \frac{38}{28.50} = \frac{12}{a'} \rightarrow a' = 9 \text{ cm}$$

Cálculo de b'

$$\frac{P}{P'} = \frac{b}{b'} \rightarrow \frac{38}{28.50} = \frac{18}{b'} \rightarrow b' = 13.5 \text{ cm}$$



4. Los lados de un cuadrilátero miden respectivamente, 12 cm, 18 cm, 12 cm. ¿Cuál es la longitud de los lados de otro cuadrilátero semejante al anterior y cuyo perímetro mide 87 cm?



Solución:

Cálculo de x

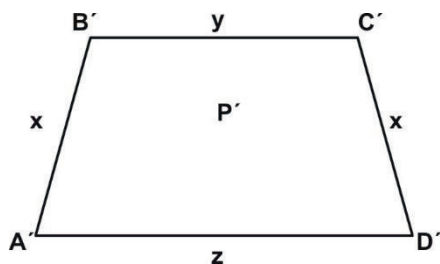
$$\frac{P}{P'} = \frac{x}{x} \rightarrow \frac{58}{87} = \frac{12}{x} \rightarrow x = 18 \text{ cm}$$

Cálculo de y

$$\frac{P}{P'} = \frac{16}{y} \rightarrow \frac{58}{87} = \frac{16}{y} \rightarrow y = 24 \text{ cm}$$

Cálculo de z

$$\frac{P}{P'} = \frac{18}{z} \rightarrow \frac{58}{87} = \frac{18}{z} \rightarrow z = 27 \text{ cm}$$

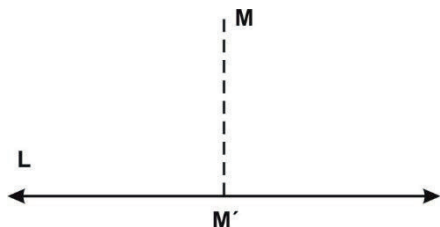


PROPIEDADES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO

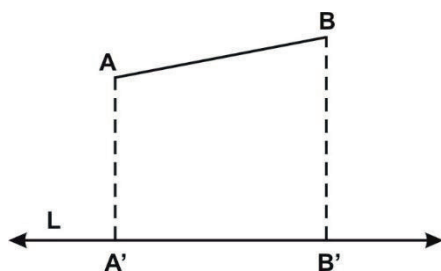
Proyección Ortogonal de un punto y un segmento sobre una Recta.- Proyección

Ortogonal de un punto, sobre una recta.-

Viene a ser el pie de la perpendicular trazada desde dicho punto a la recta (fig. a).



Proyección Ortogonal de un segmento sobre una recta.- Es el segmento determinado sobre la recta por las proyecciones de los extremos del segmento dado (fig. b)

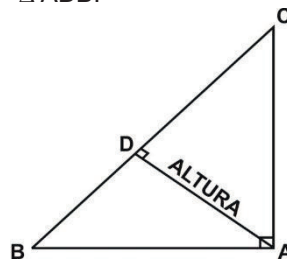


PROPIEDADES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Si en un triángulo rectángulo se traza la altura relativa a la hipotenusa, se verifica:

1. Los triángulos rectángulos resultantes, son semejantes entre sí, y semejantes al triángulo dado.

$$\triangle ABC \sim \triangle ADC; \triangle ADB \sim \triangle ABC \text{ y } \triangle ADC \sim \triangle ADB.$$



2. La altura $\overline{AD}$ es media proporcional entre los segmentos que divide a la hipotenusa.

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

3. La altura $\overline{AD}$ es cuarta proporcional entre la hipotenusa y los catetos.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$$

4. Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}; \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

5. La razón de los cuadrados de los catetos, es igual a la razón de los segmentos que la altura determina en la hipotenusa.

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

Nota: Estas verificaciones resultan de aplicar la semejanza de triángulos.

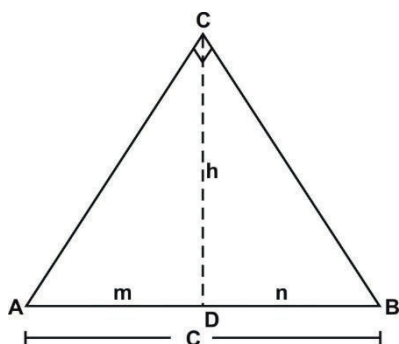
TEOREMA DE PITÁGORAS

En un Δ rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Demostración:

Sea el triángulo; ABC recto en C. Tracemos $CD \perp a$ AB, aquí tenemos dos triángulos semejantes ADC y BCD, y podemos afirmar lo siguiente:

$\frac{c}{a} = \frac{a}{n}$ y $\frac{c}{b} = \frac{b}{m}$ (por la prop. de la altura relativa a la hipotenusa).



Efectuando lo anterior tenemos:

$$a^2 = cn \text{ y } b^2 = cm.$$

Sumando ambas ecuaciones miembro a miembro tenemos:

$$a^2 + b^2 = c(n + m)$$

Pero $n + m = c$, luego reemplazando tenemos:

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ ó } CB^2 + CA^2 = AB^2$$

GENERALIDADES DE TEOREMA DE PITÁGORAS

(Cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo en un triángulo). En todo triángulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de estos dos lados por la proyección del otro sobre él.

Ejemplo:

Sea el triángulo ABC, A el ángulo agudo, demostrar que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \overline{AD}$$

Demostrar:

En el triángulo CDB: $a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$ (1)

En el triángulo CDA:

$$\overline{CD}^2 = b^2 - \overline{AD}^2 \dots\dots\dots (2)$$

En el segmento $\overline{AB}$:

$$\overline{DB} = c - \overline{AD} \dots\dots\dots (3)$$

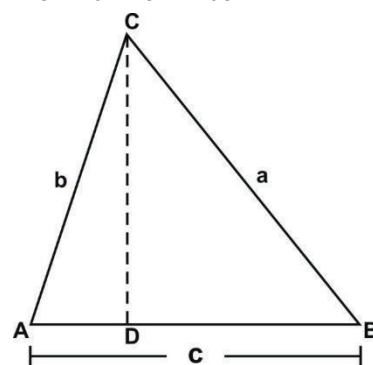
Sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$a^2 = b^2 - \overline{AD}^2 + (c - \overline{AD})^2$$

de donde:

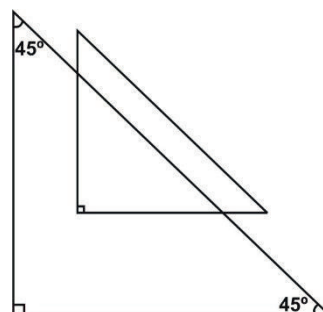
$$a^2 = b^2 - \overline{AD}^2 + c^2 - 2c \overline{AD} + \overline{AD}^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \overline{AD}$$

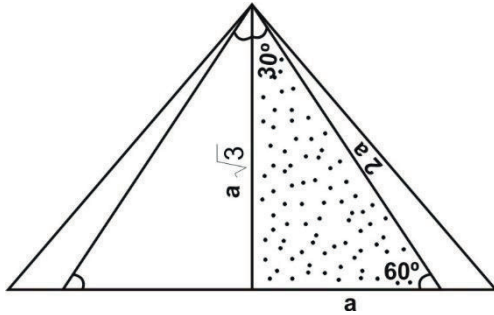


Casos Especiales.-

1. En un triángulo rectángulo isósceles la hipotenusa es $\sqrt{2}$ la longitud de un cateto.

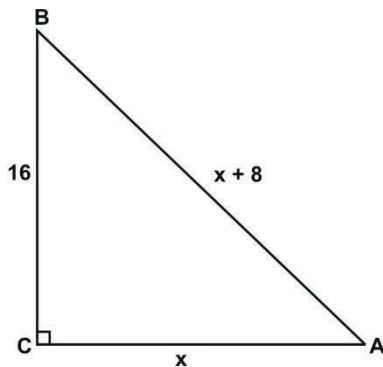


2. En un triángulo rectángulo donde los ángulos sean 30 y 60 grados la longitud de la hipotenusa es doble de la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30°.



EJERCICIOS:

1. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 8 m. Más que el cateto menor. Si el cateto mayor mide 16 m. Hallar su perímetro.



Solución:

Sea el triángulo rectángulo ABC, recto en C; $\overline{AC}$ el cateto menor y $\overline{AB}$ la hipotenusa haciendo.

$\overline{AC} = x$, la hipot. $\overline{AB}$ será igual a: $\overline{AB} = x + 8$ y conociendo el otro cateto $\overline{BC} = 16$, podremos aplicar el teorema de Pitágoras, es decir:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2; (x + 8)^2 = x^2 + 16^2$$

$x^2 + 2(8)x + 8^2 = x^2 + 16^2$ transponiendo términos se llega a:

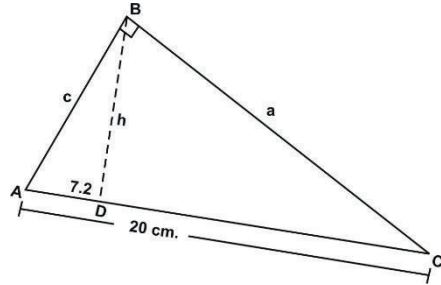
$$16x = 256 - 64 \rightarrow x = 12$$

$$\text{Luego, } \overline{AB} = 12 + 8 = 20$$

El perímetro es la suma: $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = P$

$$P = 20 + 12 + 16 = 48 \quad \text{Rpta.}$$

2. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm., la proyección de un cateto sobre ella mide 7.2 cm. Calcular la longitud de los catetos.



Solución:

Cálculo de $\overline{DC}$:

$$\overline{DC} = 20 - 7.2 \quad \overline{DC} = 12.8$$

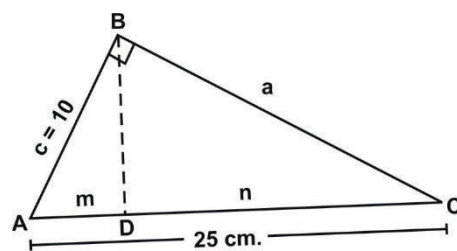
Cálculo de a :

$$\frac{20}{a} = \frac{a}{12.8} \rightarrow a^2 = 256 \rightarrow a = 16 \text{ cm.}$$

Cálculo de c :

$$\frac{20}{c} = \frac{c}{7.2} \rightarrow c^2 = 144 \rightarrow c = 12 \text{ cm}$$

3. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm y uno de sus catetos mide 10 cm. ¿Cuántos miden las proyecciones e los catetos sobre la hipotenusa?



Solución:

Sean m y n las proyecciones de los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ sobre la hipotenusa $\overline{AC}$.

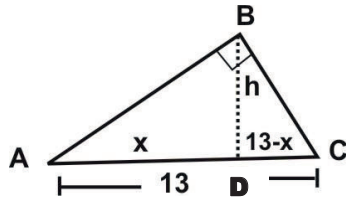
$$\frac{25}{10} = \frac{10}{m} \rightarrow 25m = 100$$

$$m = 4 \text{ cm}$$

$$n = 25 - 4 = 21$$

$$\therefore n = 21 \text{ cm}$$

4. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de 13 cm y la altura trazada del ángulo reto 6 cm. Calcular la medida de los segmentos determinados sobre dicha hipotenusa.



Solución:

En el gráfico:

$$\frac{x}{6} = \frac{6}{13-x} \rightarrow 36 = 13x - x^2$$

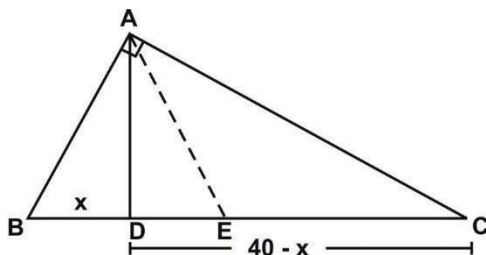
$$x^2 = 13x - 36 = 0$$

$$(x-9)(x-4) = 0$$

$$\rightarrow x = 9 \wedge x = 4$$

$\therefore$ Los segmentos miden 9 cm y 4 cm.

5. En el triángulo ABC, es rectángulo en A. Si $8\overline{AB} = 24$; $\overline{BC} = 40$; $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ y $\overline{AE}$ es la mediana de $\overline{BC}$, hallar $\overline{DE}$.



Solución:

Se sabe que: $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$

Luego: $\frac{40}{24} = \frac{24}{x} \rightarrow x = 14.4$

Cálculo de $\overline{DE}$

$$\overline{DE} = \overline{BC} - (\overline{EC} + \overline{BD})$$

$$\rightarrow \overline{DE} = 40 - (20 + 14.40)$$

$$\overline{DE} = 40 - 34.40$$

$$\therefore \overline{DE} = 5.60$$

ÁREA DE LAS FIGURAS PLANAS

FIGURAS EQUIVALENTES.- Son las que se obtienen como suma o diferencia de figuras iguales: dos figuras equivalentes tienen sus áreas iguales.

ÁREA DEL RECTÁNGULO.- Es el producto de su base por su altura. (fig. a)

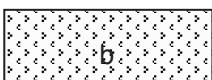
$$A = b \cdot h$$


fig. a

ÁREA DEL CUADRADO.- Es igual al cuadrado de su lado. (fig. b)

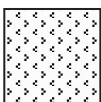
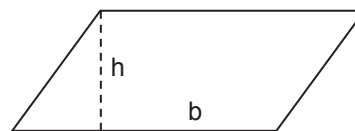
$$A = L^2$$


fig. b

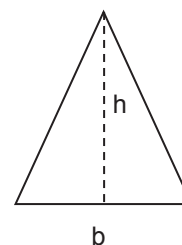
ÁREA DE UN PARALELOGRAMO.- Es igual al producto de su base y su altura. (fig. c).

$$A = b \cdot h \quad (\text{o dos veces el área de un triángulo})$$

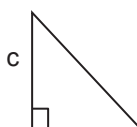


ÁREA DE UN TRIÁNGULO.- Es igual al semiproducto de su base por la altura (fig. d)

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



ÁREA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO.- Es igual al semiproducto de sus catetos (fig. e)

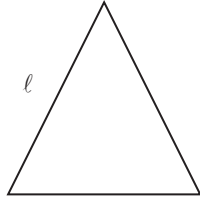
$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$


b

ÁREA DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO EN FUNCIÓN DEL LADO.

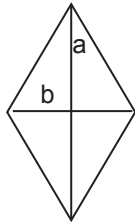
- Es igual a la cuarta parte del producto del cuadrado del lado y la $\sqrt{3}$ (fig. f)

$$A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$



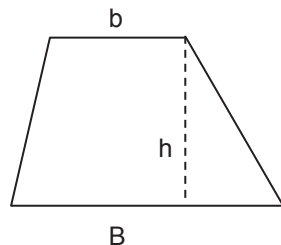
ÁREA DE UN ROMBO. - Es igual a la mitad del producto de sus diagonales. (fig. g)

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$



ÁREA DE UN TRAPECIO. - Es igual a la mitad del producto de la suma de sus bases y su altura. (fig. h)

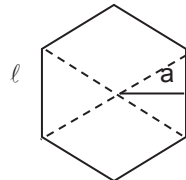
$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$



ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR. - Es igual a la mitad del producto de su perímetro y su apotema (segmento perpendicular a un lado que parte del centro del polígono) (fig. i)

Ejemplo: $P = 6 l$.

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$



EJERCICIOS

1. El lado no paralelo de un trapecio rectangular forma con la base un ángulo de 45° y mide $4\sqrt{2}$. Hallar el área del trapecio si su base menor mide 16.

Datos:

$$\overline{AB} = 16$$

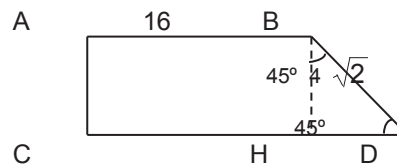
$$\overline{BD} = 4\sqrt{2}$$

$$\overline{BDC} = 45^\circ$$

Solución:

En la figura vemos que el triángulo rectángulo BDH es isósceles, entonces:

$$\overline{HD} = 4$$



Con esto deducimos

La base mayor $\overline{CD} = 20$. La altura del trapecio es el otro cateto del triángulo BDH, es decir, $\overline{BH} = 4$ con estos datos podemos aplicar la fórmula del área del trapecio o sea:

$$A = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD})\overline{BH}}{2} \quad \text{reemplazando}$$

$$A = \frac{(16 + 20)4}{2} = \frac{144}{2}$$

$$\text{Área} = 72 \text{ u}^2 \quad \text{Rpta.}$$

2. Hallar el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 12 m.

Solución:

$$\text{Se sabe que: } A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

Luego:

$$A = \frac{(12)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{144 \sqrt{3}}{4} = 36 \times 1.73 = 62.28$$

∴ El área es 62.28 m²

3. La base de un paralelogramo mide 51 m. Y sus diagonales 74 m y 40 m respectivamente. Hallar el área del paralelogramo.

Solución:

Se sabe que las diagonales dividen a un paralelogramo en cuatro triángulos con áreas iguales.

Luego, basta encontrar el área del triángulo ABC multiplicarlo por 4.

Aplicando: $A = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$:

Donde: $P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{37+20+51}{2} = 54$

Se tiene:

$$A = \sqrt{54(54-37)(54-20)(54-51)}$$

$$A = \sqrt{(54)(17)(34)(3)} = 306 \text{ m}^2$$

Finalmente, el área del paralelogramo:

$$A = 4 \times 306 \rightarrow A = 1224 \text{ m}^2$$

4. El área de un pentágono regular es 156 cm², su apotema 5.2 cm. Calcular su lado.

Solución:

Fórmula del área del exágono: $A = \frac{P \times a}{2}$

Reemplazando los datos, se tiene:

$$A = \frac{P \times a}{2} \rightarrow 156 = \frac{(5\ell)(5.2)}{2} \rightarrow 13\ell = 156$$

$$\therefore \ell = 12 \text{ cm.}$$

5. El lado de un dodecágono regular mide 6 cm y su área 378 cm². ¿Cuánto mide su apotema?

Solución:

$$A = \frac{P \times a}{2} \rightarrow a = \frac{2A}{P} \rightarrow a = \frac{2(378)}{6 \times 12}$$

$$a = \frac{756}{72} \rightarrow a = 10.5 \text{ cm}$$

∴ a = 10.5 cm

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS Y CIRCUNSCRITOS

Cálculo de los lados y apotemas de los polígonos regulares:

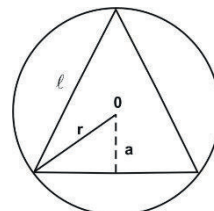
Un polígono regular, es aquel que tiene sus lados y ángulo congruentes; y está inscrito si sus vértices están en la circunferencia. En un polígono regular inscrito el centro y el radio del polígono son el centro y el radio de la circunferencia.

Tomaremos la referencia siguiente:

a = apotema (distancia del punto medio de un lado y el centro del polígono).

ℓ = lado (equivalente a la cuerda de la circunferencia)

r = radio.



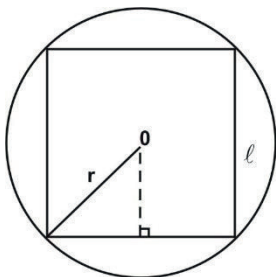
CUADRADO INSCRITO

1. Cálculo del lado en función del radio:

$$\ell = r\sqrt{2}$$

2. Cálculo del apotema en función del radio:

$$a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$



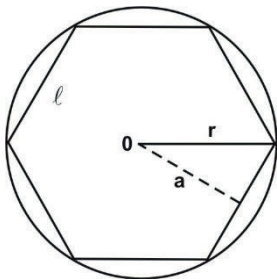
EXÁGONO REGULAR INSCRITO

1. Cálculo del lado en función del radio:

$$\ell = r$$

2. Cálculo del apotema en función del radio:

$$a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$



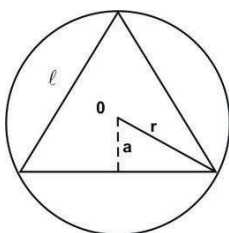
TRIANGULO EQUILÁTERO INSCRITO

1. Cálculo del lado en función del radio:

$$\ell = r\sqrt{3}$$

2. Cálculo del apotema en función del radio:

$$a = \frac{r}{2}$$



VALOR DEL PI

Es un número irracional cuyo símbolo se denota con la letra griega π , y cuyo valor es: 3.1416... pero para el curso tomaremos 3.14.

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA: Se le expresa como el límite de los perímetros de los polígonos regulares inscritos.

Su fórmula es:

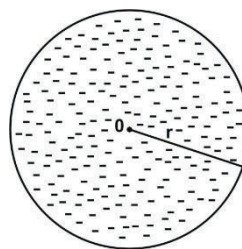
$$C = 2 \pi \cdot r$$

ÁREA DEL CIRCULO: Es igual a la mitad del producto de la circunferencia y el radio, es decir:

$$A = \frac{C \cdot r}{2}; \text{ pero } C = 2 \pi r$$

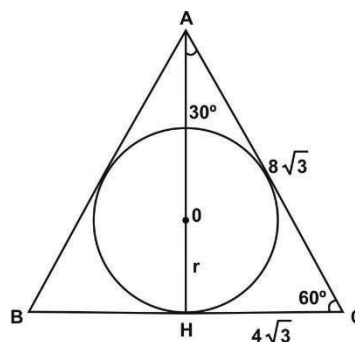
$$\rightarrow A = \frac{(2\pi r) r}{2} = \pi r^2$$

$$A = \pi r^2$$



EJERCICIOS

1. Hallar el radio de una circunferencia inscrita en un triángulo equilátero de lado $8\sqrt{3}$.



Solución:

Según el gráfico tenemos:

$$r = \overline{OH} = \overline{AH} - \overline{AO}$$

El triángulo AHC es un triángulo especial de 30° y 60° , donde AC es el doble de HC; es decir éste es igual:

$\overline{HC} = 4\sqrt{3}$, para hallar $\overline{HC}$ se multiplica por $\sqrt{3}$ a $\overline{HC}$, entonces tendremos: $\overline{AH} = 12$, pero siendo el radio el tercio de $\overline{AH}$ (por ser el centro, punto de intersección de las alturas, medianas, bisectrices y mediatrices).

$$r = \overline{AH}/3 = 12/3$$

$$r = 4 \quad \text{Rpta}$$

2. Hallar la longitud del lado y del apotema de un $\square$ inscrito en una circunferencia de 20 cm. de diámetro.

Solución:

Cálculo del lado:

$$\begin{aligned} \ell &= r\sqrt{2} \rightarrow \ell = 10\sqrt{2} \rightarrow \ell = 10 \times 1.41 \\ &\rightarrow \ell = 14.1 \\ \therefore \ell &= 14.1 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Cálculo del apotema:

$$a = \frac{\ell}{2} \rightarrow a = \frac{r\sqrt{2}}{2} \rightarrow a = \frac{10\sqrt{2}}{2} \rightarrow a = 7.05$$

$$\therefore a = 7.05 \text{ cm}$$

3. La apotema de un cuadrado mide 5.64 cm. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita?

Solución:

$$a = \frac{r\sqrt{2}}{2} \rightarrow 5.64 = \frac{r\sqrt{2}}{2} \rightarrow r = \frac{11.28}{\sqrt{2}} = \frac{11.28}{1.41} = 8$$

$$\therefore r = 8 \text{ cm}$$

4. El lado de un hexágono regular inscrito mide 18 cm. ¿Cuánto mide la apotema del triángulo equilátero inscrito en la misma circunferencia?

Solución:

Se sabe que en el hexágono regular inscrito:

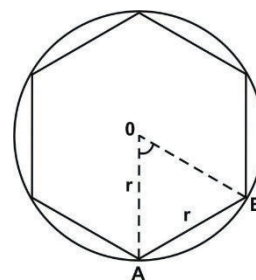
$$\ell = r$$

Luego: $r = 18 \text{ cm.}$

Cálculo de la apotema del triángulo equilátero como:

$$\begin{aligned} a &= \frac{r}{2} \rightarrow a = \frac{18}{2} \rightarrow a = 9 \\ \therefore a &= 9 \text{ cm} \end{aligned}$$

5. La diferencia entre el arco que subtiende el lado del hexágono regular inscrito en un círculo y el lado del hexágono es $(\pi - 3)$ metros. Calcular el perímetro del hexágono.



Solución:

$$\text{El arco AB mide: } \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

El arco AB expresado en fracción de circunferencia es:

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi r 60^\circ}{360} = \frac{\pi r}{3} \dots\dots\dots(1)$$

El lado del hexágono es: $\overline{AB} = r \dots\dots(2)$

La diferencia entre (1) (2) es:

$$\frac{\pi r}{3} - r = \pi - 3 \rightarrow \pi r = 3r = 3(\pi - 3)$$

$$r(\pi - 3)3(\pi - 3) \rightarrow r = 3$$

Luego el perímetro del hexágono será:

$$P = 6 \times r \rightarrow P = 6 \times 3 \rightarrow P = 18$$

$$\therefore P = 18 \text{ cm}$$

POSTULADOS CARACTERÍSTICOS DEL PLANO

Postulado 1.- Todo plano contiene al menos tres puntos no colineales. Esta es una manera de decir que los planos son amplios.

Los puntos que están sobre un mismo plano se llaman coplanares.

Postulado 2.- Dos puntos cualesquiera de un plano, determinan una recta contenida en el plano. Este postulado describe esencialmente que los planos son llanos.

Teorema.- Si una recta interseca a un plano que no la contiene, entonces la intersección es un solo punto.

Postulado 3.- El espacio contiene al menos cuatro puntos que no son coplanares. Este postulado es una manera de decir que el espacio no es llano.

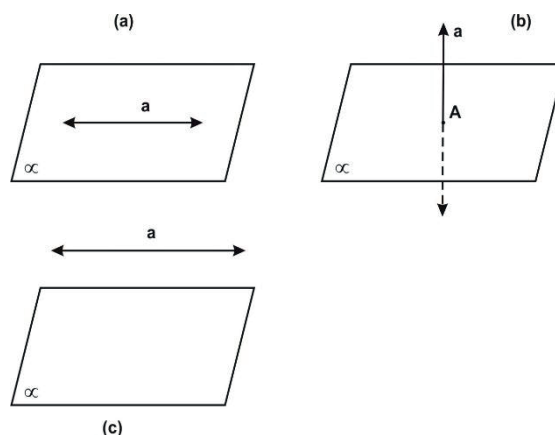
DETERMINACIÓN DE UN PLANO.- Un plano viene determinado por:

1. Por dos rectas que se cortan.
2. Por tres puntos no situados en línea recta.
3. Por una recta y un punto exterior a ella.
4. Por dos rectas paralelas.

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS.-

Una recta y un plano pueden ocupar las siguientes posiciones:

1. Estar la recta en el plano (a).
2. Cortarse: en ese caso tiene un punto A común (b).
3. Ser paralelos: cuando no tienen ningún punto común (c).



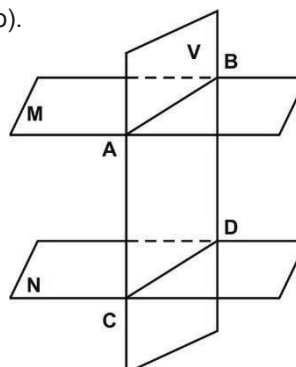
INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS PARALELOS CON UN TERCERO

Teorema.- Si un plano interseca a dos planos paralelos entonces sus intersecciones son rectas paralelas.

Hipótesis.- Sea V el plano que interseca a los planos paralelos M y N.

Sea $\overline{AB}$ la intersección de V y M; y $\overline{CD}$ la intersección de V y N.

Tesis.- (La demostración $AB \parallel CD$ queda para el alumno).



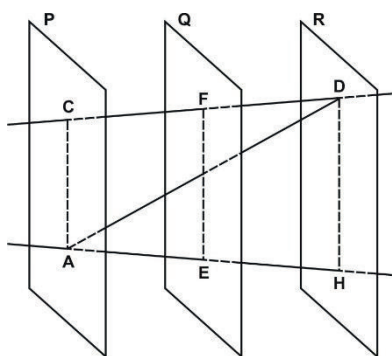
TEOREMA DE THALES EN EL ESPACIO.-

Tres o más planos paralelos determinan sobre dos rectas secantes cualesquiera segmentos proporcionales.

Hipótesis.- Sean las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que intersectan a los planos paralelos P, Q, y R en los puntos A, E, B y C, F, D respectivamente.

Tesis.- $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}$

La demostración queda para el alumno.



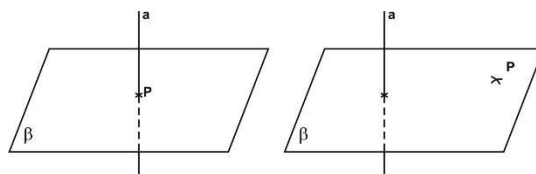
RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO.-

Se dice que una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por la intersección.

Al punto de intersección se le llama pie de la perpendicular. Como es posible comprobar que una recta es perpendicular a todas las que pasan por su pie, se demuestra que si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano que pasan por su pie es perpendicular a todas.

Es aquí que para construir un plano perpendicular a una recta en uno de sus puntos es suficiente trazar dos rectas perpendiculares a la dada que pasan por el punto.

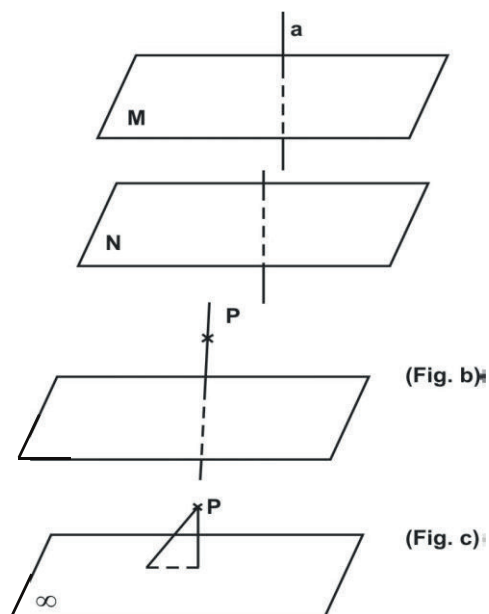
Por n punto A pasa un plano perpendicular a una recta $\underline{a}$ y solamente uno. El punto puede estar en la recta o fuera de ella.



Si tenemos dos planos paralelos, M y N y una recta $\underline{a}$ es perpendicular a uno de ellos, también es perpendicular al otro. (Fig. a).

Por un punto p de un plano pasa una recta perpendicular al plano y solamente una. (Fig. b).

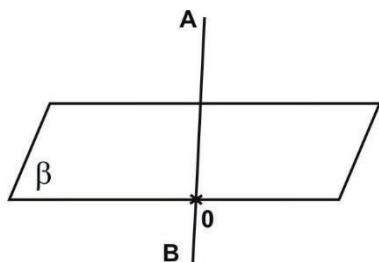
Por un punto P exterior a n plano (∞) pasa una recta $\overline{PM}$ perpendicular al plano y solamente una. (Fig. c).



UNIDAD DE LA PERPENDICULAR.- Del plano a una recta: (A)

Teorema.- Por un punto dado pasa un plano, y sólo uno perpendicular a una recta dada. La demostración de éste teorema comprende 2 casos:

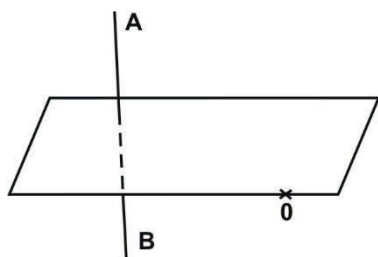
1er Caso.- El punto dado está en la recta dada.



Hipótesis.- Sea O un punto de la recta AB.

Tesis.- Por O pasa un plano, y sólo uno, perpendicular a AB.
(La demostración queda para el alumno).

2do. Caso.- El punto dado está fuera de la recta.



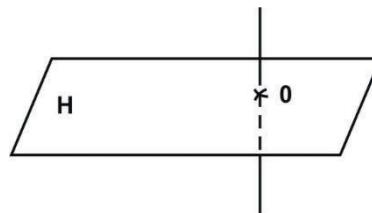
Hipótesis.- Sea O un punto situado fuera de la recta AB.

Tesis.- Por O pasa un plano y sólo uno, perpendicular a AB.
(La demostración queda para el alumno).

B) De la recta a un plano:

Teorema.- Por un punto dado pasa una recta y sólo una perpendicular a un plano dado.
La demostración del teorema tiene también dos casos:

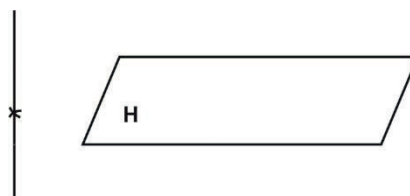
1er. Caso.- El punto dado está en el plano dado:



Hipótesis.- Sea O un punto en el plano H.

Tesis.- Por O pasa una recta, y sólo una, perpendicular al plano H.

2do. Caso.- El punto dado está fuera del plano dado:



Hipótesis.- Sea P un punto situado fuera del plano H.

Tesis.- Por P pasa una recta, y sólo una, perpendicular al plano H.

RELACIÓN ENTRE LA PERPENDICULAR Y LAS OBLICUAS TRAZADAS A UN PLANO DESDE UN PUNTO EXTERIOR

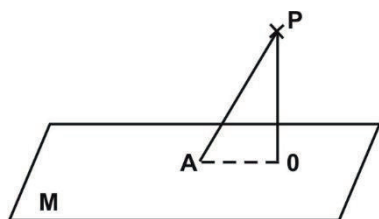
Teorema.- Si desde un punto exterior a un plano se trazan a éste una perpendicular y varias oblicuas, se verifica:

1. El segmento perpendicular comprendido entre el punto y el plano es menor que cualquier segmento oblicuo.
2. Los segmentos oblicuos cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular son congruentes.
3. De dos segmentos oblicuos cuyos pies no equidistan del pie de la perpendicular, es mayor aquel cuyo pie dista más.

Graficación de cada caso y las demostraciones, se dan como tarea al alumno.

Así tenemos:

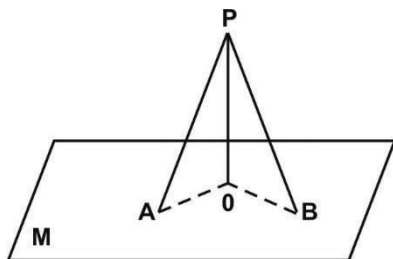
1. El segmento perpendicular comprendido entre el punto y el plano, es menor que cualquier segmento oblicuo.



Hipótesis.- Sea P un punto exterior al plano M; $\overline{PO} \perp M$ en O, $\overline{PA}$ una oblicua al plano M en A.

Tesis.- $\overline{PO} < \overline{PA}$

2. Los segmentos oblicuos cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular son congruentes.

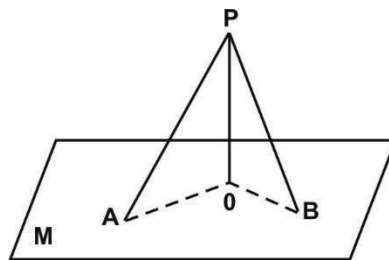


Hipótesis.- Sea P un punto exterior al plano M; $\overline{PO} \perp M$ en O.

$\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ segmentos oblicuos al plano M en A y B respectivamente, siendo $\overline{OA} = \overline{OB}$.

Tesis.- $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

3. De dos segmentos oblicuos cuyos pies no equidistan del pie de la perpendicular, es mayor aquel cuyo pie dista más.



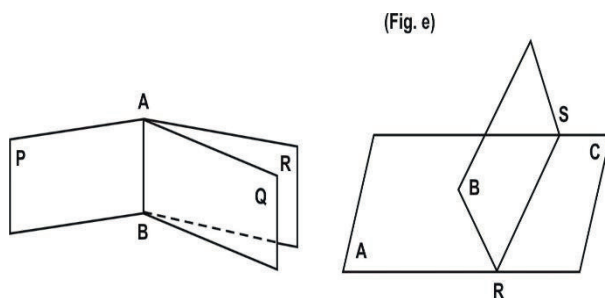
Hipótesis.- Sea P un punto exterior al plano M; $\overline{PO} \perp M$ en O, y $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ segmentos oblicuos al plano M en A y B respectivamente, siendo $\overline{OA} > \overline{OB}$

Tesis.- $\overline{PA} > \overline{PB}$

ÁNGULO DIEDRO: CLASIFICACIÓN

1. **Ángulos diedros consecutivos.** Dos ángulos diedros se llaman consecutivos si tienen la misma arista y una cara común situada entre las otras dos. Así, por ejemplo: (Fig. d).

El $\angle P \overline{AB} Q$ y el $\angle Q \overline{AB} R$ que tiene la misma arista $\overline{AB}$ y una cara común Q, situado entre las otras dos P y R, son consecutivos. (Q, P, R son planos).



Ángulos diedros consecutivos

Ángulos diedros adyacentes

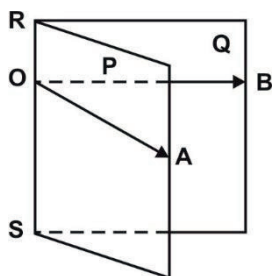
2. **Ángulos diedros adyacentes.** Son dos ángulos diedros consecutivos cuyas caras no comunes son semiplanos opuestos.

Así en la (Fig. e) El $\angle \overline{ARSB}$ y el $\angle \overline{BRS}$ C son adyacentes.

Relación con el ángulo plano o rectilíneo de un ángulo diedro. Necesario para definir la medición del mismo.

Ángulo plano o ángulo rectilíneo de un ángulo diedro es: el ángulo formado por dos rayos perpendiculares a la arista en uno de sus puntos y situados uno en cada cara del ángulo diedro.

Así en la figura, si $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son rayos perpendiculares a la arista $\overline{RS}$ en el mismo punto O, entonces el ángulo AOB es el ángulo plano del $\angle RS - Q$.

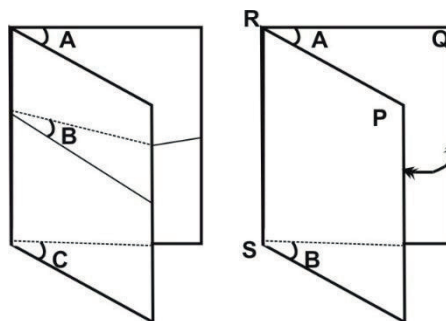


El ángulo plano de un ángulo diedro no es sino la intersección del ángulo diedro y un plano perpendicular a su arista.

Ya que O puede ser un punto cualquiera de la arista RS, el $\angle$ diedro tiene infinitud de ángulos plano los cuales son congruentes por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

MEDIDA DE UN ÁNGULO DIEDRO

La medida de un ángulo diedro es un n número real que es la medida de cualquiera de sus ángulos rectilíneos.



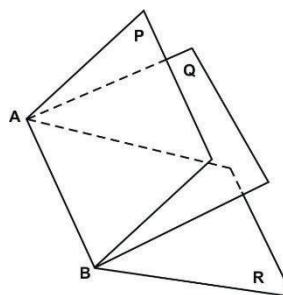
$\angle A = \angle B = \angle C$, etc., por ser parte de la infinitud de ángulos planos del diedro.

$$\angle P - \overline{RS} - Q = \angle A = \angle B = \dots$$

SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS DIEDROS

Suma de ángulos diedros consecutivos.-

Se llama suma de dos ángulos diedros consecutivos al ángulo diedro cuya medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos diedros dados.



Así, en la figura dada se tiene:

$$m \angle P - \overline{AB} - R = m \angle P - \overline{AB} - Q + m \overline{AB} Q - \overline{AB} - R$$

(m indica medidas).

Resta de ángulos diedros consecutivos.-

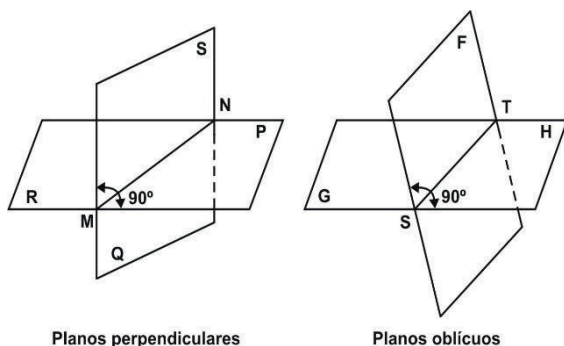
Se deduce el punto anterior.

$$m \angle Q - \overline{AB} - R = m \angle P - \overline{AB} - R - m \angle P - \overline{AB} - Q$$

Si los ángulos diedros no son consecutivos, se construyen ángulo diedros consecutivos respectivamente congruentes a los lados, cuya suma será la de los propuestos.

PLANOS PERPENDICULARES Y OBLICUAS

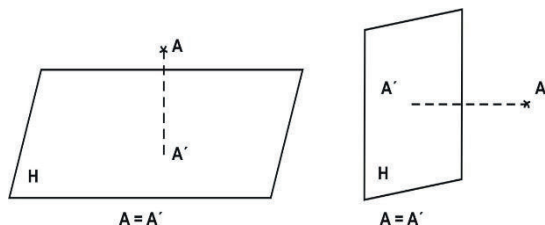
Dos planos son perpendiculares si contienen un ángulo diedro recto. En caso contrario son los planos oblicuos.



PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO

La proyección de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular trazada del punto al plano.

Proyección de un punto sobre un plano:

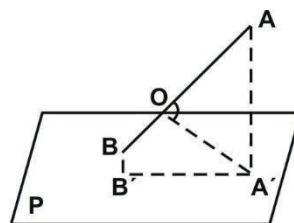


Así en cada una de las figuras anteriores, A' es la proyección del punto A sobre el plano H. Si el punto A está en el plano H, la proyección de A es el mismo punto A. La perpendicular AA'

se llama la **proyectante** y el plano H recibe el nombre de **plano proyección**.

ÁNGULO DE RECTA Y PLANO.- Se llama ángulo entre una recta y un plano al ángulo determinado por dos rayos que pertenecen, respectivamente a la recta y a su proyección sobre el plano, y cuyo origen común es el punto de intersección de la recta y el plano.

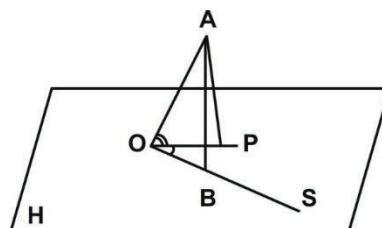
Así, en la (figura g) si B'A' es la proyección de la recta BA sobre el plano P, el ángulo cuyo vértice es O y cuyos lados son los rayos OA y OA', e el ángulo entre la recta BA y el plano P.



Teorema.- El ángulo entre una recta y un plano es menor que el ángulo que forma la recta con cualquier rayo que parte del punto de intersección y está contenida en el plano.

Hipótesis.- Sea $\overline{OA}$ una recta y $\overline{OR}$ su proyección sobre el plano H. Sea OS cualquier otro rayo en el plano H.

Tesis.- $\angle AOR < \angle AOS$.



ÁNGULOS POLIEDROS

Sea $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ un polígono contenido en un plano H , y V un punto situado fuera del plano H .

Entonces: El conjunto de todos los rayos que contienen puntos del polígono y tienen como origen común el punto V , se llama un **ángulo poliedro**.

Elementos:

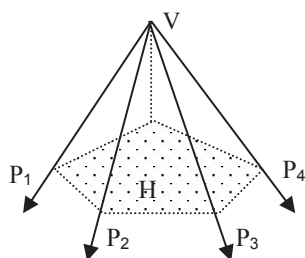
- **El punto V** se llama vértice del ángulo poliedro.
- **Aristas:** Son los rayos $VP_1, VP_2, VP_3, \dots, VP_n$
- **Sus caras:** Son los siguientes:
 $P_1VP_2; P_2VP_3; P_3VP_4$
- **Ángulos Diedros:** Determinados por cada dos caras consecutivas como:

$$\angle P_1 - \overline{VP_2} - P_3;$$

$$\angle P_2 - \overline{VP_3} - P_4;$$

El ángulo poliedro se llama convexo o cóncavo según lo sea el polígono.

$P_1 P_2 P_3 \dots P_n$



Ángulos Diedros

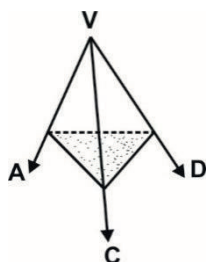


Fig. h.

- **Ángulo Triedro:** Un ángulo triedro es un ángulo poliedro de tres caras como el $\angle V-ACD$ en la figura h.

- **Elementos de un ángulo triedro:** Estos son seis: las 3 caras y los tres ángulos diedros.

Clasificación de los Ángulos Triedros:

Un ángulo triedro puede tener uno, dos, tres ángulos diedros rectos recibiendo entonces el nombre de rectángulo, birrectángulo y trirrectángulo respectivamente.

Las caras de un ángulo triedro trirrectángulo son ángulos rectos (Fig. 1.)

- **Ángulos Triedros Simétricos:** Dos ángulos triedros se llaman simétricos si las aristas de cada uno de ellos son rayos opuestos de las aristas del otro. Tales son por ejemplo: los ángulos triedros.

$$\angle O - ABC \text{ y } \angle O - A'B'C' \quad (\text{Fig. j}).$$

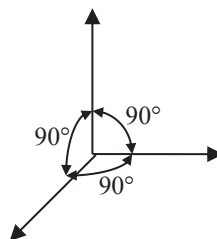


Fig. i.

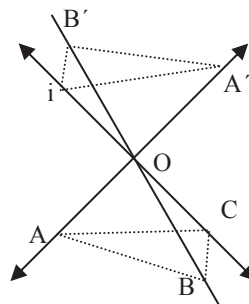


Fig. j.

CLASIFICACIÓN DE POLIEDROS

Clasificación:

Atendiendo al número de sus caras el poliedro se llama:

- Triedro si tiene 3 caras
- Tetraedro si tiene 4 caras
- Pentaedro si tiene 5 caras
- Hexaedro si tiene 6 caras
- Octaedro si tiene 8 caras
- Dodecaedro si tiene 12 caras
- icosaedro si tiene 20 caras

En general se dice poliedro de siete, nueve, diez ... caras, sin embargo, hay algunos poliedros que toman nombres especiales, como prisma, pirámide, etc.

POLIEDROS REGULARES: Un poliedro es regular si es convexo y todas sus caras son polígonos regulares congruentes.

Hay solamente cinco poliedros regulares:

- El tetraedro
- El dodecaedro
- El hexaedro o cubo
- El icosaedro
- El octaedro

PRISMA:

Es un poliedro donde dos de cuyas caras son regiones poligonales paralelas limitadas por polígonos congruentes, y las demás caras son regiones paralelogramáticas.

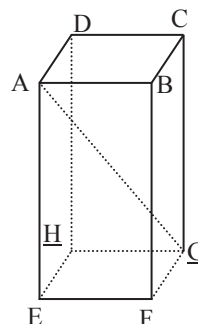
Así tenemos el prisma ABCDHEFG o simplemente prisma AG (diagonal)

Elementos:

- La región poligonal EFGH se llama:

Base Inferior: o simplemente base del prisma.

- La región poligonal ABCD paralela a la EFGH, se denomina la base superior.



Las demás caras del prisma, que son regiones paralelogramáticas, se llaman caras laterales y ;

- Sus intersecciones son llamadas aristas laterales.

Ejemplo:

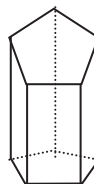
$\overline{AE}$ = arista lateral

- La distancia entre los planos de las bases se llaman altura del prisma.

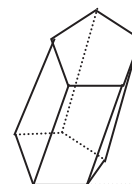
CLASIFICACIÓN DE LOS PRISMAS

Prisma Recto: Es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares. (Fig. 1)

Prisma Oblicuo: Es aquel cuyas aristas laterales son oblicuas a las bases. (Fig. 2.)



Prisma Recto



Prisma Oblicuo

PARALELEPIPEDO

Definición: Es un prisma cuya base es una región paralelogramática.

Ejemplo:

Fig. K. Representa un paralelepípedo, que es un prisma cuya base es la región determinada por el paralelogramo EFGH

Elementos:

- **Aristas Opuestas:** Son dos aristas paralelas del paralelepípedo que no pertenecen a la misma cara.

Como $\overline{AE}$ y $\overline{CG}$.

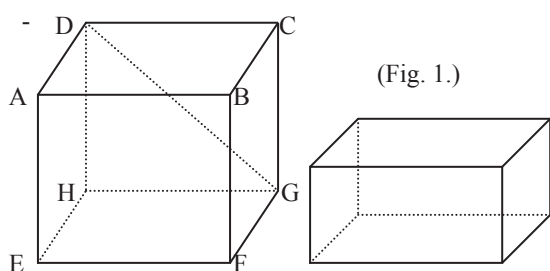
Caras Opuestas: Son caras del paralelogramo que no tienen arista común.

Ejemplo: Las caras AGO y BFGC

- **Plano Diagonal:** Es el plano determinado por dos aristas opuestas. Ejemplo: (Fig. k) el plano AFGD

- **Vértices Opuestos:** Son los vértices que no pertenecen a una misma cara.

Ejemplo: Los vértices A y G.



(Fig. k)

CLASIFICACIÓN DE LOS PARALELEPIPEDOS

- 1) **Paralelepípedo Recto:** Es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las

bases. En estos paralelepípedos las caras son regiones rectangulares.

- 2) **Paralelepípedo Oblicuo:** Es aquel cuyas aristas laterales son oblicuas a las bases. En estos paralelepípedos, las seis caras son regiones paralelogramáticas.

- 3) **Paralelepípedo Rectangular:** Es un Paralelepípedo recto cuyas bases son regiones rectangulares. En estos, las seis caras son regiones rectangulares. (Fig. 1.)

- 4) **Cubo:** Es un paralelepípedo rectangular cuyas aristas son todas congruentes. El cubo es un hexaedro regular.

- 5) **Romboedro:** Es un paralelepípedo cuyas bases regiones romboédricas.

PROPIEDADES

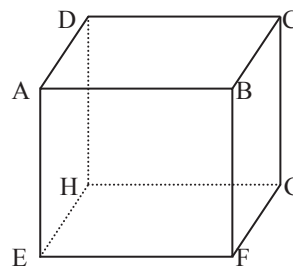
De las caras de un paralelepípedo:

Teorema: Las caras opuestas de un paralelepípedo son paralelas y congruentes.

Hipótesis: Sea el paralelepípedo AG, consideremos las caras opuestas AEHD y BFGC.

Tesis: $AEHD \cong BFGC$

De la demostración se deduce que en todo paralelepípedo se pueden tomar como base dos caras opuestas cualesquiera.



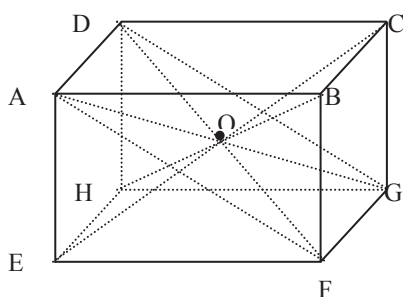
De las diagonales de un paralelepípedo

Teorema: Las diagonales de un paralelepípedo se bisecan.

Hipótesis: Sea el paralelepípedo $\overline{AG}$. Consideremos las diagonales $\overline{AG}$ y $\overline{DF}$ que se intersecan en el punto O.

Tesis: $\overline{AO} = \overline{OG}$ y $\overline{DO} = \overline{OF}$

De modo análogo se demuestra para otro para cualquiera de las diagonales del paralelepípedo.



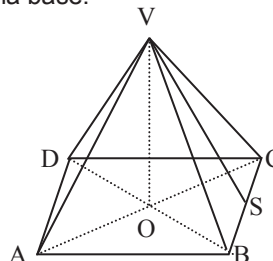
PIRÁMIDE: CLASIFICACIÓN, PIRÁMIDE REGULAR

Clasificación: Una pirámide es:

- **Triangular:** Si su base es una región triangular.
- **Cuadrangular:** Si su base es una región cuadrangular;
- **Pentagonal:** si su base es una región pentagonal; etc.

Una pirámide triangular tiene cuatro caras; luego es un tetraedro. En esta pirámide se puede tomar como base cualquiera de unas de sus caras.

Pirámide Regular: Es una pirámide cuya base es una región poligonal regular que tiene como centro el pie de la perpendicular desde el vértice a la base.



- **Base:** Una región poligonal regular:
- **Centro O:** Equidista de los vértices del polígono ABCD, por lo tanto:
- Las aristas laterales de la pirámide son todas congruentes, por ser oblicuas cuyos pies equidistan del pie O de la perpendicular $\overline{VO}$. De aquí resulta que las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles congruentes.

Apotema de una pirámide regular: Es el segmento que une el vértice de la pirámide con el punto medio de un lado de la base. No es sino una altura cualquiera de las caras laterales.

Ejemplo:

Es el apotema de la figura

Sección Transversal: Es la intersección de la pirámide y un plano paralelo a la base.

ÁREA LATERAL TOTAL DEL PRISMA Y DE LA PIRÁMIDE

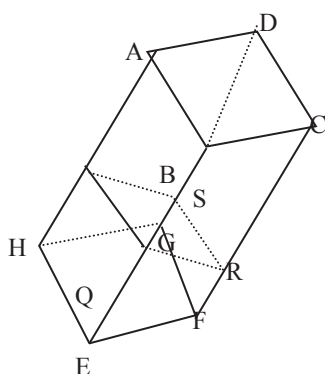
Área Lateral de un prisma y pirámide: Es la suma de las áreas laterales.

Área total de un prisma y pirámide: Es la suma del área lateral más las áreas de las bases.

Teorema: El área lateral de un prisma oblicuo, es el producto del perímetro de una sección recta y la longitud de una arista.

Hipótesis: Sea el prisma oblicuo $\overline{AF}$, cuya sección recta es PQRS. Designemos por A_1 el área lateral; por “p” el perímetro de la sección recta y por “a” la longitud de la arista lateral.

Tesis: $A_2 = pa$ (A_2 = área lateral)



Corolario: El área lateral de un prisma recto es el producto del perímetro de la base y la altura del prisma:

$$A_2 = ph$$

El área Total: Siendo congruentes las bases de un prisma, éstas tienen la misma área: Entonces, si designamos por B el área de una de ellas y por A_l el área lateral del prisma tendremos.

$$A_t = A_l + 2B$$

Si el prisma es regular, las bases son regiones poligonales regulares y por consiguiente el área de cada una será:

$\frac{Pa'}{6} = B$, siendo a' la apotema del polígono base. Luego, si sustituimos este valor en la fórmula anterior se tendrá:

$$A_t = ph + 2 \left(\frac{1}{2} pa' \right) = ph + pa'$$

$$\text{O bien: } A_t = p(h + a')$$

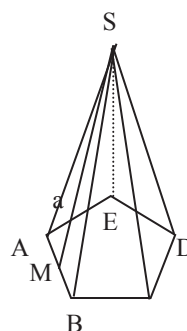
Fórmula que expresa: El área total de un prisma regular es el producto del perímetro de la base y la suma de la altura del prisma con la apotema de la base.

ÁREA DE UNA PIRÁMIDE:

Área lateral de una Pirámide regular:

Teorema: El área lateral de una pirámide regular es la mitad del producto del perímetro de la base y la apotema de la pirámide.

Hipótesis: Sea la pirámide regular S – ABCDE, ... de $\underline{n}$ caras laterales y cuya apotema es $\underline{a}$. Sea A_1 el área lateral y $\underline{p}$ el perímetro de la base de la pirámide.



Tesis: $A_l = \frac{1}{2} pa$

Área Total: El área total de una pirámide regular es la suma del área lateral y el área de la base. Si designamos por A_t , el área total de la pirámide y por $\underline{B}$ el área de la base, se tendrá.

$$A_t = A_l + B$$

Siendo regular el polígono de la base, el área de ésta será: $B = \frac{1}{2} Pa'$, donde a' es la apotema de dicho polígono. Luego si sustituimos este valor en la fórmula anterior se transformará en:

$$A_T = \frac{1}{2} pa + \frac{1}{2} pa' = \frac{1}{2} p(a + a')$$

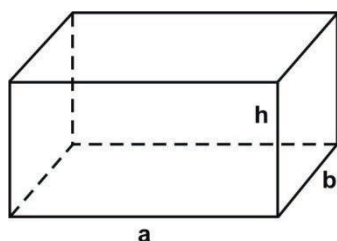
Fórmula que expresa: El área total de una pirámide regular es la mitad de producto del perímetro de la base y la suma de la apotema de la pirámide con la apotema del polígono de la base.

VOLUMEN DEL PRISMA Y DE LA PIRÁMIDE

Volumen del Prisma: Enunciaremos los dos postulados principales que se requieren para el estudio de los volúmenes.

1. **Postulado:** El volumen de un paralelepípedo rectangular es el producto del área de su base y su altura.

Como en un paralelepípedo rectangular se puede tomar como base cualquier cara, se obtendrá siempre el mismo volumen, ya que, en cada caso Bh es el producto de las longitudes de tres aristas que concurren en un mismo vértice



$$V = BH = a \cdot b \cdot h$$

VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

Teorema: Si dos pirámides tienen bases equivalentes y la misma altura entonces tienen el mismo volumen.

Volumen de una pirámide cualquiera

“El Volumen de una pirámide cualquiera es igual a un tercio del producto del área de la base por la medida de la altura”

Hipótesis: ABCDEF es una pirámide cualquiera.

B = es el área de la base

h = es la altura y

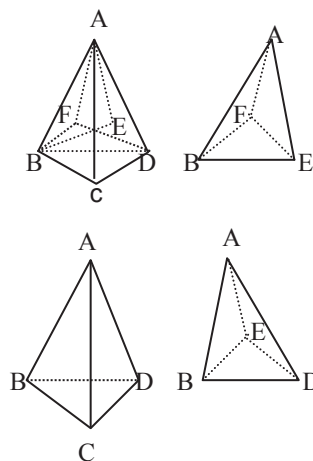
V = es el volumen

Tesis:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

Demostración:

Trazando por la arista $\overline{AB}$ los planos diagonales ABE , la pirámide queda descompuesta en tetraedros cuyas bases son los triángulos BCD ; BDE y BFE teniendo todos las mismas alturas h de las pirámides.



Llamando b_1 , b_2 , b_3 , a las áreas de estos triángulos, tenemos:

$$v = \frac{1}{3} b_1 \cdot h + \frac{1}{3} b_2 \cdot h + \frac{1}{3} b_3 \cdot h$$

$$v = \frac{1}{3} h (b_1 + b_2 + b_3) \quad (1)$$

Pero:

$$b_1 + b_2 + b_3 = B \quad (2) \text{ Sustituyendo en (1)}$$

Tenemos:

$$V = \frac{1}{3} B h$$

Ejemplos:

1. Calcular el volumen de una pirámide regular de 9 m. De altura su base es un triángulo equilátero de 8 m de lado.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Área de base: } B &= \frac{\ell^2}{4}\sqrt{3} & B &= \frac{8^2}{4}\sqrt{3} \\ B &= \frac{64}{4}\sqrt{3} & B &= 16\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore B = 27.68\text{m}^2$$

Volumen:

$$V = \frac{1}{3}B \times h \rightarrow V = \frac{(27.68)(9)}{3}$$

$$V = \frac{(27.68\text{m}^2)(9\text{m})}{3} = 83.04\text{m}^3$$

$$\therefore V = 83.04\text{m}^3$$

2. El volumen de una pirámide cuadrangular regular es 100 m^3 y su altura mide 12m .
¿Cuánto mide el lado de la base?

Solución:

Siendo la base un cuadrado, se tendrá que: $B = \ell^2$. Luego aplicando la fórmula:

$V = 1/3 B \cdot h$ tendremos:

$$100 = 1/3 \times \ell^2 \times 12 \rightarrow 100 = \ell^2$$

De donde

$$= 25$$

$$= 5 \text{ m Rpta.}$$

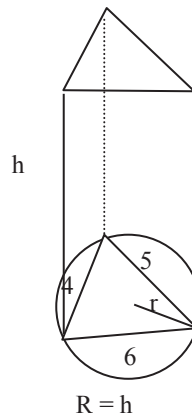
$$\ell^2$$

3. Hallar el volumen de un prisma triangular cuyos lados de la base miden $4, 5$ y 6 m . Y la altura igual al radio de la circunferencia circunscrita a la base:

Solución:

$$V = A_B \times h$$

$$A_B = \frac{4 \times 5 \times 6}{4R}, \text{ como } R = h$$



Entonces $A_B = \frac{4 \times 5 \times 6}{4h};$

Luego $V = A_B \times h$

$$V = \frac{4 \times 5 \times 6}{4h} \times h$$

$$V = \frac{4 \times 5 \times 6 \times h}{4h}$$

$$V = \frac{4 \times 5 \times 6}{4} \rightarrow V = \frac{120}{4} = 30$$

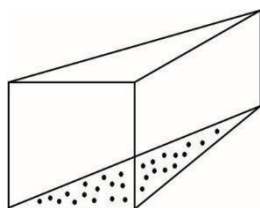
$$\therefore V = 30\text{m}^3$$

4. Un tronco de prisma recto tiene como base un triángulo equilátero de lado “a” sus aristas tienen respectivamente por longitud “a”, “2a” y “3a”. Calcular el volumen y la superficie lateral.

Solución:

$$V = A_B \times \text{promedio de arista}$$

$$V = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \times \left(\frac{a+2a+3a}{3}\right) = \left(\frac{a^3\sqrt{3}}{2}\right)$$



$$A_L = 3a \left(\frac{a+2a+3a}{3} \right) = 6a^2$$

$\therefore V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$
$A_t = 6a^2$

CUERPOS REDONDOS

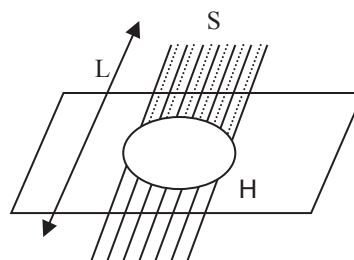
SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN: Es la superficie engendrada, por una línea que gira alrededor de una recta llamada eje, en la rotación de puntos se mantiene a la misma distancia del eje.

Ejemplo:

Dada una circunferencia y una recta $\underline{L}$ no paralela al plano de la circunferencia, y $\underline{s}$ el conjunto de todas las rectas que pasan por los puntos de la circunferencia que son paralelas $\underline{L}$. entonces el conjunto de todos los puntos de las rectas del conjunto $\underline{s}$ se llama superficie de revolución o superficie cilíndrica circular.

La circunferencia dada se llama directriz de la superficie cilíndrica o superficie de revolución, y cada una de las rectas del conjunto $\underline{s}$ se denomina la generatriz de dicha superficie.

Una sección transversal de una superficie cilíndrica o superficie de revolución es la intersección de la superficie y un plano paralelo al de la directriz.



SUPERFICIE CILÍNDRICA DE REVOLUCIÓN.

Se denomina así a la reunión de la parte de una superficie cilíndrica circular comprendida entre dos secciones transversales y las dos regiones circulares determinadas por dichas secciones transversales.

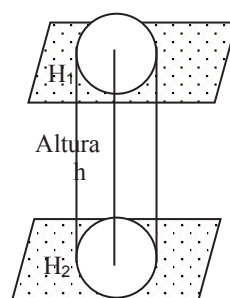


Fig. A

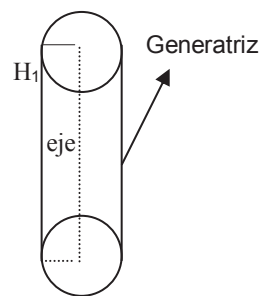


Fig. B

La figura representa una superficie cilíndrica o cilindro circular de la revolución, las dos regiones circulares se llaman bases del cilindro, y las distancias entre los planos de ellas es la altura del cilindro. El segmento de generatriz de la superficie cilíndrica comprendida entre las bases, recibe el nombre de: generatriz del cilindro.

Una sección plana de un cilindro es la intersección del cilindro y un plano.

CILINDRO DE REVOLUCIÓN: (o cilindro circular recto) es un cilindro circular cuyas generatrices son perpendiculares a las bases.

(Fig. 8 anterior). En el cilindro de revolución el segmento que une los centros de las bases se llama eje del cilindro.

El cilindro de revolución se puede considerar generador por la rotación de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

Así, por ejemplo: si suponemos que el rectángulo ABCD rota alrededor de su lado BC entonces genera el cilindro que se representa en la figura C.

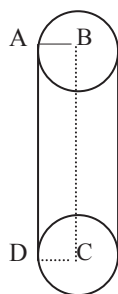


Fig. C

El lado $\overline{BC}$ del rectángulo generador, es el eje; el lado opuesto $\overline{AD}$ es la generatriz, y los $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son los radios del cilindro, los que generan en su movimiento círculos congruentes que son las bases del cilindro.

SUPERFICIE CÓNICA DE REVOLUCIÓN: Es la engendrada por una semirrecta cuyo origen está en el eje y no es perpendicular al eje.

Si una semirrecta $\overline{AV}$ (Fig. d) que tiene su origen en un punto de una recta $\overline{VO}$ que es perpendicular al plano de un círculo en su centro; alrededor de $\overline{VO}$ pasando sucesivamente por los puntos de la circunferencia, engendra una superficie cónica de revolución.

La recta $\overline{VO}$ es el eje de la superficie cónica; la semirrecta $\overline{VA}$ la generatriz y la circunferencia se llama directriz.

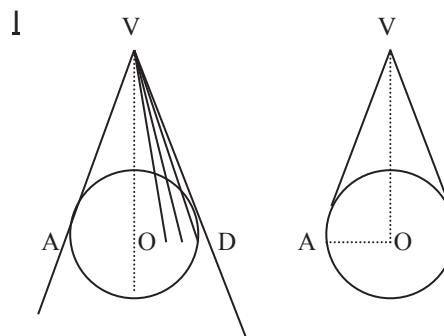


Fig. d

Fig. e

CONO CIRCULAR RECTO:

La porción de espacio limitada por una superficie cónica de revolución y un plano perpendicular al eje, se llama cono circular recto o cono de revolución.

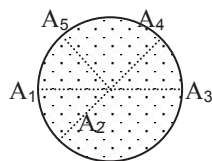
El cono circular recto puede considerarse engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Así, el triángulo VAD (Fig. e.) al girar alrededor del cateto $\overline{VO}$ engendra un cono circular recto; la hipotenusa $\overline{VA}$ es la generatriz y engendra la superficie lateral del cono; el cateto $\overline{VO}$ que engendra la base, es el radio.

SUPERFICIE ESFÉRICA

Definición: Una superficie esférica es el conjunto de todos los puntos del espacio que equidistan de un punto dado, que se llama centro de la superficie esférica. La distancia dada es el radio de la superficie. Así por ejemplo.

Dado el punto $\underline{O}$ y el número positivo $\underline{r}$, el conjunto de todos los puntos cuya distancia de

$\underline{Q}$ es igual a $\underline{r}$, es la superficie esférica de centro O y radio r.



Una superficie esférica se designa por una letra o también por su centro. Así, podemos decir:

Superficie esférica s o superficie esférica de centro O.

Dos o más superficies esféricas con el mismo centro se llaman concéntricas.

1. **Cuerda** : De una superficie esférica es un segmento cuyos extremos son dos puntos cualesquiera de la superficie esférica.
2. **Secante**: De una superficie esférica es una recta que interseca a la superficie esférica en dos puntos.
3. **Diámetro**: De una superficie esférica es una cuerda que contiene al centro.
4. **Radio**: De una superficie esférica es un segmento que va del centro a un punto cualquiera de la superficie esférica.

VOLUMEN DEL CILINDRO Y CONO DE REVOLUCIÓN.

Volumen Del Cilindro: El volumen del cilindro de revolución es el producto del área de su base y su altura.

En símbolos:

$\underline{C}$ = Cilindro de revolución C.

$\underline{V} = \pi r^2 h$

$\underline{h}$ = altura del cilindro

r = radio de la base, y

v = volumen

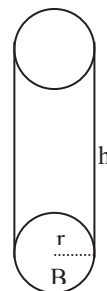
Corolario: Dados dos cilindros de revolución, de volúmenes V_1 y V_2 alturas h_1 y h_2 , radios r_1 y r_2 respectivamente:

$$1. \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1 r_1^2}{h_2 r_2^2}$$

$$2. \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2}, \text{ si } r_1 = r_2$$

$$3. \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}, \text{ si } h_1 = h_2$$

$$4. \quad V_1 = V_2, \text{ si } r_1 = r_2 \text{ y } h_1 = h_2$$



VOLUMEN DE LA ESFERA

Para determinar el volumen de una esfera aplicaremos también el principio de Cavalieri, y con tal objeto determinemos en primer lugar las áreas de las secciones transversales de la esfera, las cuales son regiones circulares.

Recordando el principio: "Si al cortar dos cuerpos por un sistema de planos paralelos se obtienen figuras equivalentes (de igual área) los 2 cuerpos tienen el mismo volumen"

Se supondrá una esfera de radio r y el cilindro circunscrito. Sea:

V = el volumen de la esfera.

V_1 = el volumen del cilindro que es igual a

$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

V_2 = el volumen del espacio comprendido entre la esfera y el cilindro. Evidentemente:

$$V = V_1 - V_2$$

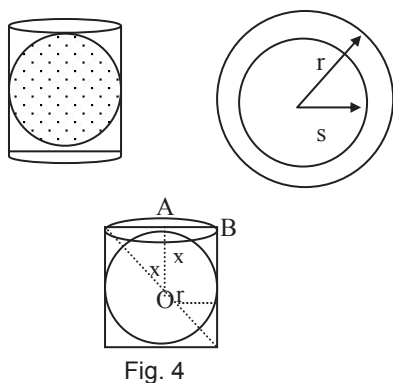
Para calcular V_2 observamos que si cortamos la figura por planos paralelos a las bases del cilindro, se obtienen coronas circulares cuyas áreas son de la forma:

$$\pi r^2 - \pi s^2 = \pi (r^2 - s^2) = \pi k^2$$

Siendo k la distancia del centro del plano.

Si ahora consideramos el cono de vértice (el centro de la esfera) y de base la del cilindro,

tendremos que el área de la sección a la distancia k es x^2 .



Siendo x el radio de la sección, pero como los triángulos AOB son semejantes, resulta:

(Fig. 4.)

$$\frac{k}{r} = \frac{x}{r} \therefore x = k$$

Es decir que el área de la corona circular (πk^2) y el área de la sección del cono $\pi x^2 = k^2$ son iguales. Aplicando el principio de Cavalieri resulta que el volumen V_2 del espacio entre la esfera y el cilindro es igual a la suma de los volúmenes de los 2 conos que tienen vértice en el centro de la esfera y de base la del prisma.

El volumen de cada uno de estos dos conos resulta:

$$\frac{1}{3} \pi r^2 (r) = \frac{1}{3} \pi r^3 \text{ y de los casos es: } \frac{2}{3} \pi r^3$$

Luego el volumen de la esfera será:

$$V = V_1 - V_2 = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

EJERCICIOS

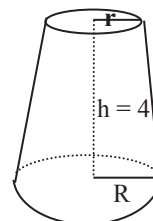
1. El volumen de un tronco de cono circular mide 336 cm^3 , si la altura mide 4 cm . Y el

radio de la base mayor es el doble del radio de la base menor. Hallar el radio de la base mayor:

Solución:

$$V = \frac{h}{3} (R^2 + r^2 + rR)$$

$$336 = \frac{h}{3} (R^2 + r^2 + rR)$$



Como $R = 2r$ (por dato)

$$336 = \frac{h}{3} ((2r)^2 + r^2 + 2r^2)$$

$$336 = \frac{h}{3} (4r^2 + r^2 + 2r^2)$$

$$336 = \frac{h}{3} (7r^2); h = 4$$

$$336 = \frac{4}{3} (7r^2) \rightarrow r^2 = 36 \rightarrow r = 6$$

Pero $2r = R \rightarrow 2(6) = R \rightarrow R = 12$

$$\therefore R = 12 \text{ cm}$$

2. Un triángulo ABC, rectángulo en B, al girar alrededor de $\overline{AB}$ engendra un cono, los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ mide 4 m y 1.5 m . Respectivamente. Si disminuye $\overline{AB}$ y aumenta $\overline{BC}$ en una misma cantidad, tal que el volumen no cambia. Hallar esa cantidad.

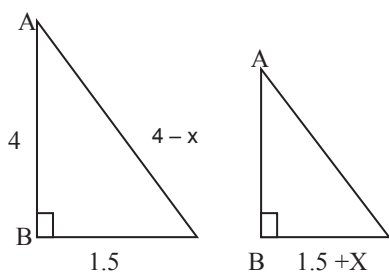
Solución:

$$V = \frac{1}{3} \pi (1.5^2) (4)^2$$

Sea x la cantidad desconocida, luego:

$$\overline{AB} = 4 - x; \overline{BC} = 1.5 + x$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi (1.5 + x)^2 (4 - x)^2$$



$$\therefore r = 5\sqrt{2} \text{ m.}$$

Según datos del problema $V = V_1$, luego:

$$\frac{1}{3} \pi (1.5)^2 (4) = \frac{1}{3} \pi (1.5+x)^2 (4-x)$$

Desarrollando y simplificando, se tiene:

$$X^3 - x^2 - 10.25x = 0$$

Resolviendo el sistema:

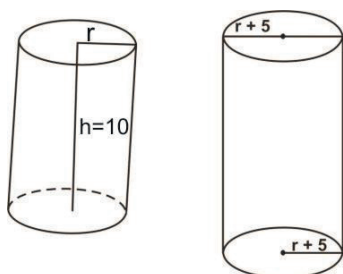
$$X = 3.7$$

3. Hallar el radio de la base de un cilindro de revolución de 10 m. De altura sabiendo que si aumenta en 5m el radio de la base resulta un nuevo cilindro cuya superficie lateral es igual al área total del cilindro primitivo.

Solución:

$S_T = 2 \pi r (r + 10)$ = superficie total del cilindro primitivo.

$S_L = 2 \pi (r + 5) \times 10$ = superficie lateral del nuevo cilindro.



Como:

$$S_T = S_L \rightarrow 2 \pi r (r + 10) = 2 \pi (r+5) \times 10$$

$$\text{Luego: } r^2 + 10r = 10r + 50$$

$$r^2 = 50$$

4. Calcular el volumen de un cilindro de revolución en función de la circunferencia C de la base y la diagonal D que une extremos de 2 generatrices diametralmente opuestas:

Solución:

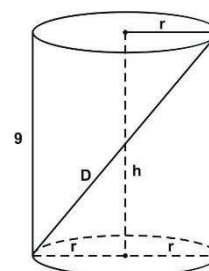
$$V = \pi r^2 h \dots\dots\dots (1)$$

$$C = 2 \pi r \rightarrow r = \frac{C}{2 \pi} \dots\dots\dots (2)$$

Por Pitágoras:

$$h = \sqrt{D^2 - 4r^2} \rightarrow h = \sqrt{D^2 - \frac{4C^2}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt{\frac{D^2 \pi^2 - C^2}{\pi^2}} \rightarrow h = \frac{1}{\pi} \sqrt{D^2 \pi^2 - C^2} \dots\dots (3)$$



Luego; reemplazando (3) y (2) en (1) se tiene:

$$V = \frac{\pi C^2}{4 \pi^2} \sqrt{D^2 \pi^2 - C^2}$$

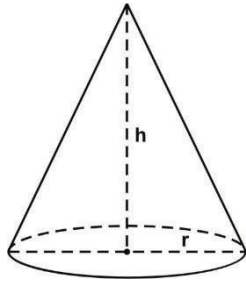
5. La altura y el radio de la base de un cono recto son iguales al radio de una esfera de 4m^3 de volumen. ¿calcular el volumen del cono?.

Solución

$$V_c = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 (r) = \frac{1}{3} \pi r^3 \dots\dots (1)$$

$$V_{es} = \frac{4}{3} \pi R^3 = 4 \rightarrow R^3 = \frac{3}{\pi}$$

$$R^3 = \frac{3}{\pi} = r^3 \dots\dots \text{sust.en (1)}$$



$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{3}{\pi} = 1$$

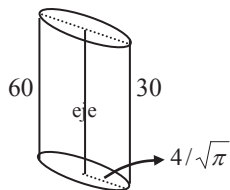
$$\therefore V = 1 \text{ m}^3$$

6. Se tiene un cilindro (tronco) recto sabiendo que la generatriz mayor es 60 m y la generatriz menor 30 m. Además el radio de la base mide $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ Se pide calcular el volumen.

Solución:

$$V = \pi r^2 (c) = \pi \cdot 2 \left(\frac{g_1 + g_2}{2} \right) \\ = 16 \left(\frac{60 + 30}{2} \right) = 720$$

$$V = 720 \text{ m}^3$$



7. Hallar el volumen de un tronco de cilindro recto sabiendo que 2 generatrices diametralmente opuestas miden 14 y 6 m. Y el radio de la base igual.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{ m.}$$

Solución:

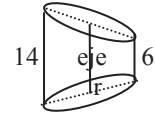
$$V = S_R \times \text{eje}$$

$$V_{\text{oct}} = 2V_{\text{pirámide (SABCD)}};$$

$$\text{eje} = \frac{14 + 6}{2} = 10 \text{ m.}$$

$$V = 4 \times 10 = 40$$

$$\therefore V = 40 \text{ m}^3$$



8. El volumen de un octaedro es 1 m^3 . Calcular el volumen de la esfera circunscrita.

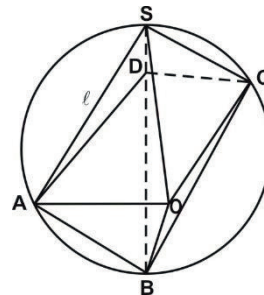
Solución:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \dots (1)$$

$$S_R = \pi \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^2 = \pi \left(\frac{4}{\pi} \right) = 4 \text{ m}^2$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3} \text{Área ABCD} \right) (SO) \dots (2)$$

$$\text{área de ABCD} = l^2 = \pi (R\sqrt{2})^2 = 2R^2 \pi \dots (3)$$



Sust. En (2):

$$1 = \frac{2}{3} (2R^2 \pi) R \dots \rightarrow R^3 = \frac{3}{4\pi} \text{ en (1)}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{3}{4\pi} \right) = 1$$

$$V = 1 \text{ m}^3$$

9. La arista de un exaedro regular (cubo) mide 3 m. Se pide calcular el volumen de la esfera circunscrita:

Solución:

De la figura:

$$\overline{AC} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{AB} = 3$$

Luego :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$$

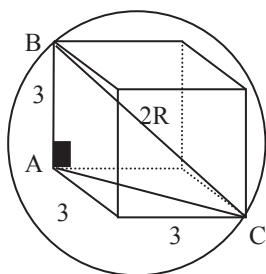
$$\overline{BC}^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3)^2$$

$$\overline{BC}^2 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \rightarrow BC = 2R = 3\sqrt{3} \rightarrow R = 3\sqrt{3}/2$$

Luego el volumen de la esfera:

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^3$$

$$V = \frac{27\sqrt{3}\pi}{2}$$



BIBLIOGRAFÍA

- Blas Chávez, Jerónimo. Matemática Básica. Edit. Gómez S.A. Lima – Perú 1999.
- Coveñas Naquiche, Manuel. Matemática 4. Editorial Monterrico.
- Coveñas Naquiche, Manuel. Matemática 3. Editorial “Coveñas E.I.R.L.” Lima-Perú.
- Coveñas Naquiche, Manuel. Matemática 1. Editorial “Coveñas E.I.R.L.” Lima- Perú”.
- Editores Lexus, Enciclopedia Estudiantil de la Matemática. Editorial Cultural Americana S.A. 1997 Buenos Aires – Argentina.
- Espinoza Ramos, Eduardo. Análisis Matemático I. Impreso en Editorial Servicios Gráficos JJ. 3era Edición. Lima-Perú.
- Figueroa García, Ricardo. Matemática Básica 1. Editorial “América”. Sexta Edición 1996. Lima-Perú.
- Lázaro. C, M. Matemática Básica A. Editorial Mosquera. Primera Edición 1993. Lima-Perú.
- Leithold, Louis. Cálculo con Geometría Analítica.
- L. Galdos: Álgebra II. Edit. El Comercio S.A. Lima – Perú 2002.
- Lechmann Charles : Álgebra. Edit. Limusa S.A. México D.F. 1998.
- Londoño Nelson y Biología Hernando: Matemática Progresiva 1 y 2. Edit. Norma. Bogotá 1995.
- Mitac Meza, Máximo: Tópicos de Cálculo Tomo I, Ediciones. Ciencias Lima – Perú 1999.
- Timoteo Valentín, Salvador. Razonamiento Matemático. Editorial “San Marcos”. Lima-Perú.
- Venero B, J. Armando. Matemática Básica. Ediciones GEMAR, 1994. Lima-Perú.



científica digital



VENDA PROIBIDA - ACESSO LIVRE - OPEN ACCESS

